علی هاشمی

۱- اگر $f(x)=۴-\sqrt{x-۳}$ باشد، طول نمودار رسم شدهٔ تابع $g(x)=fof^{-۱}(x)+f^{-۱}of(x)$ برابر کدام گزینه است؟

① $\sqrt{۲}$

② $\sqrt{۳}$

③ ۲

④ $\sqrt{۵}$

۲- اگر تابع $f=\{(\frac{۴}{k},۲),(۱,۴),(k+۳,۲),(۳,k+۳)\}$ وارون‌پذیر و $g(x)=[\frac{x}{۲}-۲]$ باشد، مقدار $(f-g)(-k-۱)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

① صفر

② ۱

③ -۱

④ -۲

۳- اگر $f(x)=۳x^۲-۴x+۱$ و $g(x)=\frac{۲x-۱}{۳x+۲}$، آن‌گاه حاصل $(fog^{-۱})(-\frac{۱}{۹})$ کدام است؟

① صفر

② $\frac{۸}{۳}$

③ $-\frac{۱۹}{۳۰}$

④ $\frac{۱}{۳}$

۴- در تابع خطی $f(x)$ داریم $f(۱)=۳$ و $f(۰)=۲$. ضابطه‌ی وارون این تابع کدام است؟

① $y=x-۱$

② $y=۲x-۵$

③ $y=x-۲$

④ $y=x+۳$

۵- ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=۵x-|۲x-۴|$ کدام است؟

① $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۴}{۳} & x\geq ۲\\[2mm] \dfrac{x+۴}{۷} & x<۲\end{cases}$

② $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۴}{۳} & x\geq ۱۰\\[2mm] \dfrac{x+۴}{۷} & x<۱۰\end{cases}$

③ $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۴}{۳} & x\geq ۱۰\\[2mm] \dfrac{x-۴}{۷} & x<۱۰\end{cases}$

④ این تابع وارون‌پذیر نیست.

۶- نمودار تابع $f(x)=۱+\dfrac{۶}{x-۲}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{۲\}$ را در نظر بگیرید. معادله‌ی $f^{-۱}(x)=f(x)$ چند ریشه دارد؟

① ۱

② ۲

③ صفر

④ بی‌شمار

۷- اگر در تابع خطی f، $f(۲)=۴$ و $f^{-۱}(-۵)=-۱$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۳+f(۴))$ کدام است؟

① ۵

② $\dfrac{۱۱}{۳}$

③ ۳

④ ۴٫۵

۸- اگر $f=\{(۲,۳),(-۱,۲),(-۴,۱),(۳,۰)\}$ و $g=\{(۰,۲),(۲,-۴),(۳,۲),(-۴,-۲)\}$ آن‌گاه، حاصل $(fogof^{-۱})(۳)$ کدام است؟

① -۲

② -۱

③ ۱

④ ۲

۹ - کدام گزینه بیانگر تابعی وارون‌پذیر است؟

① $y = |x| + ۱ - x$

② $y = ۱ - ۳|x| + x$

③ $y = ۱ + ۳|x| - x$

④ $y = ۱ - ۳x + |x|$

۱۰ - تابع وارون تابع $y = x + \sqrt{x}$ به صورت $y = (\frac{\sqrt{ax+۱} - ۱}{b})^۲$ می‌باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

① ۱

② ۲

③ ۴

④ ۶

۱۱ - اگر محل برخورد نمودار تابع $f(x) = ۲x - |x| + ۱$ با نمودار تابع وارونش نقطهٔ $A(a,b)$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

① -۱

② صفر

③ ۱

④ ۲

۱۲ - اگر $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = \sqrt{x-۱}$ باشند، ضابطهٔ وارون تابع fog کدام است؟

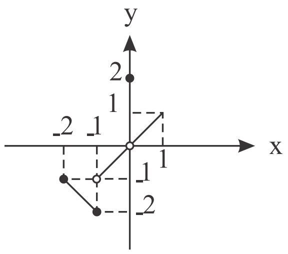
① $(fog)^{-۱}(x) = x; x \geq ۱$

② $(fog)^{-۱}(x) = x; x \leq ۱$

③ $(fog)^{-۱}(x) = \sqrt{x}; x \geq ۱$

④ $(fog)^{-۱}(x) = \sqrt{x}; x \leq ۱$

۱۳ - اگر $f^{-1}(x)=\frac{x+۱}{۱-۲x}$ و نمودار تابع $y=g(x)$ به‌صورت زیر باشد، در این‌صورت به‌ازای چه مقداری از a، $f(g^{-1}(a))=۱$ است؟



① -۲

② -۱

③ ۱

④ صفر

۱۴ - تابع $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۷$ مفروض است. تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ با کدام‌یک از انتقال های زیر بر تابع f^{-1} منطبق می‌شود؟

① یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا

② یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین

③ یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا

④ یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین

۱۵ - در تابع خطی f رابطهٔ $۴f(۲x)=f(۸x-۱)-۵$ برقرار است. اگر $f^{-1}(۳)=۵$ باشد، مقدار m از تساوی $f^{-1}(m)=۲$ کدام است؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳

۱۶ - به‌ازای چند مقدار m، تابع $f=\{(۱,m^{۳}-m),(m,۴),(۱,۴m^{۲}-۴),(۵,m+۱),(۰,m^{۲}+۲)\}$ وارون‌پذیر است؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳

۱۷ - اگر نمودار تابع $y = ۲f^{-۱}(x-۱)+۳$ از نقطهٔ $(۳,۷)$ بگذرد، کدام نقطهٔ زیر، قطعاً روی نمودار تابع $y = f(x+۱)$ قرار ندارد؟

① $(۳,۲)$

② $(۲,۴)$

③ $(۱,۲)$

④ $(۳,۴)$

۱۸ - اگر $f = \{(۱,۲),(-۳,-۱),(۳,۴),(۴,-۳)\}$ باشد، مقدار $۲f^{-۱}(-۳)+f(۳)$ کدام است؟

① ۲

② ۱۳

③ ۴

④ ۱۲

۱۹ - تابع $f(x) = x^۲ - ۶x + ۳$ را با دامنهٔ محدودشدهٔ $D_f = (-\infty, ۰)$ در نظر بگیرید. وارون این تابع در کدام گزینه آمده است؟

① $f^{-۱}(x) = ۳ + \sqrt{x+۶}\,;\ x < ۳$

② $f^{-۱}(x) = ۳ + \sqrt{x+۶}\,;\ x > ۳$

③ $f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x+۶}\,;\ x < ۳$

④ $f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x+۶}\,;\ x > ۳$

۲۰ - تابع f با دامنهٔ $(۲,۳)$ و ضابطهٔ $f(x) = [-x]x + [x]$ تعریف شده است. مقدار $f^{-۱}(-۵)$ کدام است؟

① $\frac{۵}{۲}$

② $\frac{۷}{۳}$

③ ناموجود

④ $\frac{۸}{۳}$

۲۱ - اگر داشته باشیم: $g(x)=f(۲x+۵)$ و $f^{-۱}(x)=\frac{x^۳}{۹}+\sqrt[۳]{۹x}$، آن‌گاه حاصل عبارت $f^{-۱}(g^{-۱}(f(-۱)))$ کدام است؟

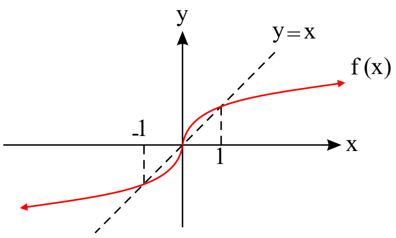
① صفر

② -۲

③ -۳

④ -۶

۲۲ - نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)-f^{-۱}(x)}{x^۲-۱}}$ کدام است؟



① $[۰,۱)$

② $(-\infty,۰]-\{-۱\}$

③ $(-۱,۰]$

④ $[۰,+\infty)-\{۱\}$

۲۳ - تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-x+۵$ و دامنهٔ $D_f=[۱,+\infty)$ مفروض است. وارون این تابع محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

① ۵

② $\frac{۱+\sqrt{۲۶}}{۲}$

③ $\frac{۱-\sqrt{۲۶}}{۲}$

④ نقطهٔ برخورد ندارد.

۲۴ - اگر به‌ازای هر عدد حقیقی داشته باشیم: $(fog)^{-۱}(۲x-۴)=\frac{x}{۲}$ و $g(x)=۲x^۳+۱$. آن‌گاه نمودار وارون تابع $f(x)$، محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

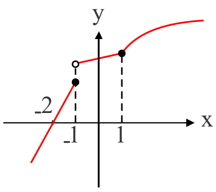
۲۵- نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$، در چند نقطه خط $y=۳x$ را قطع می‌کند؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

۲۶- وارون تابع $y=\frac{۲x-۱}{x-۲}$، نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

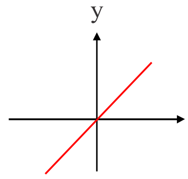
(۱) $\sqrt{۲}$
(۲) $۲\sqrt{۲}$
(۳) $۴\sqrt{۲}$
(۴) $۸\sqrt{۲}$

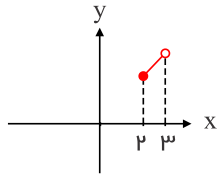
۲۷- اگر نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، کدام‌یک از بازه‌های زیر در برد وارون تابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ قرار ندارد؟

