سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - الف) فرض کنید تابع $f$ در یک بازه اکیداً نزولی باشد و $a$ و $b$ متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \geq b$.

ب) اگر $\frac{۱}{۶۴} \leq (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$، حدود $x$ را به دست آورید.

۲ - هریک از توابع زیر، تبدیل‌یافتهٔ تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هریک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y = \sqrt{۲ + x}$

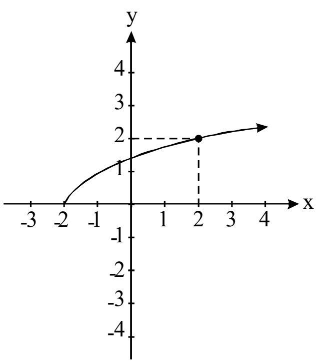
ب) $y = ۲ + \sqrt{x}$

پ) $y = -۲\sqrt{x}$

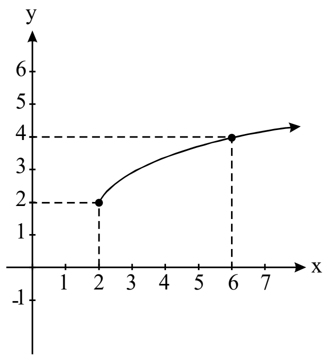
ت) $y = \sqrt{\frac{x}{۲}}$

ث) $y = ۲ + \sqrt{x - ۲}$

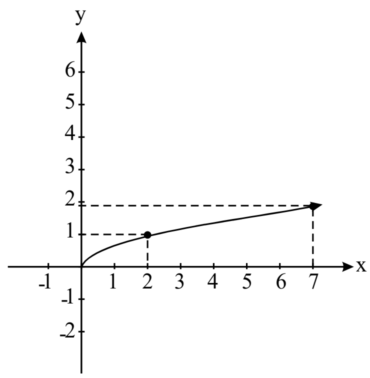
ج) $y = \sqrt{-۲x}$



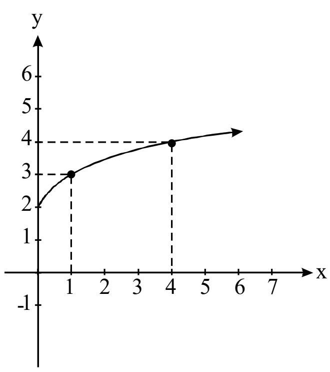

$(a)$



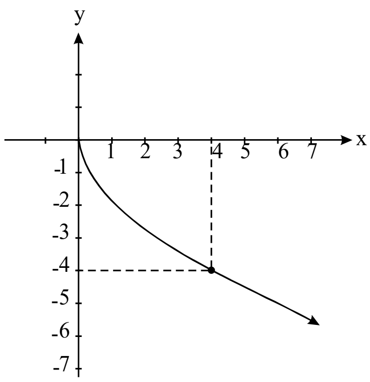

$(b)$



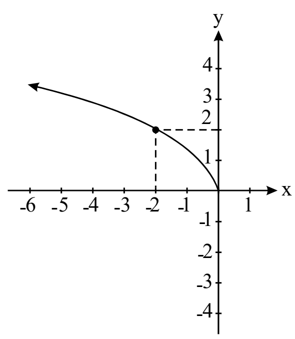

$(c)$




$(d)$

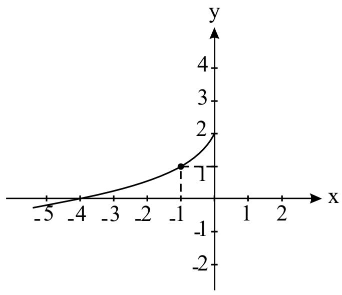



$(e)$




$(f)$

۳ - نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید.



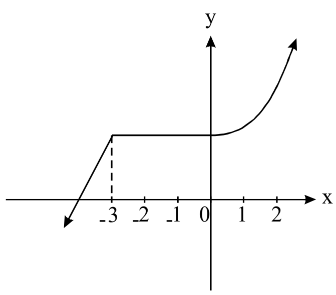

۴ - تابع $f(x)=(x-۲)^{۳}+۱$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع $f$ را به کمک نمودار تابع $y=x^{۳}$ رسم کنید.

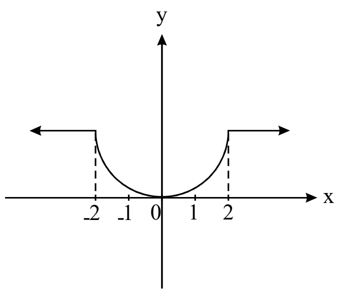
ب) نشان دهید که $f$ وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

پ) ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به دست آورید.

