نام آزمون: تابع وارون

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر $f(x) = f^{-1}(۵) + x - ۳$ باشد، آن‌گاه $f(۵)$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

۲ - تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\,|x-۲|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه، کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = ۱ - \sqrt{۱+x}\ ;\ \ x < ۰$

۲) $f^{-1}(x) = ۱ - \sqrt{۱-x};\ x < ۱$

۳) $f^{-1}(x) = ۱ + \sqrt{۱-x}\ ;\ ۰ < x < ۱$

۴) $f^{-1}(x) = ۱ - \sqrt{۱-x}\ ;\ ۰ < x < ۱$

۳ - تابع $f(x) = |۲x-۱| - ۲|x+۳|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = -\frac{۱}{۲}(x+۲)\ ;\ |x| \leq ۳$

۲) $f^{-1}(x) = -\frac{۱}{۴}(x+۵)\ ;\ |x| \leq ۷$

۳) $f^{-1}(x) = -\frac{۱}{۴}(x+۵)\ ;\ |x| \leq ۴$

۴) $f^{-1}(x) = -\frac{۱}{۲}(x+۲)\ ;\ |x| \leq ۵$

۴ - نمودار معکوس تابع $f(x) = |x-۲| + ۳x$ و نمودار خود تابع فقط در نقطه‌ی A متقاطع‌اند، فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبداء مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۳}$

۵- اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{۲x}$ حاصل $g^{-۱}(۶)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۶- برد تابع $f(x) = ۲^{x+۱}$ را به بازه‌ی $(a,b]$ محدود کرده‌ایم که برای تابع $g(x) = \sqrt{۶ - ۲x}$ ترکیب $gof^{-۱}$ قابل انجام باشد. حداکثر مقدار $(b-a)$ کدام است؟

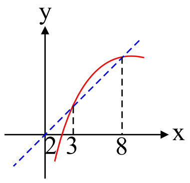
(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۶

۷- شکل روبه‌رو، مربوط به نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x - f^{-۱}(x)}$، کدام است؟



(۱) $(۰, ۲]$

(۲) $[۲, ۳]$

(۳) $[۲, ۸]$

(۴) $[۳, ۸]$

۸- بزرگ‌ترین فاصله‌ای که تابع $f(x) = |x-۱| - |x+۳|$ معکوس‌پذیر است کدام است؟

(۱) $[-۴ , ۴]$

(۲) $[-۳ , ۱]$

(۳) $[-۱ , ۱]$

(۴) $\varnothing$

۹ – ضابطهٔ وارون تابع $y = \dfrac{x}{۱ + |x|}$ کدام است؟

① $f^{-۱}(x) = \dfrac{x}{۱ - |x|}\ ;\ |x| < ۱$

② $f^{-۱}(x) = \dfrac{۱ - |x|}{|x|}\ ;\ |x| > ۱$

③ $f^{-۱}(x) = \dfrac{x}{|x| - ۱}\ ;\ |x| > ۱$

④ $f^{-۱}(x) = \dfrac{|x| - ۱}{x}\ ;\ |x| < ۱$

۱۰ – اگر $f(x) = x^{۲} + x$ و $g(x) = \dfrac{۵x + ۲}{۲x - ۱}$، آن گاه حاصل $(fog^{-۱})(۴)$ کدام است؟

① ۶

② ۲۰

③ ۲

④ ۱۲

۱۱ – اگر $f = \{ (۱\ ,۲)\ , (۲\ ,۵)\ , (۰\ ,۳)\ , (۴\ , -۱) \}$ و $g = \{ (۲\ ,۳)\ , (-۱\ ,۴)\ , (۴\ ,۱)\ , (۳\ ,۰) \}$ تابع $gof^{-۱}$ کدام است؟

① $gof^{-۱}(x) = \{ (۰,۰), (۱,۳) \}$

② $gof^{-۱}(x) = \{ (۲,۴), (۳,۵) \}$

③ $gof^{-۱}(x) = \{ (۲,۰), (-۱,۴) \}$

④ $gof^{-۱}(x) = \{ (۵,۳), (-۱,۱) \}$

۱۲ – اگر $f(x) = ۲x + |x|$ باشد، معادله‌ی $f^{-۱}(x) + ۳x = ۰$ چند جواب دارد؟

① صفر

② یک

③ دو

④ بی شمار

۱۳ - دو تابع $f = \{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x) = \dfrac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a)) = ۶$ باشد، a کدام است؟

① $\dfrac{۱}{۲}$

② $\dfrac{۳}{۴}$

③ $\dfrac{۳}{۲}$

④ $\dfrac{۵}{۲}$

۱۴ - اگر $f(x) = \sqrt{۱-x}$، آن‌گاه دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{۱ + f^{-۱}of(x)}$ کدام است؟

