

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



علی هاشمی

نام آزمون: تابع وارون

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = 2x + |2x + 1|$  وارون‌پذیر است، ضابطه‌ی وارون آن کدام است؟

①  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}; x \geq -1$

②  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}; x \geq -\frac{1}{2}$

③  $f^{-1}(x) = 4x + 1; x \geq -1$

④  $f^{-1}(x) = 4x + 1; x \geq -\frac{1}{2}$

۲- اگر در تابع  $f(x) = \frac{mx + m - 1}{(m - 2)x + m - 3}$  داشته باشیم  $f^{-1}(x) = f(x)$ ، ضابطه‌ی وارون تابع  $g(x) = 2^x + 2m$  کدام است؟

①  $g^{-1}(x) = \log_2^{x-2}$

②  $g^{-1}(x) = \log_2^{(x-\frac{2}{2})}$

③  $g^{-1}(x) = 3 \log_2^x$

④  $g^{-1}(x) = 2^x + 2$

۳- اگر  $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$  باشد، آن‌گاه حاصل  $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$  کدام است؟

①  $x$

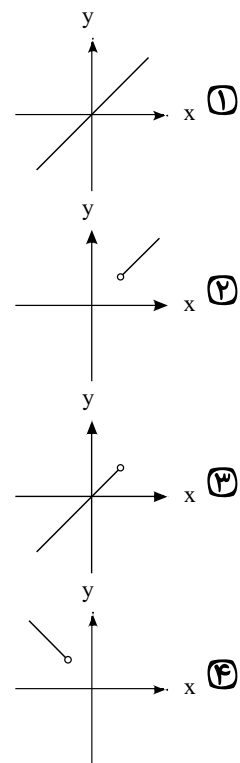
②  $10^x - 10^{-x}$

③ صفر

④  $x - 1$



۴- اگر  $f(x) = \log_4(2-x)$ ، نمودار تابع  $y = f^{-1} \circ f(x)$  کدام است؟



۵- ضابطه وارون تابع  $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ ، به کدام صورت است؟

- ۱  $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 : x \leq 2$
- ۲  $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5 : x \leq 2$
- ۳  $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 : x \geq 1$
- ۴  $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5 : x \geq 1$

۶- اگر  $g(x) = 3x - 1$  و  $f = \{(1, 2), (-1, 1), (3, 0)\}$ ، آن گاه  $f^{-1} \circ g(1)$  کدام است؟

- ۱ ۱
- ۲ ۲
- ۳ ۳
- ۴ ۴



۷- وارون تابع با ضابطه‌ی  $y = \frac{|x|}{x}(x^2 + 1)$ ,  $x \neq 0$  کدام است؟

①  $f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{x-1}$

②  $f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|-1}$

③  $f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{-x-1}$

④  $f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{x^2-1}$

۸- اگر تابع  $f(x) = (x+1)^2 + (x-2)^2$  در بازه‌ی  $(\infty, a)$  وارون پذیر باشد، بیشترین مقدار  $a$  کدام است؟

①  $-\frac{1}{4}$

②  $\frac{1}{2}$

③  $-\frac{1}{2}$

④  $-\frac{3}{4}$

۹- اگر  $f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$  باشد نمودارهای دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  در چند نقطه متقاطع اند؟

① ۱

② ۲

③ بی‌شمار

④ غیرمتقاطع

۱۰- طول نقطه‌ی تلاقی نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x+2}$  با نمودار معکوس آن روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم کدام است؟

① -۱

② ۲

③ ۲, -۱

④ فاقد نقطه‌ی تلاقی



۱۱- اگر  $f = \{(2, 5), (1, 7), (3, 4)\}$  و  $g(x) = 2x - 1$  تابع  $g \circ f^{-1}(x)$  کدام است؟