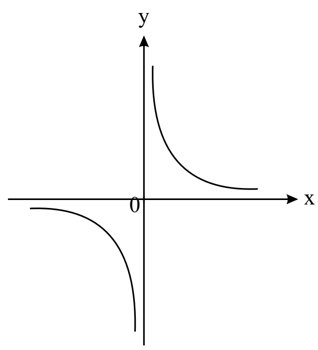
۵ - نمودار توابع $f$، $g$ و $h$ در زیر رسم شده‌اند.




$y=f(x)$




$y=g(x)$




$y=h(x)$

الف) تابع $f$ در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع $g$ در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

پ) تابع $h$ در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

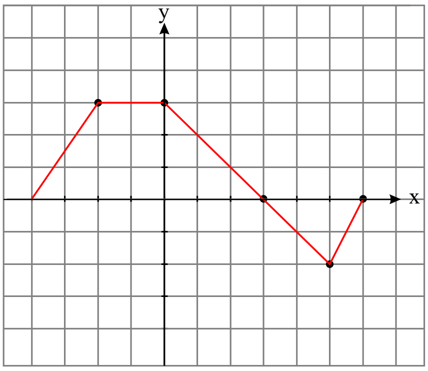
۶ - آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟

۷ - اگر توابع $f$ و $g$ در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع $f-g$ چه می‌توان گفت؟

۸ - اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^3+kx^2+2$ بر $x-2$ برابر با ۶ باشد، $k$ را تعیین کنید.

۹ - مقادیر $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3+ax^2+bx+1$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

۱۰ - نمودار تابع $f$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.




الف

$y = f(-x)$

ب

$y = ۲f(x - ۱)$

پ

$y = -f(x) + ۲$

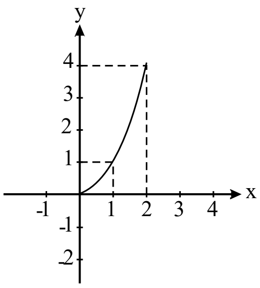
**ت**

$y = f(۲x - ۱)$

**ث**

$y = f(۳ - x)$

**۱۱ - نمودار تابع $f$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار $f$ مقایسه کنید.**




**الف**

$y = f(-x)$

**ب**

$y = -f(x)$

**پ**

$y = -f(-x)$

**۱۲ - نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید. کدام‌یک از آنها در تمام دامنهٔ خود، اکیداً یکنواست؟**

**الف**

$f(x) = \sqrt{2 - x}$

**ب**

$g(x) = 2^{-x}$

**پ**

$h(x) = \log_{۲}^{x}$

**۱۳ - هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته‌شده تجزیه کنید.**

**الف** $x^۶ - ۱$ با عامل $x - ۱$

**ب** $x^۶ - ۱$ با عامل $x + ۱$

**پ** $x^۵ + ۳۲$ با عامل $x + ۲$

# پاسخنامه تشریحی

**۱ – الف)**

**برهان خلف:** اگر $a \geq b$ برقرار نباشد، آنگاه $a < b$ است و چون $f$ اکیداً نزولی است، داریم:

$$a < b \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} f(a) > f(b)$$

نتیجهٔ $f(a) > f(b)$ خلاف فرض است، زیرا طبق فرض $f(a) \leq f(b)$ است، پس باید $a \geq b$ باشد.

**ب)**

می‌دانیم تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ اکیداً نزولی است، یعنی برای دو مقدار $a$ و $b$ داریم:

$$(\frac{۱}{۲})^a \leq (\frac{۱}{۲})^b \Rightarrow a \geq b$$

حال برای حل نامعادلهٔ داده‌شده داریم:

$$(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲} \leq \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲} \leq (\frac{۱}{۲})^{۶} \Rightarrow ۳x - ۲ \geq ۶ \Rightarrow x \geq \frac{۸}{۳}$$

**۲ –**

الف) $y = \sqrt{۲ + x}$

برای رسم نمودار تابع $y = \sqrt{۲ + x}$، باید نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به چپ منتقل کنیم، پس نمودار آن نمودار $(a)$ است.

ب) $y = ۲ + \sqrt{x}$

برای رسم نمودار تابع $y = ۲ + \sqrt{x}$، باید نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به بالا منتقل کنیم، پس نمودار آن $(d)$ است.