① $[۰,۱]$

② $[-۱,۱]$

③ $(-\infty,-۱]$

④ $(-\infty,۱]$

۱۵ - تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x - |x-۲| + ۱$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی معکوس آن در بازه‌ی مذکور کدام است؟

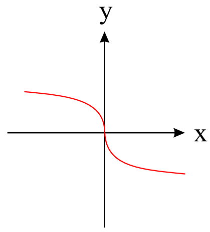
① $f^{-۱}(x) = \dfrac{x-۱}{۲}; x \leq ۲$

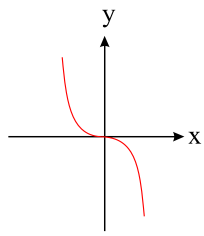
② $f^{-۱}(x) = \dfrac{x+۱}{۲}; x \leq ۲$

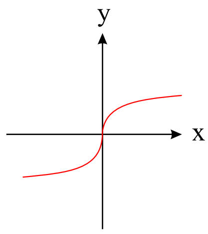
③ $f^{-۱}(x) = \dfrac{x-۱}{۲}; x \leq ۳$

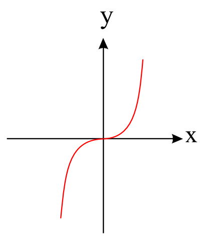
④ $f^{-۱}(x) = \dfrac{x+۱}{۲}; x \leq ۳$

۱۶- اگر $f(x)=x\,|x|$ باشد، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ کدام است؟

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


۱۷- قرینهٔ خط $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

۱۸ - نمودارهای $f(x)=(\frac{1}{2})^{ax-1}$ و $g(x)=32^{x-1}$ در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ متقاطع‌اند. در این صورت نمودار $f^{-1}(x)$، خط $x=\frac{1}{16}$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{7}{5}$

۲) 1

۳) $\frac{14}{25}$

۴) $\frac{43}{7}$

۱۹ - اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{2}{x^5+3}$ برابر $[-1,1]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=f^{-1}(x-1)$ کدام است؟

۱) $[\frac{1}{2},1]$

۲) $[0,\frac{1}{2}]$

۳) $[\frac{3}{2},2]$

۴) $[-1,-\frac{1}{2}]$

۲۰ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2}{|x|}(x-1)$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}\le x<0$ و $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

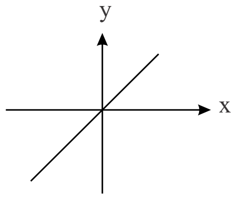
۲) $-\frac{1}{4}\le x<0$ و $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

۳) $-\frac{1}{4}\le x<1$ و $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

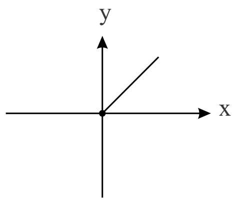
۴) $-\frac{1}{4}\le x<1$ و $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

۲۱- اگر $f(x) = \sqrt{x+۲} - ۳$، نمودار $(fof^{-۱})(x)$ درکدام گزینه آمده است؟

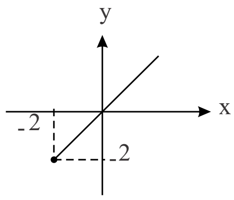
(۱)



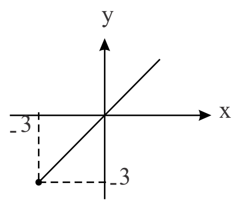
(۲)



(۳)



(۴)



۲۲- تابع $f(x) = x^۲ - ۴x$ با دامنه‌ی $[۳, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع معکوس تابع f از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟

(۱) فقط اول

(۲) اول و دوم

(۳) فقط چهارم

(۴) اول و چهارم

۲۳- اگر $f(۴x) = ۳ + ۲g\left(\frac{۲}{x}\right)$ و $g^{-۱}(۱) = ۴$ مقدار $f^{-۱}(۵)$ چقدر است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۴- اگر $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-2x}$ و $g(x)=6x^2-x-2$، آن‌گاه حاصل $(gof^{-1})(-3)$ کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) $-\dfrac{23}{7}$

(۳) ۱۳

(۴) $-\dfrac{23}{49}$

۲۵- اگر $f^{-1}(2x)=x+\sqrt{x+1}$ و $g(x)=f(3x-4)$ حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲) ۵

(۳) ۱۱

(۴) $\dfrac{11}{3}$

۲۶- نمودار تابع $f(x)=-x^3+ax+b$ در نقطه‌ی $(-1,\dfrac{1}{3})$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) $-\dfrac{1}{9}$

(۲) $-\dfrac{10}{9}$

(۳) $-\dfrac{2}{3}$

(۴) $-\dfrac{13}{9}$

۲۷- اگر داشته باشیم $f^{-1}(x)=8x^3+4x$, $g(x)=2f(\dfrac{x}{3})$, $g^{-1}(x)=ax^3+bx$، آنگاه $a+b$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۸

