نام آزمون: ترکیب توابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - در تابع $f=\{(-1,0),(0,1),(1,-1),(2,2)\}$، رابطهٔ $f(1-f(x_0))=f(x_0)$ برقرار است، x_0 کدام است؟

① -1

② صفر

③ 1

④ 2

۲ - اگر $f=\{(-3,k),(\frac{1}{2}a,-2),(2a+1,k),(b-1,1),(-1,4b)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

① $-\frac{3}{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ -1

④ 2

۳ - به‌ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}3x^2+4 & , x\geq 1\\ 2x-a & , x<1\end{cases}$ یک‌به‌یک است؟

① -7

② -8

③ -6

④ -4

۴ - اگر رابطهٔ $f=\{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، نمودار تابع $g(x)=ax+b$ محور طول‌ها را در چه نقطه ای قطع می‌کند؟

① $(3,0)$

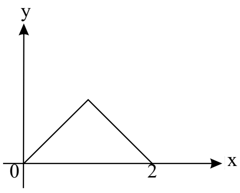
② $(-\frac{3}{2},0)$

③ $(-3,0)$

④ $(\frac{3}{2},0)$

۵- اگر تابع $f=\{(1,-2),(2,4),(a+1,-2),(6,a),(b+2,0),(c,b+a)\}$ یک‌به‌یک باشد، حاصل $\frac{b}{c}$ کدام است؟

① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴



۶- اگر نمودار f به شکل زیر باشد، دامنه‌ی تعریف تابع g با ضابطه‌ی $g(x)=\frac{f(1-x)}{f(x)}$ کدام است؟

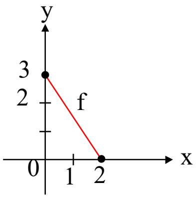
① $(-1,1)-\{0\}$
② $[0,1]$
③ $[-1,1]-\{0\}$
④ $(0,1]$

۷- اگر $f(x)=x+1$ و $g(2f(x))=\frac{x^2}{3}$، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ کدام است؟

① $g(x)=\frac{(x-2)^2}{2}$
② $g(x)=\frac{(x-2)^2}{3}$
③ $g(x)=\frac{(x-2)^2}{6}$
④ $g(x)=\frac{(x-2)^2}{12}$

۸- اگر $f(x)=2x+1$ و $gof(x)=4x^2+12x+5$ باشد، حاصل $(f+g)og(-2)$ کدام است؟

① ۹
② ۲۵
③ -7
④ -9



۹- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع $y=fof(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۱۰- اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(f(x))=x^۲+x-۲$، آن‌گاه حاصل $(fog)(۳)$ کدام است؟

(۱) صفر
(۲) ۱
(۳) -۲
(۴) ۳

۱۱- $f(x)=\sqrt{۱-x}+x^۲$ و $D_{fog}=(-\infty,۱]$، ضابطه‌ی تابع g، کدام یک از موارد زیر می‌تواند باشد؟

(۱) $g(x)=۳\log x$
(۲) $g(x)=\sqrt{x}$
(۳) $g(x)=\sqrt[۳]{x}$
(۴) $g(x)=\sin x$

۱۲- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ,x<۰\end{cases}$ و $g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(-۲,۳),(-۴,-۳)\}$ مفروض‌اند. اگر $g(f(a))=۳$ باشد، a کدام است؟

(۱) -۴
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) ۴

۱۳- اگر $f(x)=x^{۲}-۳x-۱$ و $g(x)=۳x+۱$، مجموع ریشه‌های معادله‌ی $۴x+(fog)(x)=۲$ کدام است؟

(۱) $\frac{۵}{۹}$

(۲) $-\frac{۱}{۹}$

(۳) $-\frac{۵}{۹}$

(۴) $-\frac{۴}{۹}$

۱۴- اگر $f\left(x\right)=\sqrt{x-۶}$ و $g\left(x\right)=۵x-x^{۲}$ باشد، دامنهٔ تابع fog کدام است؟

(۱) $[-۱,۶]$

(۲) $[-۶,۱]$

(۳) $[۲,۳]$

(۴) $[۱,۵]$

۱۵- اگر $f\left(x\right)=۲x+۳$ و $g\left(f\left(x\right)\right)=۸x^{۲}+۲۲x+۲۰$ باشد، $g(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

۱۶- اگر $g(x)=x^{۳}-x$ و $(fog)(x)=x^{۶}-۲x^{۴}+x^{۲}+۱$ باشند، حاصل $f(۳)$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۱۷