پ) $y = -۲\sqrt{x}$

برای رسم نمودار تابع $y = -۲\sqrt{x}$، باید عرض نقاط نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را در ۲− ضرب کنیم، پس نمودار آن $(e)$ است.

ت) $y = \sqrt{\frac{x}{۲}}$

برای رسم نمودار تابع $y = \sqrt{\frac{۱}{۲}x}$، باید طول نقاط نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را در $۲ = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}$ ضرب کنیم، پس نمودار آن $(c)$ است.

ث) $y = ۲ + \sqrt{x - ۲}$

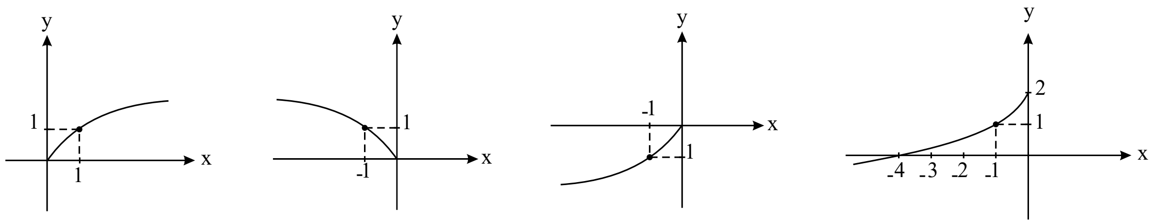
برای رسم نمودار تابع $y = ۲ + \sqrt{x - ۲}$، باید نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا منتقل کنیم، پس نمودار آن $(b)$ است.

ج) $y = \sqrt{-۲x}$

برای رسم نمودار تابع $y = \sqrt{-۲x}$، باید طول نقاط نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را بر ۲− تقسیم کنیم، پس نمودار آن $(f)$ است.

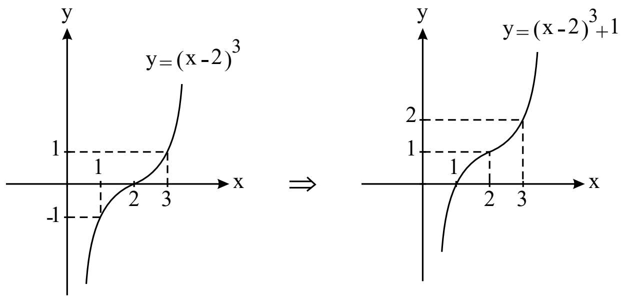
**۳ –**

$y = \sqrt{x} \xrightarrow{x \to -x}$ $\quad y = \sqrt{-x} \Rightarrow$ $\quad y = -\sqrt{-x} \Rightarrow$ $\quad y = -\sqrt{-x} + ۲$




**۴ – الف)**

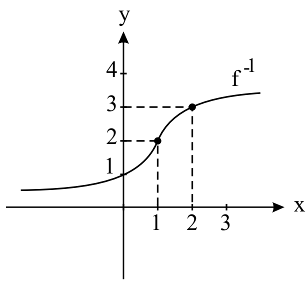
برای رسم نمودار تابع $f$ باید نمودار تابع $y = x^۳$ را دو واحد به راست و سپس یک واحد به بالا منتقل کنیم.




ب)

هر خط افقی (موازی محور $x$ها) نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع $f$ تابعی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است. برای رسم نمودار تابع $f^{-1}$ باید نمودار تابع $f$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

$$(۱,۰)\in f \Rightarrow (۰,۱)\in f^{-۱}$$
$$(۲,۱)\in f \Rightarrow (۱,۲)\in f^{-۱}$$
$$(۳,۲)\in f \Rightarrow (۲,۳)\in f^{-۱}$$




پ)

در تابع $f$ باید $x$ را برحسب $y$ حل کنیم که داریم:

$$y=(x-۲)^۳+۱ \Rightarrow (x-۲)^۳=y-۱ \Rightarrow x-۲=\sqrt[۳]{y-۱} \Rightarrow x=۲+\sqrt[۳]{y-۱}$$
$$\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=۲+\sqrt[۳]{x-۱}$$

۵ -

الف) صعودی $\Rightarrow (-\infty,۰]$ , اکیداً صعودی $\Rightarrow (-\infty,-۳]$

صعودی $\Rightarrow \mathbb{R}$ , اکیداً صعودی $\Rightarrow [۰,+\infty)$ , صعودی $\Rightarrow [-۳,+\infty)$