۲۸- اگر $f(x)=-۲+\dfrac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{x+۳}{x+۲}$ باشند ضابطه تابع $f^{-۱}og^{-۱}$ کدام است؟

① x

② $\dfrac{x}{x-۱}$

③ $\dfrac{x-۱}{۲}$

④ $\dfrac{x+۱}{۲}$

۲۹- ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;\ x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ;\ x<۰\end{cases}$، کدام است؟

① $f^{-۱}(x)=-x^{۲}$

② $f^{-۱}(x)=x^{۲}$

③ $f^{-۱}(x)=x\,|x|$

④ $f^{-۱}(x)=-x\,|x|$

۳۰- ضابطهٔ معکوس تابع $f(x)=x^{۲}+۶x-۱$ با فرض $(x\leq -۴)$ کدام است؟

① $f^{-۱}(x)=-۳-\sqrt{x+۱۰}\,;\ x\geq -۹$

② $f^{-۱}(x)=-۳+\sqrt{x+۱۰}\,;\ x\geq -۱۰$

③ $f^{-۱}(x)=-۳-\sqrt{x+۱۰}\,;\ x\geq -۱۰$

④ $f^{-۱}(x)=-۳+\sqrt{x+۱۰}\,;\ x\geq -۹$

پاسخنامه تشریحی

۱ – گزینه ۳ واضح است که $(۵, f^{-۱}(۵)) \in f^{-۱}$ است، پس $(f^{-۱}(۵), ۵) \in f$ خواهد بود. یعنی نقطه‌ی $(f^{-۱}(۵), ۵)$ در ضابطه‌ی f صدق می‌کند. به جای $f(x)$ عدد ۵ و به جای x مقدار $f^{-۱}(۵)$ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = f^{-۱}(۵) + x - ۳ \Rightarrow ۵ = f^{-۱}(۵) + f^{-۱}(۵) - ۳ \Rightarrow f^{-۱}(۵) = ۴$$

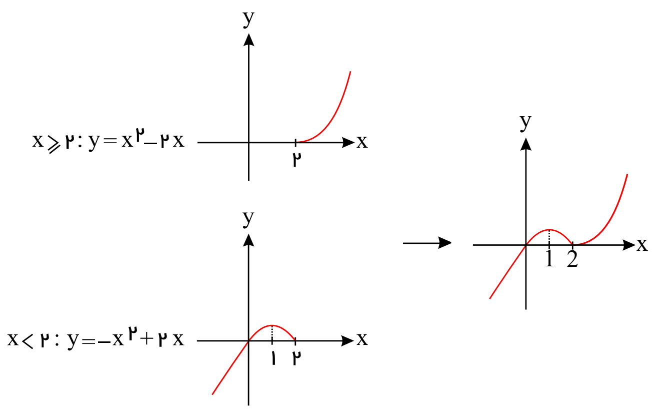
حال ضابطه‌ی تابع f را دوباره می‌نویسیم و $f(۵)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = ۴ + x - ۳ \Rightarrow f(x) = x + ۱ \Rightarrow f(۵) = ۵ + ۱ = ۶$$

۲ – گزینه ۳ ابتدا ضابطه f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \geq ۲ \\ -x^۲ + ۲x & x < ۲ \end{cases}$$

و نمودار آن نیز مطابق شکل زیر است:



پس تابع در $(۱, ۲)$ نزولی است. حال ضابطهٔ معکوس را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = -x^۲ + ۲x - (x-۱)^۲ + ۱ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۱ - y}$$

برد $f^{-۱}$ باید بازهٔ $(۱, ۲)$ باشد، پس علامت $+$ را قبول می‌کنیم:

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{۱ - x}$$

روش دوم:

متوجه شدیم که تابع، $y = -x^۲ + ۲x \ (۱ < x < ۲)$ است. یک عدد دلخواه مثلاً $x = \frac{۳}{۲}$ در تابع قرار می‌دهیم.

$x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۴} : \left| \begin{matrix} \frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۴} \end{matrix} \right. \in f \Rightarrow \left| \begin{matrix} \frac{۳}{۴} \\ \frac{۳}{۲} \end{matrix} \right. \in f^{-۱} \rightarrow$ فقط در گزینهٔ سوم صدق می‌کند.

۳ – گزینه ۲ تابع $f(x) = |۲x - ۱| - |۲x + ۶|$ را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۱ + ۲x + ۶ & x < -۳ \\ -۲x + ۱ - ۲x - ۶ & -۳ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \\ ۲x - ۱ - ۲x - ۶ & x > \frac{۱}{۲} \end{cases} = \begin{cases} ۷ & x < -۳ \\ -۴x - ۵ & -۳ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \\ -۷ & x > \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -۴x - ۵$ در بازه $\left[-۳, \frac{۱}{۲}\right]$ معکوس‌پذیر است.

$$y = -۴x - ۵ \rightarrow ۴x = -y - ۵ \rightarrow x = -\frac{y}{۴} - \frac{۵}{۴} \rightarrow f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۴}(x + ۵)$$