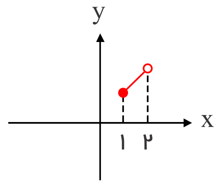


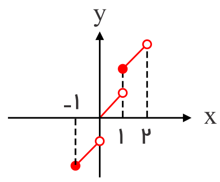
(۱) $[۱,۴]$
(۲) $(-۱,۰]$
(۳) $[-۲,-۱)$
(۴) $(-۳,-۲)$

۲۸- اگر $f^{-۱}(x)$ وارون تابع $f(x) = x + [x]$ با دامنهٔ $D_f = [۱,۲)$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y = (fof^{-۱})(x)$ کدام است؟

① 

② 

③ 

④ 

۲۹- در تابع ۲ $f(x) = x^{۳} + x + ۲$، اگر محل برخورد $f^{-۱}(x)$ با محور xها را A' بنامیم و نقطهٔ A قرینهٔ A' نسبت به خط $y = x$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط AA' کدام است؟

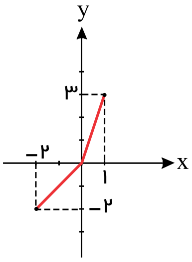
① $\sqrt{۲}$

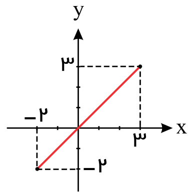
② $۲\sqrt{۲}$

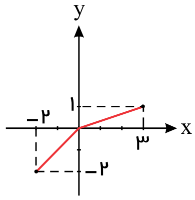
③ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

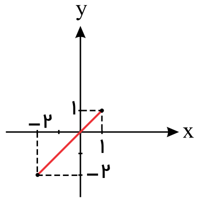
④ $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

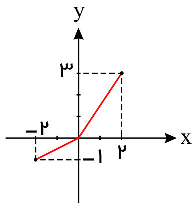
۳۰ - نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ به‌شکل روبه‌رو است. نمودار تابع $y=(f^{-۱}of)(x)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

توجه
$$\begin{cases} fof^{-1}(x)=x \ , & D_{fof^{-1}(x)}=D_{f^{-1}(x)}=R_{f(x)} \\ f^{-1}of(x)=x \ , & D_{f^{-1}of(x)}=D_{f(x)}=R_{f^{-1}(x)} \end{cases}$$

ابتدا دامنه و برد تابع $f(x)=4-\sqrt{x-3}$ را به‌دست می‌آوریم:

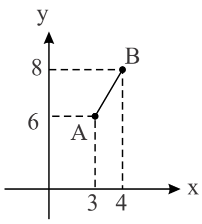
$$x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3 \Rightarrow D_f=[3,+\infty)$$
$$\sqrt{x-3}\geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-3}\leq 0 \Rightarrow 4-\sqrt{x-3}\leq 4 \Rightarrow f(x)\leq 4 \Rightarrow R_f=(-\infty,4]$$

تابع $f^{-1}of(x)$ تابع همانی بر روی دامنه تابع f می‌باشد یعنی:

$$f^{-1}of(x)=x \ , \ x\in[3,+\infty)$$

تابع $fof^{-1}(x)$ تابع همانی بر روی برد تابع f می‌باشد یعنی:

$$fof^{-1}(x)=x \ , \ x\in(-\infty,4]$$
$$g(x)=fof^{-1}(x)+f^{-1}of(x) \Rightarrow D_g=D_{fof^{-1}}\cap D_{f^{-1}of}=(-\infty,4]\cap[3,+\infty)$$
$$\Rightarrow D_g=[3,4] \Rightarrow g(x)=x+x=2x \ , \ x\in[3,4] \Rightarrow A\left|\begin{matrix}3\\6\end{matrix}\right. \quad , \quad B\left|\begin{matrix}4\\8\end{matrix}\right.$$



$$AB=\sqrt{(4-3)^2+(8-6)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

۲ - گزینه ۱ f باید یک به یک باشد، پس مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(\frac{4}{k},2)$ و $(k+3,2)$ با هم برابرند.

$$k+3=\frac{4}{k} \Rightarrow k^2+3k-4=0 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-4 \end{cases}$$

اگر $k=1$ باشد، f یک به یک نمی‌شود.

$$f=\{(4,2),(1,4),(3,4)\}$$

اگر $k=-4$ باشد، f یک به یک و درنتیجه وارون‌پذیر است:

$$f=\{(-1,2),(1,4),(3,-1)\}$$

پس $k=-4$ است. حالا مقدار $(f-g)(-k-1)$ را حساب می‌کنیم:

$$(f-g)(3)=f(3)-g(3)=-1-[\frac{3}{2}-2]=-1-(-1)=0$$

۳ - گزینه ۱ می‌دانیم اگر $\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.\in f$ باشد آن‌گاه $\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.\in f^{-1}$ است. برای محاسبه‌ی $f(g^{-1}(\frac{-1}{9}))$ ابتدا مقدار $g^{-1}(\frac{-1}{9})$ را می‌یابیم و برای این کار کافی است که معادله‌ی $g(x)=\frac{-1}{9}$ را حل کنیم.