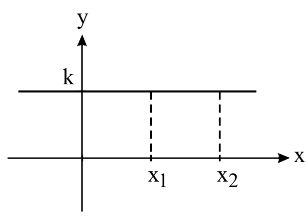
ب) اکیداً نزولی $\Rightarrow [-۲,۰]$ , نزولی $\Rightarrow (\infty,۰]$

پ) تابع $h$ در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۶ - بله، تابع ثابت $f(x)=k$ هم صعودی و هم نزولی است، زیرا برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ تابع ثابت داریم:

تابع $f$ صعودی است. $\Rightarrow x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\le f(x_۲)$

تابع $f$ نزولی است. $\Rightarrow x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\ge f(x_۲)$




در هردو تعریف فوق، حالت تساوی یعنی $f(x_۱)=f(x_۲)$ برقرار است.

۷ - می‌دانیم دو نامساوی هم‌جهت را فقط می‌توان باهم جمع کرد، بنابراین برای دو مقدار $x_۱$ و $x_۲$ از فاصلهٔ مورد نظر داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲) \\ x_۱<x_۲ \Rightarrow g(x_۱)<g(x_۲) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_۱)+g(x_۱)<f(x_۲)+g(x_۲)$$

بنابراین داریم:

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)+g(x_۱)<f(x_۲)+g(x_۲) \Rightarrow (f+g)(x_۱)<(f+g)(x_۲)$$

اگر $f$ و $g$ در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، تابع $f-g$ در این فاصله ممکن است اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی و یا اینکه غیریکنوا باشد. داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=۴x \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ g(x)=x \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \end{array}\right. \Rightarrow (f-g)(x)=۴x-x=۳x \longrightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=۲x \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ g(x)=۵x \rightarrow \text{اکیداً صعودی} \end{array}\right. \Rightarrow (f-g)(x)=۲x-۵x=-۳x \longrightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

$$\begin{cases} f=\{(۲,۱),(۳,۶),(۴,۱۱)\}\to \text{اکیداً صعودی} \\ g=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۱۰)\}\to \text{اکیداً صعودی}\end{cases} \Rightarrow (f-g)=\{(۲,۱-۳),(۳,۶-۴),(۴,۱۱-۱۰)\}$$

$$\Rightarrow f-g=\{(۲,-۲),(۳,۲),(۴,۱)\}\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & ۲ & & ۳ & & ۴ \\ \hline y & -۲ & \nearrow & ۲ & \searrow & ۱ \end{array} \quad \text{غیریکنوا}$$

۸ - باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار داده و حاصل را برابر ۶ قرار دهیم.

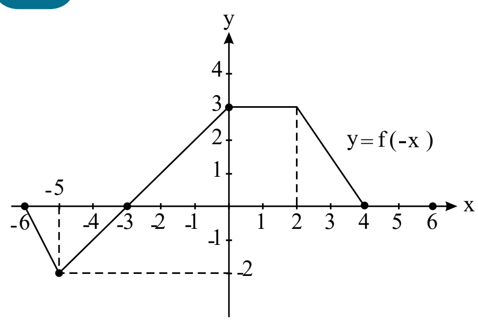
$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow (۲)^۳+k(۲)^۲+۲=۶\Rightarrow ۸+۴k+۲=۶\Rightarrow ۴k=-۴\Rightarrow k=-۱$$

۹ -

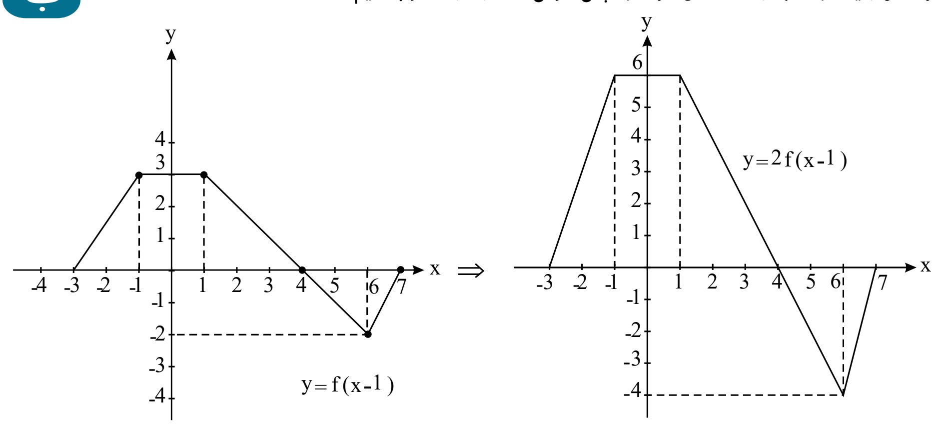
$$f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۱$$
$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow r=f(۲)=۰\Rightarrow ۲^۳+a\times ۲^۲+b\times ۲+۱=۰$$
$$\Rightarrow ۸+۴a+۲b+۱=۰\Rightarrow ۴a+۲b=-۹ \quad (۱)$$
$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow r=f(-۱)=۰\Rightarrow (-۱)^۳+a(-۱)^۲+b(-۱)+۱=۰$$
$$\Rightarrow -۱+a-b+۱=۰\Rightarrow a-b=۰\Rightarrow a=b$$
$$\xrightarrow{(۱)} ۴a+۲a=-۹\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=b=-\frac{۳}{۲}$$