$g \circ f^{-1}(x) = \{(7, 1), (4, 5), (5, 3)\}$  ①

$g \circ f^{-1}(x) = \{(2, 3), (1, 1), (5, 3)\}$  ②

$g \circ f^{-1}(x) = \{(3, 2), (5, 4), (1, 1)\}$  ③

$g \circ f^{-1}(x) = \{(1, 7), (3, 5), (4, 5)\}$  ④

۱۲- ضابطه‌ی وارون تابع  $f(x) = \frac{3^x - 5}{3^x + 5}$  کدام است؟

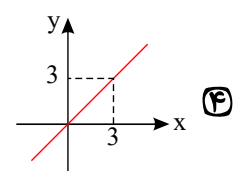
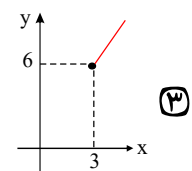
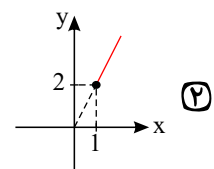
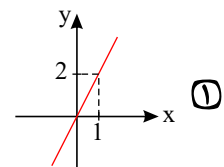
$f^{-1}(x) = \log_5 \frac{3x + 3}{1 - x}$  ①

$f^{-1}(x) = \log_3 \frac{5x - 1}{1 - x}$  ②

$f^{-1}(x) = \log_3 \frac{5x - 5}{1 + x}$  ③

$f^{-1}(x) = \log_3 \frac{5x + 5}{1 - x}$  ④

۱۳- با فرض آن که  $f(x) = 4\sqrt{x - 1} + 3$ ، نمودار تابع  $y = 2f(f^{-1}(x))$  کدام است؟





۱۴- اگر تابع  $f(x) = \frac{3x-1}{x-a}$  وارون خودش باشد،  $f(1)$  کدام است؟

- ۱) -۱
- ۲) ۱
- ۳) -۳
- ۴) ۳

۱۵- تابع معکوس تابع  $f(x) = x|x|$  کدام است؟

- ۱)  $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$
- ۲)  $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$
- ۳)  $f^{-1}(x) = -\sqrt{|x|}$
- ۴) تابع  $f$  معکوس ناپذیر است.

۱۶- با توجه به ماشین مقابل، اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  و  $g$  به یک به یک باشند و داشته باشیم  $g(m) = 2$ ، مقدار  $m$  کدام است؟

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$$

- ۱) ۲
- ۲) ۲٫۵
- ۳) ۱٫۵
- ۴) ۱

۱۷- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^3 + ax + 2a$  مفروض است. اگر عرض از مبدأ نمودار تابع  $f^{-1}$  برابر  $(-1)$  باشد،  $a$  کدام است؟

- ۱) ۲
- ۲) ۱
- ۳)  $\frac{1}{2}$
- ۴)  $\frac{1}{3}$



۱۸- اگر  $f = \{(-1, 0), (1, 2), (0, 1), (2, -1)\}$  باشد، آن گاه  $f + f^{-1}$  شامل کدام زوج مرتب نیست؟

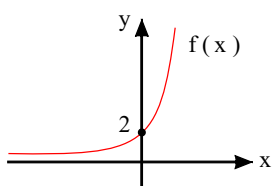
- ①  $(1, 2)$
- ②  $(-1, 1)$
- ③  $(0, 0)$
- ④  $(2, 0)$

۱۹- اگر  $f(x) = x + 2$ ،  $g(x) = 2x^2 - 8x + 1$  باشند، آن گاه حاصل جمع ریشه‌های معادله‌ی  $g \circ f^{-1}(x) = 0$  کدام است؟

- ①  $\frac{-25}{2}$
- ②  $\frac{25}{2}$
- ③  $8$
- ④  $-8$

۲۰- کدام یک از توابع زیر وارون پذیر است؟

- ①  $f(x) = x^2 - 8x - 1$
- ②  $g(x) = |x^x|$
- ③  $h(x) = \frac{3x - 6}{2 - x}$
- ④  $p(x) = x^2 + \sqrt{x}$