$$\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{-1}{9} \to 18x-9=-3x-2 \to 21x=7 \to x=\frac{1}{3}$$

پس : $f(g^{-1}(\frac{-1}{9}))=f(\frac{1}{3})=3(\frac{1}{3})^2-4(\frac{1}{3})+1=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+1=0$

۴ - گزینه ۳ اگر $\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.\in f$ باشد آنگاه $\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.\in f^{-1}$ است.

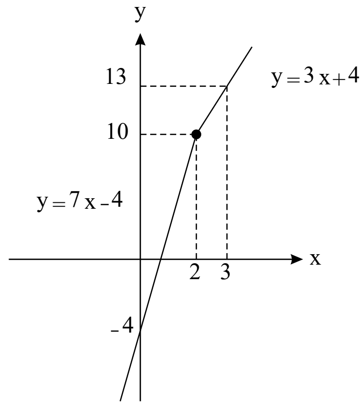
$$f(1)=3 \to f^{-1}(3)=1 \to \left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right.\in f^{-1} \quad \text{و} \quad f(0)=2 \to f^{-1}(2)=0 \to \left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.\in f^{-1}$$

این دو نقطه فقط در گزینه‌ی «۳» صدق می‌کنند.

۵ - گزینه ۲ برای به‌دست آوردن ضابطه‌ی وارون تابع $y=f(x)$، ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم. سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم. و توجه کنید $D_{f^{-1}}=R_f$ و $R_{f^{-1}}=D_f$ است.

ابتدا با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع $f(x)$ را به‌صورت تابعی دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}۵x-(۲x-۴) & x\geq ۲\\ ۵x+(۲x-۴) & x<۲\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۳x+۴ & x\geq ۲\\ ۷x-۴ & x<۲\end{cases}$$



اکنون ضابطه‌ی وارون هریک از این ضابطه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$x\geq ۲: y=۳x+۴\Rightarrow x=\frac{y-۴}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۳}: D_{f^{-۱}}=R_f=[۱۰,+\infty)$$

$$x<۲: y=۷x-۴\Rightarrow x=\frac{y+۴}{۷}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۷}: D_{f^{-۱}}=R_f=(-\infty,۱۰)$$

پس ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)$ به شکل مقابل است:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۴}{۳} & x\geq ۱۰\\ \dfrac{x+۴}{۷} & x<۱۰\end{cases}$$

شکل تابع را بدین خاطر رسم کردیم که نشان دهیم این تابع یک به یک است و وارون‌پذیر است بنابراین گزینه‌ی چهارم نادرست است.

۶ - گزینه ۲ روش اول:

برای محاسبه‌ی ضابطه‌ی تابع وارون $y=f(x)$، ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم، سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم.

$$y=۱+\frac{۶}{x-۲}\Rightarrow y-۱=\frac{۶}{x-۲}\Rightarrow x-۲=\frac{۶}{y-۱}\Rightarrow x=۲+\frac{۶}{y-۱}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲+\frac{۶}{x-۱}$$

اکنون معادله‌ی موردنظر را حل می‌کنیم:

$$f^{-۱}(x)=f(x)\Rightarrow ۲+\frac{۶}{x-۱}=۱+\frac{۶}{x-۲}\Rightarrow ۱+\frac{۶}{x-۱}=\frac{۶}{x-۲}$$

$$\Rightarrow \frac{x+۵}{x-۱}=\frac{۶}{x-۲}\Rightarrow (x+۵)(x-۲)=۶(x-۱)$$

$$\Rightarrow x^۲+۳x-۱۰=۶x-۶\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow (x+۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x=-۱,۴$$

هر دو جواب قابل‌قبول‌اند، پس معادله‌ی موردنظر ۲ ریشه دارد.

روش دوم:

کافی است معادله‌ی $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$۱+\frac{۶}{x-۲}=x\Rightarrow \frac{۶}{x-۲}=x-۱\Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۶$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow (x+۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x=-۱,۴$$

۷ - گزینه ۱ در تابع وارون‌پذیر f اگر $f(a)=b$ آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ و بالعکس.