(۴) ۱۰

۱۷- اگر در تابع خطی f داشته باشیم $f(۲x-۱)+۲f(۳x)=۷x+۱$ ، $f(۱)$ کدام است؟

(۱) $\frac{۷}{۸}$

(۲) $\frac{۴}{۳}$

(۳) $\frac{۳}{۲}$

(۴) $\frac{۵}{۸}$

۱۸- اگر $f(x+۳)=x+\frac{۵}{x}$ ، نمودار تابع $y=۳-f(۲x)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

(۱) $(۲,۵)$

(۲) $(۲,۲)$

(۳) $(۴,-۳)$

(۴) $(۸,-۳)$

۱۹- تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x+a}$ مفروض است. اگر $f(x)\cdot f(-\frac{۱}{x})=-۱$ باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) -۲

۲۰- اگر f تابعی خطی باشد به صورتی که رابطهٔ $f(x-۱)+f(x+۲)=x$ برقرار باشد، آن‌گاه $f(۲)$ کدام است؟

(۱) $\frac{۵}{۲}$

(۲) $\frac{۳}{۴}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۱ - تابع f همانی، تابع g ثابت و تابع h خطی است. اگر داشته باشیم: $۲f(-۲) = g(۲)$، $h(-۲) = g(۰) + ۱$ و $h(۲) = f(۲) + g(۳) + ۱$، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $h(x) \geq ۰$ کدام است؟ (دامنهٔ هر سه تابع، $\mathbb{R}$ است.)

① $(-\infty, -۲]$

② $[۰, +\infty)$

③ $[۴, +\infty)$

④ $(-\infty, ۰]$

۲۲ - تابع $f(x) = \dfrac{۳x^۲ + ax + b}{۲x^۲ + cx + d}$، یک تابع ثابت با ضابطهٔ $y = k$ و دامنهٔ $\mathbb{R} - \{-۳\}$ است. حاصل $\dfrac{a - b + c - d}{k}$ کدام است؟

① -۱۰

② ۱۰

③ ۵

④ -۵

۲۳ - f تابعی ثابت و g تابعی همانی است. اگر دامنه‌ی این دو تابع $\mathbb{R}$ باشد و $f(-۱) = ۳$، حاصل $f\left(g(۲)\right) + g\left(f(۳)\right)$ کدام است؟

① ۶

② ۲

③ ۵

④ ۴

۲۴ - اگر f تابع ثابت، $f(۱) = ۵$ و تابع $g = \left\{(۳, a - ۱), (۵, ۵), (\dfrac{b}{۲}, ۲)\right\}$ تابع همانی باشد، حاصل $f(a - ۳) + g(b + ۱)$ کدام است؟

① ۷

② ۸

③ ۹

④ ۱۰

۲۵- اگر f تابعی خطی باشد و $f(x) = ۲f(۱) + ۵x$ ، مقدار $f(۷)$ کدام است؟

① ۲۰
② ۲۵
③ ۳۰
④ ۳۵

۲۶- در تابع ثابت f ، با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ ، داریم $f(۵) = ۲$. اگر g تابع همانی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشد، حاصل $f\left(g(۳)\right) + g\left(f(۱)\right)$ کدام است؟

① ۴
② ۲
③ ۶
④ ۷

۲۷- اگر $f(x) = ax + b$ و $f(x+۱) + f(۲x) = ۴x - ۱$ باشد، کدام یک از توابع زیر تابع ثابت است؟

① $f(x)$
② $f(x) - ۴x$
③ $f(x) - \frac{۴}{۳}x$
④ $f(x) + \frac{۷}{۶}x$

۲۸- تابع خطی $f(x)$ از دو نقطه‌ی $(۳,۵), (۱,-۳)$ می‌گذرد، $f(-۲)$ کدام است؟

① -۱۵
② ۷
③ -۱۱
④ ۴

۲۹- اگر در تابع خطی f با شیب منفی داشته باشیم $f(f(x+۱)) = ۹x - ۳$ مقدار $f(۳) - f(۱)$ کدام است؟

① -۶
② -۹
③ -۱۲
④ -۱۸

۳۰- اگر $f=\{(۱,a+b),(۲,b+c),(۳,c+a)\}$ تابع همانی باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۳۱- اگر تابع $f(x)=(a-۳)x^۲+۲x-۳$ بر روی R یک به یک باشد، مقدار $af(۳)$ کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) -۱۲