۲۱- شکل مقابل، نمودار تابع  $y = f(x)$  است. دامنه‌ی تابع  $y = \sqrt{f^{-1}(x)}$  کدام است؟

- ①  $x > 0$
- ②  $x \geq 2$
- ③  $0 < x \leq 2$
- ④  $\mathbb{R}$



۲۲- به ازای کدام مقادیر  $m$  نمودار تابع معکوس  $f(x) = \frac{x-4}{2x-1}$  از نقطه‌ی  $(m+2, m)$  می‌گذرد؟

- ① هیچ مقدار  
 ② ۱ و ۲  
 ③ ۲ و -۱  
 ④ ۱ و -۲

۲۳- تابع معکوس تابع  $f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$  کدام است؟

- ①  $f^{-1}(x) = 2x - x^2, x \leq 1$   
 ②  $f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2, x \leq 1$   
 ③  $f^{-1}(x) = 2x - x^2, x \geq 1$   
 ④  $f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2, x \geq 1$

۲۴- دو تابع  $f = \{(2, a+1), (3, 7)\}$  و  $g = \{(2a-1, -1), (6, 2)\}$  مفروضند. اگر  $(-1, 2) \in (gof)^{-1}$ ، مقدار  $a$  کدام است؟

- ① ۲  
 ② ۱  
 ③ -۱  
 ④ -۵

۲۵- اگر  $f(x) = \sqrt{x+2}$  و  $g(x) = \frac{x^3+1}{2-x^3}$  باشد ضابطه‌ی تابع  $(gof)^{-1}$  کدام است؟

- ①  $(gof)^{-1}(x) = \frac{3}{1-x}$   
 ②  $(gof)^{-1}(x) = \frac{-3}{1+x}$   
 ③  $(gof)^{-1}(x) = \frac{x+3}{x}$   
 ④  $(gof)^{-1}(x) = \frac{x-3}{x}$





۲۶- به ازای کدام مقدار  $m$  تابع  $y = \frac{mx + 2}{x + 2}$  با وارون خود برابر است؟

- ۱ ①
- ۲ ②
- ۱ ③
- ۲ ④

۲۷- ضابطه‌ی وارون تابع  $y = \frac{x}{1+x}$  کدام است؟

- $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x}$  ①
- $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x}$  ②
- $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$  ③
- $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$  ④

۲۸- ضابطه‌ی وارون تابع  $y = 2x - x^2$  برای  $x < 1$  چگونه است؟

- $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}$  ①
- $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}$  ②
- $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}$  ③
- $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$  ④

۲۹- اگر  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$  و  $g(x) = 2 - x$  باشد، ضابطه‌ی وارون تابع  $fog$  کدام است؟

- $f^{-1}(x) = (x-1)^2 - 2, x \leq 1$  ①
- $f^{-1}(x) = 2 - (x-1)^2, x \geq 1$  ②
- $f^{-1}(x) = (x-1)^2 - 2, x \geq 1$  ③
- $f^{-1}(x) = 2 - (x-1)^2, x \leq 1$  ④



۳۰- اگر تابع خطی  $f$ ، از نقاط  $(1, 4)$  و  $(2, 7)$  بگذرد، معادله‌ی وارون این تابع کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{①}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{5} \quad \text{②}$$

$$f^{-1}(x) = 3x-1 \quad \text{③}$$

$$f^{-1}(x) = 3x+1 \quad \text{④}$$



## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x \geq -\frac{1}{2} : y = 2x + 2x + 1 \rightarrow y = 4x + 1$$

$$x < -\frac{1}{2} : y = 2x - 2x - 1 \rightarrow y = -1 \text{ تابع ثابت است که یک به یک نمی‌باشد.}$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن وارون‌پذیر است  $x \geq -\frac{1}{2}$  است. برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون،  $x$  را بر حسب  $y$  بدست می‌آوریم و سپس  $y$  را به  $x$  و  $x$  را به  $y$  تبدیل می‌کنیم.