دقت کنید که دامنه‌ی $f^{-۱}$ برابر برد تابع f است. پس کافی است برد تابع $y = -۴x - ۵$ را در بازه‌ی $\left[-۳, \frac{۱}{۲}\right]$ بدست آوریم.

$$-۳ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times(-۴)} ۱۲ \geq -۴x \geq -۲ \xrightarrow{\text{با } (-۵) \text{ جمع می‌کنیم}} ۷ \geq -۴x - ۵ \geq -۷$$

$$\rightarrow -۷ \leq y \leq ۷ \rightarrow |y| \leq ۷ \rightarrow D_{f^{-۱}} = |x| \leq ۷$$

۴ – گزینه ۲ چون نمودار تابع و معکوسش فقط یک‌جا همدیگر را قطع می‌کنند آن‌جا حتماً روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است پس کافی است معادله‌ی $f(x) = x$ را حل کنیم.

$$f(x)=x\to |x-2|+3x=x\to |x-2|=-2x \xrightarrow{\text{چون جواب قدر مطلق نا منفی است پس } x<0 \text{ است}} -x+2=-2x$$

$$\Rightarrow x=-2 \xrightarrow{\text{تابع}} y=-2\to A\Big|_{-2}^{-2}$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی $A\Big|_{-2}^{-2}$ را از مبدأ مختصات حساب می‌کنیم: $AO=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

۵ - گزینه ۲

$$g^{-1}(6)=a\Rightarrow g(a)=6$$

$$g(a)=f(a)+\sqrt{f(a)}\Rightarrow 6=f(a)+\sqrt{f(a)}\Rightarrow f(a)=4\Rightarrow f^{-1}(4)=a\Rightarrow \sqrt[3]{8}=a\to a=2$$

۶ - گزینه ۴ ابتدا معکوس تابع $f(x)=2^{x+1}$ را پیدا می‌کنیم.

$$y=2^{x+1}\xrightarrow{\log_b^a=k\to b^k=a} x+1=\log_2^y\to x=\log_2^y-1\to x=\log_2^y-\log_2^2$$

$$\to x=\log_2^{\frac{y}{2}}\to f^{-1}(x)=\log_2^{\frac{x}{2}}$$

$$gof^{-1}(x)=g(f^{-1}(x))=\sqrt{6-2\log_2^{\frac{x}{2}}}$$

برای آنکه $gof^{-1}(x)$ قابل انجام باشد باید جلوی لگاریتم مثبت و زیر رادیکال، بزرگتر مساوی صفر باشد.

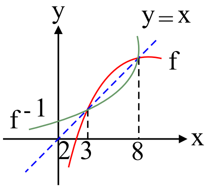
$$\frac{x}{2}>0\to x>0(I)$$

$$6-2\log_2^{\frac{x}{2}}\geq 0\to 2\log_2^{\frac{x}{2}}\leq 6\to \log_2^{\frac{x}{2}}\leq 3\xrightarrow[\log_a^A\leq m\longrightarrow A\leq a^m]{a>1}\frac{x}{2}\leq 2^3\to \frac{x}{2}\leq 8\to x\leq 16(II)$$

$$I\cap II: 0<x\leq 16\to x\in(0,16]\to Max(b-a)=16-0=16$$

۷ - گزینه ۴ برای به‌دست آوردن دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$x-f^{-1}(x)\geq 0\to x\geq f^{-1}(x)$$



نمودارهای f و f^{-1} نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن هستند و باتوجه به $x\geq f^{-1}(x)$ باید به دنبال فواصلی باشیم که خط $y=x$ بزرگ‌تر مساوی تابع f^{-1} باشد یعنی $[3,8]$.

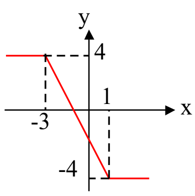
۸ - گزینه ۲

ابتدا داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$

$$y=|x-1|-|x+3|=\begin{cases}-x+1+x+3 & x<-3\\ -x+1-x-3 & -3\leq x\leq 1\\ x-1-x-3 & x>1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}4 & x<-3\\ -2x-2 & -3\leq x\leq 1\\ -4 & x>1\end{cases}$$

پس نمودار تابع به صورت زیر است:



با توجه به نمودار، تابع در فاصله‌ی $[-3\,,\,1]$ یک به یک و معکوس‌پذیر است.