۱۰ -

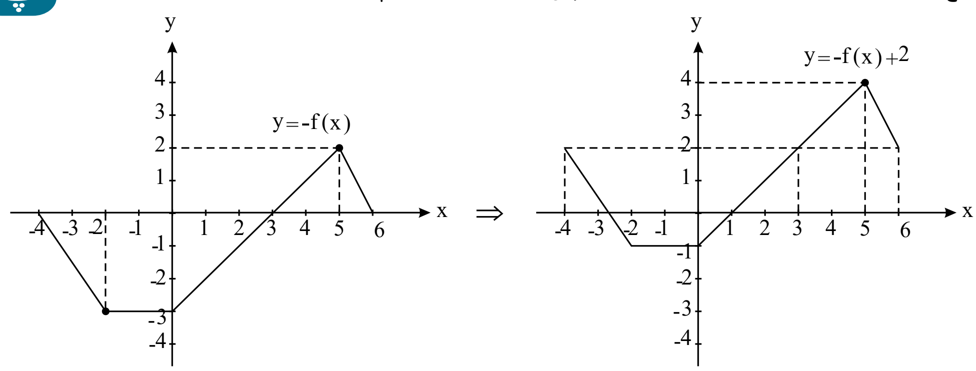
**الف** برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، باید طول نقاط تابع $y=f(x)$ را بر $-۱$ تقسیم کنیم که معنای آن این است که نمودار نسبت به محور $y$ها قرینه می‌شود.




**ب** برای رسم نمودار تابع $y=۲f(x-۱)$ باید نمودار $y=f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کرده و سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.




**پ** برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)+۲$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور $x$ها قرینه کرده و سپس آن را ۲ واحد بالا ببریم.

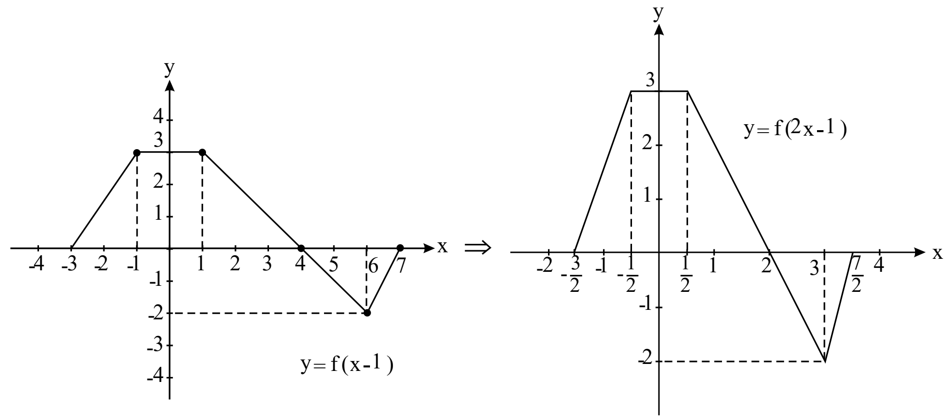



**ت** برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ باید در هر مرحله $x$ را برداشته و عبارت مناسب به‌جای آن قرار دهیم تا $y=f(۲x-۱)$ حاصل شود.