$$y = 4x + 1 \rightarrow 4x = y - 1 \rightarrow x = \frac{y - 1}{4} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{4}$$

توجه کنید که دامنه‌ی تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$x \geq -\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 4} 4x \geq -2 \rightarrow 4x + 1 \geq -1 \rightarrow y \geq -1 \rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

۲ - گزینه ۱ در تابع  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  اگر  $a + d = 0$  باشد در این صورت  $f(x) = f^{-1}(x)$  است.

$$\text{پس: } m + m - 3 = 0 \rightarrow 2m - 3 = 0 \rightarrow m = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = 2^x + 3$$

برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع کافی است که  $x$  را بر حسب  $y$  بدست آوریم و سپس  $y$ ها را به  $x$  و  $x$  را به  $y$  تبدیل کنیم.

$$y = 2^x + 3 \rightarrow 2^x = y - 3 \xrightarrow{\log_b^a = k \rightarrow a = b^k} \log_2^{y-3} = x \rightarrow g^{-1}(x) = \log_2^{x-3}$$

۳ - گزینه ۳ می‌دانیم:  $\log_b^a = k \rightarrow a = b^k$

برای بدست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، ابتدا  $x$  را بر حسب  $y$  بدست می‌آوریم و سپس جای  $x$  و  $y$  را با هم عوض می‌کنیم:

$$y = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) \rightarrow 10^y = \sqrt{x^2 + 1} + x \rightarrow 10^{2y} - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (10^y - x)^2 = (\sqrt{x^2 + 1})^2 \rightarrow 10^{2y} + x^2 - 2x \times 10^y = x^2 + 1 \rightarrow 10^{2y} - 1 = 2x \times 10^y$$

$$\rightarrow x = \frac{10^{2y} - 1}{2 \times 10^y} = \frac{10^{2y}}{2 \times 10^y} - \frac{1}{2 \times 10^y} \rightarrow x = \frac{10^y}{2} - \frac{10^{-y}}{2}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{2}, f^{-1}(-x) = \frac{10^{-x} - 10^x}{2}$$

پس  $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = 0$  است.

۴ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$f \circ f^{-1}(x) = x, D_{f \circ f^{-1}(x)} = D_{f^{-1}(x)}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x, D_{f^{-1} \circ f(x)} = D_f$$

$$f(x) = \log_2^{2-x} \rightarrow D_f : 2 - x > 0 \rightarrow x < 2$$

$$y = f^{-1} \circ f(x) = x \rightarrow D_{f^{-1} \circ f(x)} = D_f = x < 2$$

بنابراین کافی است خط به معادله‌ی  $y = x$  (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را با شرط  $x < 2$  رسم کنیم که گزینه‌ی ۳ نشانگر این شکل است.

۵ - گزینه ۱

ابتدا  $x$  را بر حسب  $y$  بدست می‌آوریم و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (2-y)^2 \Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$$

چون  $\sqrt{x-1}$  مثبت است، پس  $-\sqrt{x-1}$  منفی بوده و  $y = 2 - \sqrt{x-1}$  همواره کوچک‌تر مساوی ۲ می‌شود، بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس  $x \leq 2$  است.

۶ - گزینه ۱

$$f^{-1} \circ g(1) = f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(3(1) - 1) = f^{-1}(2) \xrightarrow{(1,2) \in f} f^{-1}(2) = 1$$

وقتی  $(a, b) \in f$  است، یعنی  $f(a) = b$  یا  $f^{-1}(b) = a$

۷ - گزینه ۲

$$y = \frac{|x|}{x}(x^2 + 1) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ -x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$$



$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2 \xrightarrow{x > 0} \begin{cases} x = \sqrt{y-1} & \text{دارون} \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad \begin{cases} x > 1 \end{cases}$$

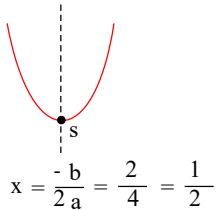
$$y = -x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = -y - 1 \xrightarrow{x < 0} \begin{cases} x = -\sqrt{-y-1} & \text{دارون} \\ y < -1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{-x-1} \quad \begin{cases} x < -1 \end{cases}$$

از ترکیب این دو ضابطه‌ی معکوس به جواب  $f^{-1}(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x| - 1}$  می‌رسیم.