۹ - گزینه ۱ روش اول:

$$\begin{cases}x\geq 0\ ;\ y=\dfrac{x}{1+x}\Rightarrow y+xy=x\Rightarrow x=\dfrac{y}{1-y}\xrightarrow{x\geq 0}\dfrac{y}{1-y}\geq 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}0\leq y<1 & (1)\\ x\leq 0\ ;\ y=\dfrac{x}{1-x}\Rightarrow y-xy=x\Rightarrow x=\dfrac{y}{1+y}\xrightarrow{x\leq 0}\dfrac{y}{1+y}\leq 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-1<y\leq 0 & (2)\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$x=\begin{cases}\frac{y}{1-y}\ ;\ 0\leq y<1\\ \frac{y}{1+y}\ ;\ -1<y\leq 0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{y}{1-|y|}\ ,\ \ |y|<1\to f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}\ ;\ |x|<1$$

روش دوم:

می‌توانید نقطهٔ دلخواهی از تابع را در نظر گرفته و جای x و y را عوض کرده و کنترل کنیم که این مختصات در کدام ضابطه صدق می‌کند. به عنوان مثال، نقطهٔ $(۲,\frac{۲}{۳})$ متعلق به تابع است. پس نقطهٔ $(\frac{۲}{۳},۲)$ متعلق به ضابطهٔ تابع وارون می‌باشد. با کمی دقت پی می‌بریم که این مختصات تنها در گزینهٔ ۱ صدق می‌کند.

۱۰ - گزینه ۱

$$(fog^{-۱})(۴)=f(g^{-۱}(۴))$$

اکنون باید $g^{-۱}(۴)$ را حساب کنیم برای این منظور کافی است در تابع g به جای y عدد ۴ قرار دهیم. $\left(\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}\in f\to\begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix}\in f^{-۱}\right)$

$$۴=\frac{۵x+۲}{۲x-۱}\to ۸x-۴=۵x+۲\to ۳x=۶\to x=۲$$

بنابراین: $f(g^{-۱}(۴))=f(۲)=۲^۲+۲=۶$

۱۱ - گزینه ۴

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\}\quad,\quad g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$$

$$gof^{-۱}(x)=g(f^{-۱}(x))=\left.\begin{array}{l} g(f^{-۱}(۲))=g(۱)=\varnothing \\ g(f^{-۱}(۵))=g(۲)=۳ \\ g(f^{-۱}(۳))=g(۰)=\varnothing \\ g(f^{-۱}(-۱))=g(۴)=۱ \end{array}\right\}\to gof^{-۱}(x)=\{\,(۵,۳)\,,\,(-۱,۱)\,\}$$

۱۲ - گزینه ۲ ابتدا تابع $f(x)$ را بدون قدر مطلق نوشته و سپس ضابطه‌ی معکوس آن را بدست می‌آوریم (x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس yها را به x و x را به y تبدیل می‌کنیم).

$$x\geq ۰\to f(x)=۲x+x=۳x\to y=۳x\to x=\frac{y}{۳}\to f^{-۱}(x)=\frac{x}{۳}\ ,x\geq ۰$$

$$x<۰\to f(x)=۲x-x=x\to y=x\to f^{-۱}(x)=x\,,\,x<۰$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۳} & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}$ است. اکنون باید معادله‌ی $f^{-۱}(x)+۳x=۰$ را حل کنیم.

$x\geq ۰\to f^{-۱}(x)+۳x=۰\to \frac{x}{۳}+۳x=۰\to \frac{۱۰x}{۳}=۰\to x=۰$ (با توجه به شرط) ق ق

$x<۰\to f^{-۱}(x)+۳x=۰\to x+۳x=۰\to ۴x=۰\to ۴x=۰\to x=۰$ (با توجه به شرط) غ ق ق

بنابراین معادله فقط یک جواب دارد.

۱۳ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$$f^{-۱}\left(g(۲a)\right)=۶\Rightarrow f(۶)=۳=g(۲a)=\frac{۲a}{۲a-۱}\Rightarrow ۶a-۳=۲a\Rightarrow ۴a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۱۴ - گزینه ۲

$$f(x)=\sqrt{۱-x}\Rightarrow D_f:۱-x\geq ۰\to x\leq ۱$$

از طرفی می‌دانیم: $f^{-۱}of(x)=x\ \ ,\ \ x\in D_f(x\leq ۱)$

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تعریف، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$۱+f^{-۱}of(x)\geq ۰\to ۱+x\geq ۰\to x\geq -۱\xrightarrow{x\leq ۱}-۱\leq x\leq ۱$ یا $x\in[-۱,۱]$

۱۵ - گزینه ۴ ابتدا قدرمطلق را از بین می‌بریم.

$x>۲\to y=x-(x-۲)+۱\to y=۳\to$ تابع ثابت یک به یک نمی‌باشد پس وارون‌پذیر نیست

$$x\leq ۲\to y=x-(-x+۲)+۱\to y=۲x-۱$$

بنابراین تابع در فاصله‌ی $(-\infty,۲)$ وارون‌پذیر است.

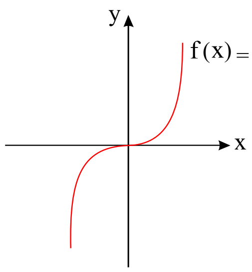
$$y=۲x-۱\to ۲x=y+۱\to x=\frac{y+۱}{۲}\to f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۲}$$

$D_{f^{-۱}}$ برابر برد تابع است بنابراین باید برد تابع $y=۲x-۱$ را در فاصله‌ی $(-\infty,۲)$ به‌دست آوریم.