در تابع خطی $f(x)=ax+b$ داریم:

$$f(۲)=۴\Rightarrow ۲a+b=۴\quad (I)$$

$$f^{-۱}(-۵)=-۱\Rightarrow f(-۱)=-۵\Rightarrow -a+b=-۵\quad (II)$$

از I و II، $a=۳$ و $b=-۲$ به‌دست می‌آید.

$$f(x)=۳x-۲, f(۴)=۱۲-۲=۱۰\Rightarrow f^{-۱}(۳+f(۴))=f^{-۱}(۳+۱۰)=f^{-۱}(۱۳)=t$$

$$\Rightarrow f(t)=۱۳\Rightarrow ۳t-۲=۱۳\Rightarrow t=۵\rightarrow f^{-۱}(۱۳)=۵$$

۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{(a,b)\in f\rightarrow (b,a)\in f^{-۱}}$

ابتدا تابع $f^{-۱}$ را می‌نویسیم:

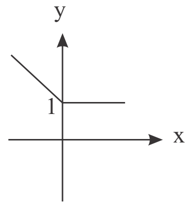
$$f=\{(۲,۳),(-۱,۲),(-۴,۱),(۳,۰)\}\Rightarrow f^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,-۱),(۱,-۴),(۰,۳)\}$$

$f^{-۱}(۳) = ۲ \Rightarrow (gof^{-۱})(۳) = g(f^{-۱}(۳)) = g(۲) = -۴$

پس: $(fogof^{-۱})(۳) = f(gof^{-۱}(۳)) = f(-۴) = ۱$

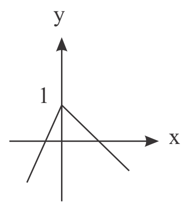
۹ - گزینه ۴ شرط آن‌که تابع وارون‌پذیر باشد آن است که یک‌به‌یک باشد، برای بررسی یک‌به‌یک بودن نمودار توابع را رسم می‌کنیم:

گزینهٔ «۱» : $y = |x| + ۱ - x = \begin{cases} ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ -۲x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$



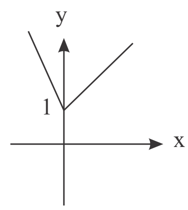
یک به یک نیست .

گزینهٔ «۲» : $y = ۱ - ۳|x| + x = \begin{cases} -۲x + ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ ۴x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$



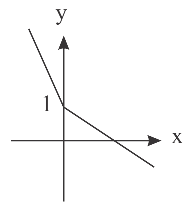
یک به یک نیست .

گزینهٔ «۳» : $y = ۱ + ۳|x| - x = \begin{cases} ۲x + ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ -۴x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$



یک به یک نیست .

گزینهٔ «۴» : $y = ۱ - ۳x + |x| = \begin{cases} -۲x + ۱ & ; \quad x \geq ۰ \\ -۴x + ۱ & ; \quad x < ۰ \end{cases}$



یک به یک است، وارون پذیر است.

۱۰ - گزینه ۲

برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

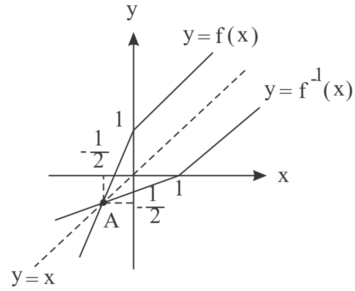
$$f(x) = y = x + \sqrt{x} = (\sqrt{x} + \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۴y + ۱}{۴} = (\sqrt{x} + \frac{۱}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۴y + ۱}}{۲} \Rightarrow x = (\frac{\sqrt{۴y + ۱} - ۱}{۲})^۲$$

$$\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را}} y = (\frac{\sqrt{۴x + ۱} - ۱}{۲})^۲ = f^{-۱}(x) \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۲$$

۱۱ - گزینه ۱ تابع را دو ضابطه‌ای کرده و رسم می‌کنیم:

$$f(x)=۲x-|x|+۱=\begin{cases} x+۱ & ; \quad x\geq ۰ \\ ۳x+۱ & ; \quad x<۰ \end{cases}$$



نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه‌های اول و سوم $(y=x)$ قرینه می‌کنیم. با توجه به شکل مشخص است که محل برخورد دو نمودار روی خط $y=x$ است و نقطه‌ای است که x آن منفی است، بنابراین:

$$x<۰: ۳x+۱=x\Rightarrow ۲x=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow A(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})\Rightarrow a+b=-\frac{۱}{۲}+(-\frac{۱}{۲})=-۱$$

۱۲ ـ گزینه ۱ ابتدا دامنهٔ تابع fog و سپس ضابطهٔ آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^۲+۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$
$$g(x)=\sqrt{x-۱}\xrightarrow[x\geq ۱]{x-۱\geq ۰} D_g=\{x\,|x\geq ۱\}$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|g(x)\in D_f\}=\{x\geq ۱\,\Big|\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\}\Rightarrow D_{fog}=\{x\,|x\geq ۱\}$$
$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x-۱})^۲+۱=x-۱+۱=x$$