۸ - گزینه ۲

ضابطه‌ی تابع  $f$  به صورت  $f(x) = 2x^2 - 2x + 5$  است (که تابعی یک به یک نیست)، واضح است که با توجه به شکل این تابع (سهمی رو به بالا) حداکثر

مقدار  $a$  می‌تواند طول رأس سهمی یعنی  $\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$  باشد. (تابع درجه‌ی دوم در  $x \geq \frac{-b}{2a}$  یا  $x \leq \frac{-b}{2a}$  یک به یک است و وارون پذیر می‌باشد.)



۹ - گزینه ۳ روش اول:

ضابطه‌ی تابع  $f^{-1}$  را تعیین می‌کنیم اگر  $y = \frac{2x+5}{x-2}$  باشد در این صورت داریم:

$$xy - 2y = 2x + 5 \Rightarrow xy - 2x = 2y + 5 \Rightarrow x(y - 2) = 2y + 5 \Rightarrow x = \frac{2y + 5}{y - 2}$$

پس  $f^{-1}(x) = \frac{2x + 5}{x - 2}$  یعنی معکوس تابع، برابر خود تابع است و بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارند.

روش دوم:

در تابع همگرافیک  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  اگر  $a+d=0$  باشد آن‌گاه تابع  $f$  وارون خودش است و چون در تابع همگرافیک داده شده‌ی سؤال  $a+d=0$  است پس تابع  $f(x)$  و  $f^{-1}(x)$  برهم منطبق هستند و بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارند.

۱۰ - گزینه ۲ کافی است که تابع  $y = f(x)$  را با خط  $y = x$  قطع دهیم.

$$x = \sqrt{x+2} \Rightarrow x^2 = x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{ق ق} \\ x = -1 & \text{غ ق} \end{cases}$$

جواب منفی مورد قبول نیست. زیرا در معادله‌ی  $(x = \sqrt{x+2})$  صدق نمی‌کند.

۱۱ - گزینه ۱

$$f^{-1}(x) = \{(5, 2), (7, 1), (4, 3)\}, \quad g(x) = 2x - 1$$

$$g \circ f^{-1}(5) = g(f^{-1}(5)) = g(2) = 2(2) - 1 = 3$$

$$g(f^{-1}(7)) = g(1) = 2(1) - 1 = 1$$

$$g(f^{-1}(4)) = g(3) = 2(3) - 1 = 5$$

پس:  $g \circ f^{-1}(x) = \{(5, 3), (7, 1), (4, 5)\}$

۱۲ - گزینه ۴ برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع، ابتدا  $x$  را پیدا می‌کنیم و سپس  $x$  را به  $y$  و  $y$  را به  $x$  تبدیل می‌کنیم.

$$y = \frac{3^x - 5}{3^x + 5} \Rightarrow 3^x y + 5y = 3^x - 5 \Rightarrow 3^x - 3^x y = 5y + 5$$

$$\rightarrow 3^x(1 - y) = 5y + 5 \rightarrow 3^x = \frac{5y + 5}{1 - y} \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} x = \log_3 \frac{5y + 5}{1 - y} \rightarrow f^{-1}(x) = \log_3 \frac{5x + 5}{1 - x}$$