(۳) -۸

(۴) ۹

۳۲- تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ چگونه است؟

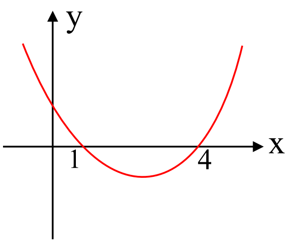
(۱) یک‌به‌یک – صعودی

(۲) یک‌به‌یک – نزولی

(۳) غیر یک‌به‌یک – صعودی

(۴) غیر یک‌به‌یک – نزولی

۳۳- نمودار تابع $f(x)=(x-a)(x-b)$ به‌صورت زیر است. اگر این تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,c]$ و $[c,+\infty)$ یک‌به‌یک باشد، حاصل abc کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۲۰

(۳) $\frac{۵}{۲}$

(۴) ۴۰

۳۴- اگر $f=\{(۴,۲),(a,۵),(۴,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد، زوج‌مرتب (a,b) کدام است؟

(۱) $(۲,-۱)$

(۲) $(۲,۴)$

(۳) $(-۱,۴)$

(۴) $(۲,۲)$

۳۵- حدود m برای آن‌که تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & ;x\leq ۱ \\ mx+۵ & ;x>۱ \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، کدام است؟

(۱) $m\geq -۱$

(۲) $m>۰$

(۳) $m\leq -۱$

(۴) $m<۰$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$f=\{(-۱,۰),(۰,۱),(۱,-۱),(۲,۲)\}$

تابع f تابعی یک‌به‌یک است، پس از $f(u)=f(v)$ می‌توان نتیجه گرفت $u=v$، حال داریم:

$f(۱-f(x_۰))=f(x_۰)\Rightarrow ۱-f(x_۰)=x_۰\Rightarrow f(x_۰)=۱-x_۰$

فقط زوج مرتب $(۰,۱)$ در رابطهٔ فوق صدق می‌کند.

$x_۰=۰\Rightarrow f(۰)=۱-۰\Rightarrow f(۰)=۱$

۲ - گزینه ۱ تابعی یک‌به‌یک است که اگر مؤلفه‌های دوم یکسان باشند، مؤلفه‌های اول نیز یکسان باشند.

$f=\{(-۳,k),(\frac{a}{۲},-۲),(۲a+۱,k),(b-۱,۱),(-۱,۴b)\}$

$(-۳,k)\in f\ ,\ (۲a+۱,k)\in f\xrightarrow{\text{یک‌به‌یک}}۲a+۱=-۳\to ۲a=-۴\to a=-۲$

$\to f=\{(-۳,k),(-۱,-۲),(-۳,k),(b-۱,۱),(-۱,۴b)\}$

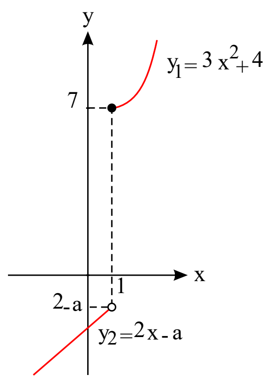
$(-۱,۴b)\in f\ ,\ (-۱,-۲)\in f\xrightarrow{\text{تابع}}۴b=-۲\to b=-\frac{۱}{۲}$

پس: $a-b=-۲-(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۳}{۲}$

۳ - گزینه ۴ شکلی معرف تابع یک‌به‌یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند و نه بیشتر.

با توجه به شکل فرضی زیر داریم:

$$f(x)=\begin{cases}۳x^۲+۴ & ,\ x\geq ۱\\ ۲x-a & ,\ x<۱\end{cases}$$



برای یک‌به‌یک بودن تابع $f(x)$، داریم:

$۲-a\leq ۷\Rightarrow a\geq -۵$

با توجه به گزینه‌ها $a=-۴$ قابل قبول است.

۴ - گزینه ۲

$f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$

شرط تابع بودن: $(۳,۲),(۳,a^۲-a)\Rightarrow a^۲-a=۲\Rightarrow a^۲-a-۲=۰\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}a=۲\\ a=-۱\end{cases}$

$a=-۱\Rightarrow f=\{(۳,۲),(-۱,۵),(b,۲),(-۱,۴)\}\Rightarrow$ تابع نیست.

$a=۲\Rightarrow f=\{(۳,۲),(۲,۵),(b,۲),(-۱,۴)\}$ شرط یک‌به‌یک بودن: $(۳,۲),(b,۲)\Rightarrow b=۳$

$g(x)=ax+b\xrightarrow[b=۳]{a=۲}g(x)=۲x+۳\Rightarrow g(x)=۰\Rightarrow ۲x+۳=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$

محل برخورد تابع g با محور طول‌ها نقطهٔ $(-\frac{3}{2}, 0)$ می‌باشد.