همان‌طور که به خاطر دارید تابع $y=x$ یک تابع همانی است و دامنه و برد آن یکسان است، پس:

$$R_{fog}=\{y\,|y\geq ۱\}$$

می‌دانیم که تابع $y=x$ جزء توابعی است که وارون آن با خود آن برابر است، بنابراین:

$$(fog)(x)=x\Rightarrow (fog)^{-۱}(x)=x$$
$$D_{(fog)^{-۱}(x)}=R_{(fog)(x)}=\{x\,|x\geq ۱\}$$

۱۳ ـ گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آنگاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$$f\left(g^{-۱}(a)\right)=۱\longrightarrow f^{-۱}(۱)=g^{-۱}(a)\longrightarrow\frac{۱+۱}{۱-۲}=g^{-۱}(a)$$

$$\longrightarrow g^{-۱}(a)=-۲\longrightarrow g(-۲)=a\xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} a=-۱$$

۱۴ ـ گزینه ۳

$$f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۷=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸+۱=(x-۲)^۳+۱$$

برای یافتن $f^{-۱}$ باید x را برحسب y حل کنیم.

$$(x-۲)^۳+۱=y\Rightarrow (x-۲)^۳=y-۱\Rightarrow x-۲=\sqrt[۳]{y-۱}\Rightarrow x=۲+\sqrt[۳]{y-۱}$$
$$y=f^{-۱}(x)=۲+\sqrt[۳]{x-۱}$$
$$g(x)=\sqrt[۳]{x}\xrightarrow{x\to x-۱} y=\sqrt[۳]{x-۱}\to f^{-۱}(x)=۲+\sqrt[۳]{x-۱}$$

برای رسم $f^{-۱}$ باید نمودار $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم.

۱۵ ـ گزینه ۱ با فرض $f(x)=ax+b$ داریم:

$$۴f(۲x)=f(۸x-۱)-۵\Rightarrow ۴(۲ax+b)=a(۸x-۱)+b-۵$$
$$\Rightarrow ۸ax+۴b=۸ax-a+b-۵\Rightarrow a+۳b=-۵\Rightarrow a=-۳b-۵\quad (I)$$
$$f^{-۱}(۳)=۵\Rightarrow f(۵)=۳\Rightarrow ۵a+b=۳\quad (II)$$

از (I) و (II)، $a=۱$ و $b=-۲$ به‌دست می‌آید.

پس: $f(x)=x-۲\,,\;\; f^{-۱}(m)=۲\Rightarrow f(۲)=m\Rightarrow m=۲-۲=۰$

توجه کنید اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

۱۶ - گزینه ۲

$f = \{(۱, m^۳ - m), (m, ۴), (۱, ۴m^۲ - ۴), (۵, m + ۱), (۰, m^۲ + ۲)\}$

شرط تابع بودن $\Rightarrow m^۳ - m = ۴m^۲ - ۴ \Rightarrow m(m^۲ - ۱) = ۴(m^۲ - ۱)$

$\Rightarrow m(m^۲ - ۱) - ۴(m^۲ - ۱) = ۰$

$\Rightarrow (m^۲ - ۱)(m - ۴) = ۰ \Rightarrow m = \pm ۱\ ,\ m = ۴$

$m = ۱ \Rightarrow f = \{(۱, ۰), (۱, ۴), (۵, ۲), (۰, ۳)\} \Rightarrow$ تابع نیست

$m = -۱ \Rightarrow f = \{(۱, ۰), (-۱, ۴), (۵, ۰), (۰, ۳)\} \Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست

$m = ۴ \Rightarrow f = \{(۱, ۶۰), (۴, ۴), (۵, ۵), (۰, ۱۸)\} \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک است

فقط به‌ازای $m = ۴$ تابع یک‌به‌یک است.

۱۷ - گزینه ۱

$y = ۲f^{-۱}(x - ۱) + ۳ \xrightarrow{A(۳,۷)} ۷ = ۲f^{-۱}(۳ - ۱) + ۳ \Rightarrow ۲f^{-۱}(۲) = ۴ \Rightarrow f^{-۱}(۲) = ۲$

$\Rightarrow f(۲) = ۲\ ,\ y = f(x + ۱) \Rightarrow x + ۱ = ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = f(۱ + ۱) = f(۲) = ۲$

$\Rightarrow (۱, ۲) \in f(x + ۱)$

با توجه به این که تابع f معکوس‌پذیر است، پس تابع f یک‌به‌یک است. درنتیجه تابع $f(x + ۱)$ نیز یک‌به‌یک می‌باشد و به‌جز نقطهٔ $(۱, ۲)$ نقطهٔ دیگری با عرض ۲ روی این تابع قرار ندارد، بنابراین نقطهٔ $(۳, ۲)$ قطعاً روی نمودار $f(x + ۱)$ قرار ندارد.