۱۳ - گزینه ۳

$f^{-1} \circ f(x) = x, \quad D_{f^{-1} \circ f} = D_f = R_{f^{-1}}$ $f \circ f^{-1}(x) = x, \quad D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$	می‌دانیم:
--	-----------

حال دامنه و برد تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 4\sqrt{x-1} + 3 \rightarrow D_f: x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow x \in [1, +\infty)$$

$$f(x) = 4\sqrt{x-1} + 3 \rightarrow f(x) - 3 = 4\sqrt{x-1} \rightarrow f(x) - 3 \geq 0 \rightarrow y \geq 3 \rightarrow y \in [3, +\infty)$$

نامنفی

$$y = 2f(f^{-1}(x)) \rightarrow y = 2x$$

پس باید خط  $y = 2x$  را با شرط  $(R_f)x \geq 3$  رسم کنیم که جواب گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

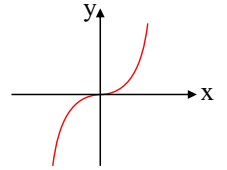


۱۴ - گزینه ۱ در تابع هموگرافیک  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  اگر  $a+d=0$  باشد آن گاه تابع  $f$ ، وارون خود است. به عبارت دیگر  $f^{-1}(x) = f(x)$ . در نتیجه در این جا باید:

$$3 + (-a) + 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3x-1}{x-3} \Rightarrow f(1) = \frac{2}{-2} = -1$$

۱۵ - گزینه ۲ از روی شکل تابع واضح است که این تابع یک به یک است بنابراین معکوس پذیر است:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y} \xrightarrow{y \geq 0} y \geq 0 \\ y = -x^2 \Rightarrow x^2 = -y \Rightarrow x = \pm\sqrt{-y} \xrightarrow{x < 0} x = -\sqrt{-y} \xrightarrow{y < 0} y < 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases} \text{ پس:}$$

۱۶ - ماشین فوق، رابطه‌ی بین  $f, g$  را به صورت  $g(f(x)) = x$  بیان می‌کند. به عبارتی، با توجه به یک به یک بودن  $f, g$ ، توابع  $f, g$  وارون یکدیگرند، یعنی برای توابع  $f, g$  (که مسلماً یک به یک هستند) طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} g(m) = 2 \\ g(f(2)) = 2 \end{cases} \Rightarrow m = f(2) = \frac{2 \times 2 - 1}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

۱۷ - گزینه ۲ عرض از مبدأ تابع  $f^{-1}$  برابر  $(-1)$  است. یعنی  $(0, -1) \in f^{-1}$  و در نتیجه  $(-1, 0) \in f$ ، پس با توجه به ضابطه‌ی  $f$  داریم:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

۱۸ - گزینه ۲ برای به دست آوردن  $f^{-1}$  باید جای زوج‌های مرتب  $f$  را عوض کنیم:

$$f = \{(-1, 0), (1, 2), (0, 1), (2, -1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(0, -1), (2, 1), (1, 0), (-1, 2)\}$$

$$f + f^{-1} = \{(-1, 0 + 2), (2, 1 + (-1)), (1, 0 + 2), (0, -1 + 1)\} = \{(-1, 2), (2, 0), (1, 2), (0, 0)\}$$

۱۹ - گزینه ۳

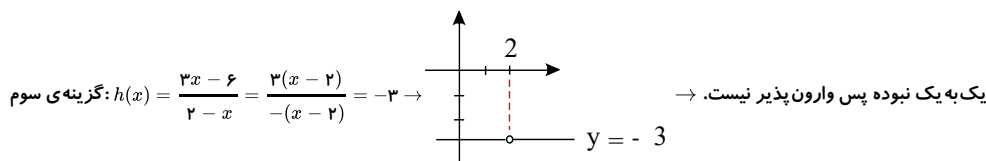
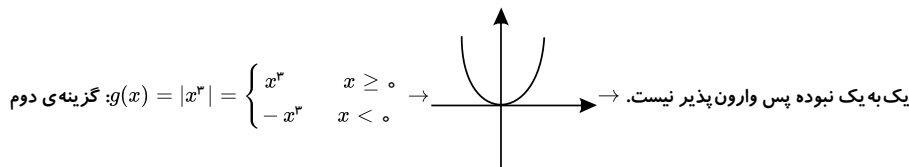
$$f(x) = x + 2 = y \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$$