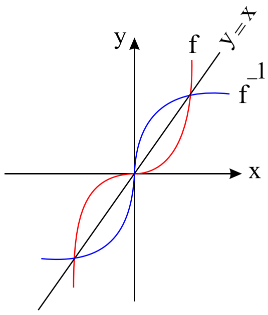
$$x\leq ۲\to ۲x\leq ۴\to ۲x-۱\leq ۳\to y\leq ۳\to R_f=y\leq ۳\to D_{f^{-۱}}=x\leq ۳$$

۱۶ - گزینه ۳

$$f(x)=x\,|x|=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}\to$$



برای رسم تابع معکوس، کافی است قرینهٔ شکل را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، رسم کنیم.



۱۷ – گزینه ۱ دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند و می‌دانیم برای پیدا کردن ضابطه‌ای معکوس یک تابع، ابتدا رابطه را برحسب x به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$3y-2x=4 \to 2x=3y-4 \to x=\frac{3}{2}y-2 \to f^{-1}(x)=\frac{3}{2}x-2 \xrightarrow{x=0} \text{عرض از مبدأ}=-2$$

۱۸ – گزینه ۱ چون دو تابع در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ متقاطع هستند کافی است در تابع $g(x)$ به‌جای عرض، $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ قرار دهیم تا طول نقطه‌ی برخورد دو تابع بدست آید.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}=32^{x-1} \to \frac{1}{2\times 2^{\frac{1}{2}}}=(2^5)^{x-1} \to 2^{-\frac{3}{2}}=2^{5x-5} \to 5x-5=-\frac{3}{2} \to 5x=\frac{7}{2} \to x=\frac{7}{10}$$

بنابراین محل برخورد دو تابع $(\frac{7}{10},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ است کافی است این نقطه را در تابع f صدق دهیم تا a بدست آید.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}=(\frac{1}{2})^{\frac{7}{10}a-1} \to \frac{1}{2\times 2^{\frac{1}{2}}}=(2^{-1})^{\frac{7}{10}a-1} \to 2^{-\frac{3}{2}}=2^{-\frac{7}{10}a+1}$$

$$\to -\frac{3}{2}=-\frac{7}{10}a+1 \xrightarrow{\times 10} -15=-7a+10 \to -7a=-25 \to a=\frac{25}{7}$$

بنابراین $f(x)=(\frac{1}{2})^{\frac{25}{7}x-1}$ است. وقتی گفته می‌شود $f^{-1}(x)$، خط $x=\frac{1}{16}$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند یعنی $f^{-1}(\frac{1}{16})$ را خواسته است و می‌دانیم وقتی $\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.\in f$ است آن‌گاه $\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.\in f^{-1}$ است کافی است مقداری از x را پیدا کنیم که به‌ازای آن $f(x)$ برابر با $\frac{1}{16}$ می‌شود.

$$\frac{1}{16}=(\frac{1}{2})^{\frac{25}{7}x-1} \to 2^{-4}=2^{-\frac{25}{7}x+1} \to -4=-\frac{25}{7}x+1 \to -\frac{25}{7}x=-5 \to x=\frac{7}{5}$$

۱۹ – گزینه ۳ دامنه‌ی تابع معکوس با برد تابع اصلی برابر است یعنی $D_{f^{-1}}=R_f$ است.

$$-1\le x\le 1 \to -1\le x^5\le 1 \to 2\le x^5+3\le 4 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{4}\le\frac{1}{x^5+3}\le\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \frac{1}{2}\le\frac{2}{x^5+3}\le 1 \to \frac{1}{2}\le y\le 1$$

بنابراین دامنه‌ی تعریف تابع $f^{-1}(x)$ به‌صورت $[\frac{1}{2},1]$ است. اگر تابع $f^{-1}(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم تابع $f^{-1}(x-1)$ بدست می‌آید بنابراین $D_{f^{-1}(x-1)}=[\frac{3}{2},2]$ است.

۲۰ – گزینه ۱

$$x>0 \to f(x)=\frac{x^2}{x}(x-1)=x^2-x \xrightarrow[y'\le 0\ \text{باشد}]{\text{برای نزولی بودن باید}} 2x-1\le 0$$

$$\to x\le\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0<x\le\frac{1}{2}$$

$$x<0 \to f(x)=\frac{x^2}{-x}(x-1)=-x^2+x \xrightarrow[y'\le 0\ \text{باشد}]{\text{برای نزولی بودن باید}} -2x+1\le 0$$

$$\to x\ge\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing$$

بنابراین تابع $y=x^2-x$ در بازه‌ی $(0,\frac{1}{2}]$ نزولی است. برای یافتن ضابطه‌ی معکوس یک تابع کافی است x را برحسب y به‌دست آوریم و سپس y را به x و x را به y تبدیل کنیم.