۱۸ - گزینه ۴

$f = \{(۱, ۲), (-۳, -۱), (۳, ۴), (۴, -۳)\} \longrightarrow f(۳) = ۴$

$f^{-۱} = \{(۲, ۱), (-۱, -۳), (۴, ۳), (-۳, ۴)\} \longrightarrow f^{-۱}(-۳) = ۴$

پس: $۲f^{-۱}(-۳) + f(۳) = ۸ + ۴ = ۱۲$

۱۹ - گزینه ۴ **برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس yها را به x و x را به y تبدیل می‌کنیم.**

$y = \underbrace{x^۲ - ۶x} + ۳ \rightarrow y = (x - ۳)^۲ - ۹ + ۳ \rightarrow y = (x - ۳)^۲ - ۶ \rightarrow (x - ۳)^۲ = y + ۶$

$\rightarrow x - ۳ = \pm\sqrt{y + ۶} \xrightarrow{x < ۰} x - ۳ = -\sqrt{y + ۶} \rightarrow x = ۳ - \sqrt{y + ۶}$

$\rightarrow f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x + ۶}$

دامنهٔ تابع معکوس، برد تابع اصلی است چون طبق صورت سؤال $x < ۰$ است پس $۳ - \sqrt{y + ۶}$ نیز باید منفی باشد.

$۳ - \sqrt{y + ۶} < ۰ \rightarrow \sqrt{y + ۶} > ۳ \rightarrow y + ۶ > ۹ \rightarrow y > ۳$

پس: $f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x + ۶}\ ,\ x > ۳$

۲۰ - گزینه ۲ **وقتی $۲ < x < ۳$ باشد $-۲ < -x < -۳$ است و $[x] = ۲$ و $[-x] = -۳$ است پس $f(x) = -۳x + ۲$ است. برای محاسبهٔ $f^{-۱}(-۵)$ کافی است که $f(x)$ را مساوی -۵ قرار دهید** $\left(\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right. \in f \rightarrow \left|\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right. \in f^{-۱}\right)$:

$-۳x + ۲ = -۵ \longrightarrow -۳x = -۷ \longrightarrow x = \frac{۷}{۳} \Rightarrow f(\frac{۷}{۳}) = -۵ \longrightarrow f^{-۱}(-۵) = \frac{۷}{۳}$

اگر مقدار x بین ۲ و ۳ نمی‌شد گزینهٔ سوم یعنی ناموجود را انتخاب می‌کردیم.

۲۱ - گزینه ۴ **توجه کنید اگر $x = -۳$ باشد $g(-۳) = f(-۱)$ است.**

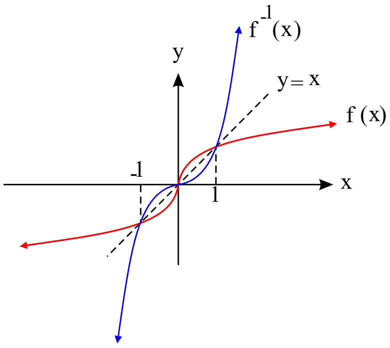
$f^{-۱}\left(g^{-۱}(f(-۱))\right) = f^{-۱}\left(g^{-۱}(g(-۳))\right) = f^{-۱}(-۳) = \frac{(-۳)^۳}{۹} + \sqrt[۳]{-۲۷}$

$= -۳ - ۳ = -۶$

توجه کنید اگر $x \in D_g$ باشد آن‌گاه $g^{-۱}(g(x)) = x$ است به همین علت $g^{-۱}(g(-۳)) = -۳$ است.

۲۲ - گزینه ۲ **ابتدا نمودار $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم و نمودار را در چهار بازهٔ زیر بررسی می‌کنیم:**

می‌دانیم که زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد.



	x=-1		x=0		x=1	
رابطه \ بازه	$(-\infty,-1)$		$(-1,0)$		$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f(x)-f^{-1}(x)$	+		-		+	-
x^2-1	+		-		-	+
$\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{x^2-1}$	+		+		-	-
		تعریف نشده			تعریف نشده	

بنابراین دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{x^2-1}}$ به‌صورت $(-\infty,0]-\{-1\}$ است.