$$g(f^{-1}(x)) = 0 \Rightarrow g(x - 2) = 0 \Rightarrow 2(x - 2)^2 - 8(x - 2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 4x + 4) - 8x + 16 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 25 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 8$$

۲۰ - گزینه ۴ تابعی وارون پذیر است که یک به یک باشد.

گزینه‌ی اول: تابع درجه دوم، یک به یک نمی‌باشد. بنابراین وارون پذیر نیست.

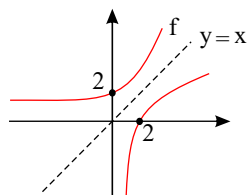


گزینه‌ی چهارم: توابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی، یک به یک هستند.

$$p(x) = x^2 + \sqrt{x} \rightarrow p'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x > 0} p'(x) > 0$$

۲۱ - گزینه ۲

می‌دانیم نمودارهای دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم (خط  $y = x$ ) قرینه‌ی یکدیگرند.



$$y = \sqrt{f^{-1}(x)} \rightarrow \text{دامنه: } f^{-1}(x) \geq 0$$

قسمت‌هایی از  $f^{-1}$  را باید بیابیم که دارای  $y$ های بزرگ‌تر مساوی صفر باشند یعنی  $x \geq 2$  جواب است.



۲۲ - گزینه ۱ چون نمودار تابع معکوس از نقطه  $\left(\frac{m}{m+2}, m+2\right)$  می گذرد بنابراین خود تابع از نقطه  $\left(m, \frac{m}{m+2}\right)$  عبور می کند.

$$\left( \begin{array}{l} a \in f \rightarrow \\ b \in f^{-1} \end{array} \right)$$

$$\frac{m}{m+2} \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} m+2 = \frac{m-4}{2m-1} \rightarrow 2m^2 - m + 4m - 2 = m - 4 \rightarrow 2m^2 + 3m + 2 = 0 \rightarrow m^2 + m + 1 = 0$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.  $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0 \rightarrow$

۲۳ - گزینه ۳

برای به دست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع،  $x$  را بر حسب  $y$  به دست می آوریم و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می کنیم.

$$y = 1 + \sqrt{1-x} \rightarrow \sqrt{1-x} = y-1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1-x = (y-1)^2$$

$$\rightarrow x = 1 - (y-1)^2 \rightarrow f^{-1}(x) = 1 - (x-1)^2 = 1 - x^2 - 1 + 2x \rightarrow f^{-1}(x) = 2x - x^2$$

می دانیم  $D_{f^{-1}} = R_f$  پس کافی است برد (حدود  $y$ ) تابع  $f$  را به دست آوریم.

$$y = 1 + \sqrt{1-x} \rightarrow \sqrt{1-x} = y-1 \rightarrow y-1 \geq 0 \rightarrow y \geq 1 \rightarrow D_{f^{-1}} = x \geq 1$$

بزرگتر مساوی صفر

۲۴ - گزینه ۱

$$(-1, 2) \in (gof)^{-1} \Rightarrow (2, -1) \in gof$$

$$gof(2) = -1 \Rightarrow g(f(2)) = -1 \Rightarrow g(a+1) = -1 (*)$$

$$g(2a-1) = -1 \xrightarrow{(*)} a+1 = 2a-1 \Rightarrow a = 2$$

۲۵ - گزینه ۲ ابتدا  $gof$  را تشکیل می دهیم سپس ضابطه‌ی معکوس آن را به دست می آوریم.