داریم:

$$y=f(x)\xrightarrow{x\to x-1}y=f(x-۱)\xrightarrow{x\to ۲x}y=f(۲x-۱)$$

پس باید ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به راست و سپس طول نقاط حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم که داریم:

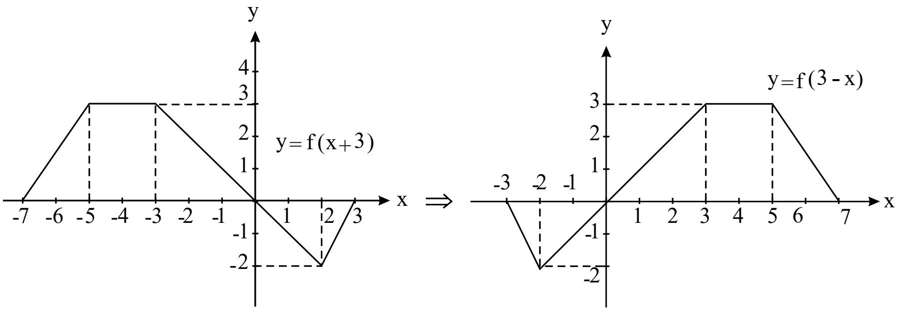



**ث**

برای رسم نمودار تابع $y=f(۳-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، داریم:

$$y=f(x)\xrightarrow{x\to x+۳}y=f(x+۳)\xrightarrow{x\to -x}y=f(-x+۳)=f(۳-x)$$

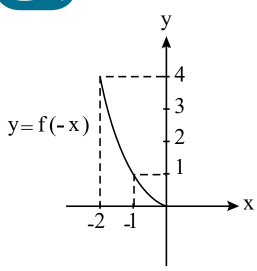
بنابراین باید ابتدا نمودار تابع $f$ را ۳ واحد به چپ منتقل کرده و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور $y$ها قرینه کنیم.




- ۱۱

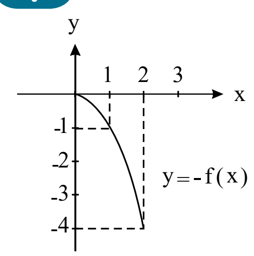
**الف**

برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور $y$ها قرینه کنیم.



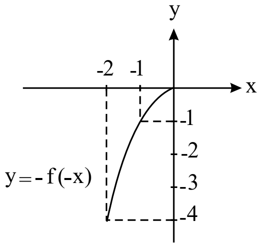

**ب**

برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور $x$ها قرینه کنیم.




**پ**

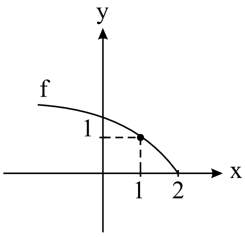
برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x)$ باید نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور $x$ها و سپس نسبت به محور $y$ها قرینه کنیم که نتیجهٔ آن این است که نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.




۱۲ -

**الف**

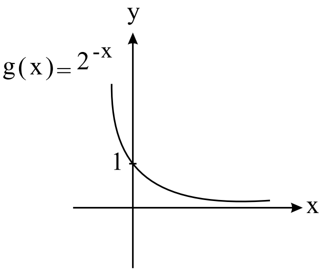
تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در دامنه‌اش یعنی بازهٔ $(-\infty,۲]$ اکیداً نزولی است.




**ب**

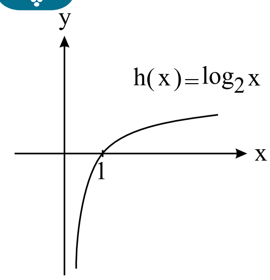
$g(x)=۲^{-x}=(۲^{-۱})^{x}=(\frac{۱}{۲})^{x}$

نمودار تابع $g(x)=۲^{-x}$ به‌صورت زیر است. تابع $g$ در کل $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.




**پ**

نمودار تابع $h(x)=\log_{۲}^{x}$ به‌صورت زیر است و دامنهٔ آن $D_h=(۰,+\infty)$ می‌باشد. تابع $h$ در دامنه‌اش اکیداً صعودی است.




۱۳ -

**الف**

$x^{۶}-۱=(x-۱)(x^{۵}+x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱)$

**ب**

$x^{۶}-۱=(x+۱)(x^{۵}-x^{۴}+x^{۳}-x^{۲}+x-۱)$

**پ**

$x^{۵}+۳۲=x^{۵}+۲^{۵}=(x+۲)(x^{۴}-x^{۳}\times ۲+x^{۲}\times ۲^{۲}-x\times ۲^{۳}+۲^{۴})$

$\Rightarrow x^{۵}+۳۲=(x+۲)(x^{۴}-۲x^{۳}+۴x^{۲}-۸x+۱۶)$