$$y=x^2-x \to y=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \to (x-\frac{1}{2})^2=y+\frac{1}{4} \to x-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{y+\frac{1}{4}}$$

$$\xrightarrow{0<x\le\frac{1}{2}} x-\frac{1}{2}=-\sqrt{y+\frac{1}{4}} \to x=\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}} \to f^{-1}(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$$

توجه کنید دامنه‌ی تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$0<x\le\frac{1}{2} \to \frac{-1}{2}<x-\frac{1}{2}\le 0 \xrightarrow{\text{توان } 2} 0\le (x-\frac{1}{2})^2<\frac{1}{4} \to \frac{-1}{4}\le (x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}<0$$

$$\to \frac{-1}{4}\le y<0 \to R_f=D_{f^{-1}}=[\frac{-1}{4},0)$$

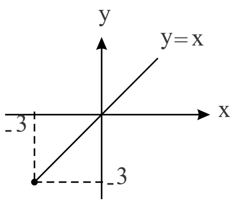
۲۱ – گزینه ۴ ترکیب هر تابع و تابع معکوسش برابر با تابع همانی است.

$$fof^{-1}(x)=x \quad , \quad D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$$

اکنون کافی است برد تابع f که همان دامنهٔ f^{-1} است را به‌دست آوریم.

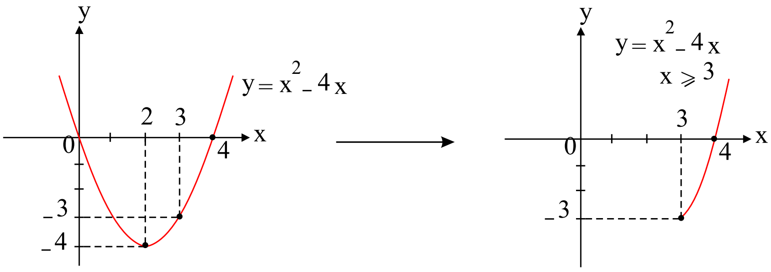
$$\sqrt{x+2}\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x+2}-3\ge -3 \Rightarrow f(x)\ge -3 \Rightarrow R_f=[-3,+\infty)$$

اکنون کافی است خط $y=x$ را با شرط $x\ge -3$ رسم کنیم.



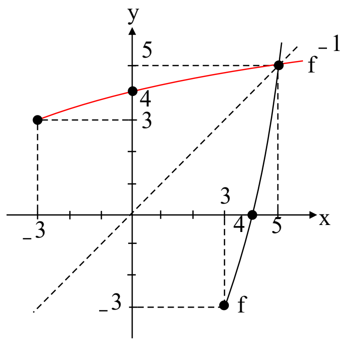
۲۲ – گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^2-4x$ را رسم می‌کنیم.

$$S\left|\begin{matrix}\frac{-b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{matrix}\right. \to S\left|\begin{matrix}2\\ -4\end{matrix}\right. \quad , \quad y=0 \to x(x-4)=0 \to \left|\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right. \quad , \quad \left|\begin{matrix}4\\ 0\end{matrix}\right.$$



برای رسم نمودار تابع معکوس، کافی است که قرینه‌ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم رسم کنیم.

واضح است که نمودار f^{-1} از نواحی اول و دوم محورهای مختصات عبور می‌کند.



۲۳ – گزینه ۲ می‌دانیم اگر تابع f معکوس‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(a)=b$ آن‌گاه خواهیم داشت: $f^{-1}(b)=a$

با توجه به نکته بالا داریم: $g^{-1}(1)=4 \to g(4)=1 \quad (*)$

حال اگر در عبارت داده شده به جای x مقدار $\frac{1}{2}$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f(4x)=3+2g\left(\frac{2}{x}\right) \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} f(2)=3+2g(4) \xrightarrow{(*)} f(2)=3+2\times 1=5 \Rightarrow f^{-1}(5)=2$$

۲۴ – گزینه ۱

$$(gof^{-1})(-3)=g(f^{-1}(-3))$$

ابتدا باید $f^{-1}(-3)$ را به‌دست آوریم. برای این منظور کافی است درتابع اصلی به جای y، عدد -3 را قراردهیم.

$$\left(\left|\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right.\in f\to\left|\begin{matrix}b\\ a\end{matrix}\right.\in f^{-1}\right)$$

$$-3=\frac{2x+3}{1-2x}\to -3+6x=2x+3\to 4x=6\to x=\frac{3}{2}$$

بنابراین $f^{-1}(-3)=\frac{3}{2}$ است.

$$g(f^{-1}(-3))=g(\frac{3}{2})=6(\frac{9}{4})-\frac{3}{2}-2=\frac{27}{2}-\frac{3}{2}-2=12-2=10$$

۲۵ - گزینه ۲

$$g^{-1}(16)=\alpha\to g(\alpha)=16\to f(3\alpha-4)=16\to f^{-1}(16)=3\alpha-4\ (I)$$