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{x+2+1}{2-(x+2)} = \frac{x+3}{-x}$$

اکنون  $x$  را بر حسب  $y$  به دست می آوریم و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می کنیم.

$$y = \frac{x+3}{-x} \rightarrow -xy = x+3 \rightarrow x+xy = -3 \rightarrow x(1+y) = -3$$

$$\rightarrow x = \frac{-3}{1+y} \rightarrow (gof)^{-1}(x) = \frac{-3}{1+x}$$

۲۶ - گزینه ۴ روش اول:

برای محاسبه‌ی وارون یک تابع، ابتدا  $x$  را بر حسب  $y$  به دست می آوریم، سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می کنیم.

وارون تابع را به دست آورده و با خودش مساوی قرار می دهیم:

$$f(x) = y = \frac{mx+2}{x+2} \Rightarrow xy + 2y = mx + 2 \Rightarrow mx - yx = 2y - 2$$

$$\Rightarrow (m-y)x = 2y-2 \Rightarrow x = \frac{2y-2}{-y+m} \Rightarrow f^{-1}(x) = y = \frac{2x-2}{-x+m}$$

طبق فرض  $f(x) = f^{-1}(x)$ ، بنابراین:

$$\frac{mx+2}{x+2} = \frac{2x-2}{-x+m} = \frac{-2x+2}{x-m} \Rightarrow m = -2$$

روش دوم:

تابع هموگرافیک،  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  در حالت  $a+d=0$ ، برابر وارون خودش است.

پس  $m+2=0$  و در نتیجه  $m=-2$  است.

۲۷ - گزینه ۳ ابتدا  $x$  را بر حسب  $y$  به دست می آوریم، سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می کنیم:

$$y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y+yx = x \Rightarrow y = x - xy = x(1-y) \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

۲۸ - گزینه ۱ برای به دست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، ابتدا  $x$  را بر حسب  $y$  به دست می آوریم، سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می کنیم.

$$y = 2x - x^2 \Rightarrow y-1 = 2x - x^2 - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-y$$

$$\rightarrow |x-1| = \sqrt{1-y} \xrightarrow{x < 1} 1-x = \sqrt{1-y} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{1-y}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}$$

۲۹ - گزینه ۴

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 1 - \sqrt{2-x}$$

اکنون  $x$  را بر حسب  $y$  به دست می آوریم و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می کنیم.



$$y = 1 - \sqrt{2-x} \rightarrow \sqrt{2-x} = 1 - y \xrightarrow{y \leq 1} 2 - x = (1 - y)^2 \rightarrow x = 2 - (1 - y)^2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 2 - (1 - x)^2, \quad x \leq 1$$

۳۰ - گزینه ۱ طبق خواص تابع وارون، وارون تابع  $f$  از نقاط  $A(4, 1)$  و  $B(7, 2)$  می‌گذرد، پس برای تعیین ضابطه‌ی  $f^{-1}$  کافی است، معادله‌ی خطی را بنویسیم که از نقاط  $A(4, 1)$  و  $B(7, 2)$  بگذرد:

$$AB: \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{y - 1}{x - 4} = \frac{2 - 1}{7 - 4} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3y - 3 = x - 4 \Rightarrow 3y = x - 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{x - 1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}$$

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۲ - ۱

۳ - ۳

۴ - ۳

۵ - ۱

۶ - ۱

۷ - ۲

۸ - ۲

۹ - ۳

۱۰ - ۲

۱۱ - ۱

۱۲ - ۴

۱۳ - ۳

۱۴ - ۱

۱۵ - ۲

۱۶ - ۴

۱۷ - ۲

۱۸ - ۲

۱۹ - ۳

۲۰ - ۴

۲۱ - ۲

۲۲ - ۱

۲۳ - ۳

۲۴ - ۱

۲۵ - ۲

۲۶ - ۴

۲۷ - ۳

۲۸ - ۱

۲۹ - ۴

۳۰ - ۱