۲۳ – گزینه ۴ اگر وارون تابع با محور طول در نقطهٔ $\begin{vmatrix}\alpha\\0\end{vmatrix}$ برخورد کند این نقطه بر روی خود تابع به صورت $\begin{vmatrix}0\\\alpha\end{vmatrix}$ است پس داریم:

$$f(0)=\alpha\to 5=\alpha$$

چون دامنهٔ f بازهٔ $[1,+\infty)$ است بنابراین $0\notin D_f$ و لذا چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

۲۴ – گزینه ۳ می‌دانیم که $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ است.

$$(fog)^{-1}(2x-4)=\frac{x}{2}\to(g^{-1}of^{-1})(2x-4)=\frac{x}{2}\to g^{-1}(f^{-1}(2x-4))=\frac{x}{2}\quad\star$$

محل برخورد نمودار وارون تابع $f(x)$ با محور yها همان $f^{-1}(0)$ است، بنابراین در رابطهٔ $\star$، x را ۲ قرار می‌دهیم تا $f^{-1}(0)$ درست شود.

$$x=2\xrightarrow{\star}g^{-1}(f^{-1}(0))=1\to g(1)=f^{-1}(0)\to 2(1)^3+1=f^{-1}(0)\to f^{-1}(0)=3$$

۲۵ – گزینه ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع وارون f را می‌یابیم.

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2}=y\Rightarrow 2x-1=xy+2y\Rightarrow x(2-y)=2y+1\Rightarrow x=\frac{2y+1}{2-y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{2-x}$$

حال تابع وارون را با خط $y=3x$ قطع می‌دهیم:

$$\frac{2x+1}{2-x}=3x\Rightarrow 2x+1=6x-3x^2\Rightarrow 3x^2-4x+1=0$$

$\Rightarrow$ مجموع ضرایب $=0\Rightarrow x=1\,,\;x=\frac{1}{3}\Rightarrow$ ۲ نقطهٔ برخورد دارند.

۲۶ – گزینه ۲ ابتدا وارون تابع $y=\frac{2x-1}{x-2}$ را می‌یابیم.

$$y=\frac{2x-1}{x-2}\Rightarrow 2x-1=xy-2y\Rightarrow 2x-xy=1-2y\Rightarrow x(2-y)=1-2y$$

$$\Rightarrow x=\frac{1-2y}{2-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1-2x}{2-x}$$

حال تابع وارون را با خط $y=-x$ قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases}f^{-1}(x)=\dfrac{1-2x}{2-x}\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow\frac{1-2x}{2-x}=-x\Rightarrow 1-2x=-2x+x^2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

$$x=1\Rightarrow y=-1\Rightarrow A(1,-1)\,,\;x=-1\Rightarrow y=1\Rightarrow B(-1,1)$$

$$AB=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

۲۷ – گزینه ۴ برد وارون تابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ همان دامنهٔ تابع g می‌باشد، پس داریم:

$$g(x)=\sqrt{f(x)}\Rightarrow f(x)\ge 0\xrightarrow{\text{باتوجه به نمودار } f}x\ge -2\Rightarrow R_{g^{-1}}=[-2,+\infty)$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ ۴ یعنی بازهٔ $(-3,-2)$ در برد تابع g^{-1} قرار ندارد.

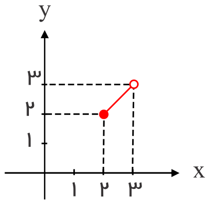
۲۸ – گزینه ۲ می‌دانیم ترکیب هر تابع معکوس‌پذیر با تابع معکوسش، تابع همانی است.

$fof^{-1}(x)=x\;,\;x\in D_{f^{-1}}$ یا $x\in R_f$

$1\le x<2\Rightarrow[x]=1\Rightarrow f(x)=x+[x]\Rightarrow f(x)=x+1$

$1\le x<2\Rightarrow 2\le x+1<3\Rightarrow 2\le f(x)<3\Rightarrow R_f=[2,3)$

$y = fof^{-1}(x) = x \ , \ x \in [2,3) \Rightarrow y = x \ , \ 2 \le x < 3 \Rightarrow$



۲۹ - گزینه ۲

$A'(a,0) \in f^{-1} \to (0,a) \in f \to f(0) = a \to (0)^3 + 0 + 2 = a \to a = 2$

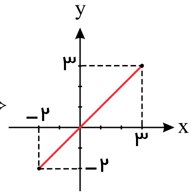
$\to A'(2,0) \xrightarrow{A \text{ قرینه } A' \text{ نسبت به خط } y=x} A(0,2)$

$\to AA' = \sqrt{(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

۳۰ - گزینه ۱ با توجه به نمودار f^{-1} داریم:

$R_{f^{-1}} = [-2,3] \Rightarrow D_f = [-2,3]$

می‌دانیم: $y = (f^{-1}of)(x) = x, x \in D_f \Rightarrow y = x, x \in [-2,3] \Rightarrow$



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۲	۱۱ - ۱	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۲
۲ - ۱	۷ - ۱	۱۲ - ۱	۱۷ - ۱	۲۲ - ۲	۲۷ - ۴
۳ - ۱	۸ - ۳	۱۳ - ۲	۱۸ - ۴	۲۳ - ۴	۲۸ - ۲
۴ - ۳	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۴	۲۴ - ۳	۲۹ - ۲
۵ - ۲	۱۰ - ۲	۱۵ - ۱	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۱