دقت کنید: $f^{-1}(2x)=x+\sqrt{x+1}\xrightarrow{x=8} f^{-1}(16)=8+\sqrt{9}=11$

$$I\ :\ f^{-1}(16)=3\alpha-4\to 11=3\alpha-4\to 3\alpha=15\to \alpha=5$$

۲۶ - گزینه ۲ اگر (m,n) نقطه‌ی تقاطع نمودارهای دو تابع f و f^{-1} باشد. داریم: $f(n)=m, f(m)=n$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(-1)=\frac{1}{3}\Rightarrow 1-a+b=\frac{1}{3} \\ f(\frac{1}{3})=-1\Rightarrow \frac{-1}{27}+\frac{a}{3}+b=-1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -a+b=-\frac{2}{3} \\ a+3b=-\frac{26}{9} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{2}{9} \\ b=-\frac{8}{9} \end{cases}\Rightarrow a+b=-\frac{10}{9}$$

۲۷ - گزینه ۳ توجه کنید اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ است.

$$g(x)=2f(\frac{x}{3})=y\Rightarrow \begin{cases} x=g^{-1}(y) \\ f(\frac{x}{3})=\frac{y}{2}\Rightarrow \frac{x}{3}=f^{-1}(\frac{y}{2})\Rightarrow x=3f^{-1}(\frac{y}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y)=3f^{-1}(\frac{y}{2})\Rightarrow g^{-1}(x)=3f^{-1}(\frac{x}{2})=3(8(\frac{x}{2})^3+4(\frac{x}{2}))$$

$$=3x^3+6x=ax^3+bx\Rightarrow a=3\,,\ b=6\Rightarrow a+b=9$$

۲۸ - گزینه ۱ از آنجایی که $(gof)^{-1}(x)=(f^{-1}og^{-1})(x)$ است، ضابطه‌ی تابع gof را تعیین می‌کنیم.

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{-2x+3}{x-1})=\frac{\frac{-2x+3}{x-1}+3}{\frac{-2x+3}{x-1}+2}=\frac{\frac{-2x+3+3x-3}{x-1}}{\frac{-2x+3+2x-2}{x-1}}=\frac{x}{1}=x$$

چون $(gof)(x)=x$ است و معکوس تابع همانی خود تابع همانی است پس ضابطه‌ی $(gof)^{-1}(x)$ برابر x است.

۲۹ - گزینه ۳ روش اول: برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع، کافی است x را برحسب y بدست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$\left.\begin{matrix} y=\sqrt{x}\,,\ x\geq 0\to y^2=x\to f^{-1}(x)=x^2\,,\ x\geq 0 \\ y=-\sqrt{-x}\ ,\ x<0\to y^2=-x\to x=-y^2\to f^{-1}(x)=-x^2\,,\ x<0 \end{matrix}\right. \to f^{-1}(x)=x\,|x|$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم و می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ است.

$x=4\xrightarrow{\text{تابع}} y=2\to A\left|\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right.\in f\to A'\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.\in f^{-1}\to$ گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند.

$x=-4\xrightarrow{\text{تابع}} y=-2\to B\left|\begin{matrix}-4\\-2\end{matrix}\right.\in f\to B'\left|\begin{matrix}-2\\-4\end{matrix}\right.\in f^{-1}\to$ گزینه‌ی دوم حذف می‌شود.

۳۰ - گزینه ۱ برای پیدا کردن ضابطهٔ معکوس یک تابع کافی است x را برحسب y به‌دست آوریم و در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=\underbrace{x^2+6x}-1\to y=(x+3)^2-9-1\to y=(x+3)^2-10$$

$$\to (x+3)^2=y+10\to \underbrace{x+3}_{-}=\pm\sqrt{y+10}\xrightarrow{x\leq -4} x+3=-\sqrt{y+10}$$

$$\to x=-3-\sqrt{y+10}\to f^{-1}(x)=-3-\sqrt{x+10}$$

از طرفی دامنهٔ تابع معکوس همان برد تابع اصلی است.

$$y=(x+3)^2-10\xrightarrow{x\leq -4} x+3\leq -1\to (x+3)^2\geq 1\to (x+3)^2-10\geq -9$$

$$\to y\geq -9\to D_{f^{-1}}=x\geq -9$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۴	۱۱ - ۴	۱۶ - ۳	۲۱ - ۴	۲۶ - ۲
۲ - ۳	۷ - ۴	۱۲ - ۲	۱۷ - ۱	۲۲ - ۲	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۲	۱۳ - ۲	۱۸ - ۱	۲۳ - ۲	۲۸ - ۱
۴ - ۲	۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۳	۲۴ - ۱	۲۹ - ۳
۵ - ۲	۱۰ - ۱	۱۵ - ۴	۲۰ - ۱	۲۵ - ۲	۳۰ - ۱