۵ - گزینه ۲ با در نظر گرفتن شرط یک‌به‌یک بودن تابع داریم:

$$(1,-2)=(a+1,-2)\Rightarrow a+1=1\Rightarrow a=0$$
$$\Rightarrow f=\{(1,-2),(2,4),(6,0),(b+2,0),(c,b)\}$$
$$(6,0)=(b+2,0)\Rightarrow b+2=6\Rightarrow b=4\Rightarrow f=\{(1,-2),(2,4),(6,0),(c,4)\}$$
$$(2,4)=(c,4)\Rightarrow c=2\Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{4}{2}=2$$

۶ - گزینه ۴ باتوجه به شکل، دامنه‌ی تعریف تابع f به‌صورت $[0,2]$ می‌باشد برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تعریف $f(1-x)$ بدین صورت عمل می‌کنیم.

$$0\le 1-x\le 2\to -1\le -x\le 1\to -1\le x\le 1$$

تابع $g(x)$ تابعی است کسری که مخرج آن $f(x)$ است برای بدست آوردن ریشه‌های مخرج کافی است $f(x)$ را مساوی صفر قرار دهیم.

$$f(x)=0\to x=0, x=2$$
$$D_{g(x)}=D_{f(1-x)}\cap D_{f(x)}-\{x|f(x)=0\}=[-1,1]\cap[0,2]-\{0,2\}=[0,1]-\{0,2\}=(0,1]$$

۷ - گزینه ۴

$$f(x)=x+1\to 2f(x)=2x+2$$
$$g(2f(x))=\frac{x^2}{3}\to g(2x+2)=\frac{x^2}{3}\qquad 2x+2=t\to x=\frac{t-2}{2}$$
$$\to g(t)=\frac{1}{3}(\frac{t-2}{2})^2=\frac{(t-2)^2}{12}\to g(x)=\frac{(x-2)^2}{12}$$

۸ - گزینه ۳

ابتدا ضابطه‌ی $g(x)$ را یافته، سپس مطابق مقادیر به دست آمده، حاصل $(f+g)og(-2)$ را می یابیم.

$$\left.\begin{array}{l} g(2x+1)=4x^2+12x+5 \\ 2x+1=t\Rightarrow x=\frac{t-1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow g(t)=4(\frac{t-1}{2})^2+12(\frac{t-1}{2})+5$$
$$\Rightarrow g(t)=t^2-2t+1+6t-6+5=t^2+4t\Rightarrow g(x)=x^2+4x$$
$$(f+g)o\overbrace{g(-2)}^{-4}=(f+g)(-4)=f(-4)+g(-4)=-7+0=-7$$

۹ - گزینه ۳ از روی شکل مشخص است که $D_f=[0,2]$ است. حال با داشتن دو نقطه از این خط، معادله ی خط را می‌نویسیم.

$$A\left|\begin{array}{l}0\\3\end{array}\right.\;,\;B\left|\begin{array}{l}0\\2\end{array}\right.\;\to\;\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y-3}{x}=\frac{3}{-2}$$

$$\to 2y-6=-3x\to 2y=-3x+6\to f(x)=-\frac{3}{2}x+3$$
$$D_{fof}=\{x\in D_f,\ f(x)\in D_f\}=\{0\le x\le 2\ ,\ \underbrace{0\le -\frac{3}{2}x+3\le 2}_{*}\}$$

$$*:\quad 0\le -\frac{3}{2}x+3\le 2\to -3\le -\frac{3}{2}x\le -1\xrightarrow{\times(-\frac{2}{3})}2\ge x\ge\frac{2}{3}$$

پس: $D_{fof}=\left\{0\le x\le 2\ ,\ \frac{2}{3}\le x\le 2\right\}=\frac{2}{3}\le x\le 2$

که در این بازه دو عدد صحیح $(x=1,2)$ وجود دارد.

۱۰ - گزینه ۲

$$g(f(x))=x^2+x-2\to g(2x+1)=x^2+x-2$$

$$fog(3)=f(g(3))\xrightarrow[\to g(3)=0]{2x+1=3\to x=1}f(0)=1$$

۱۱ - گزینه ۳ ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f:1-x\ge 0\to x\le 1$$

و باتوجه به این‌که $D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی اول: $D_{fog}=\{x>0,\log x^3\le 1\}=\{x>0,x^3\le 10\}=\{x>0,x\le\sqrt[3]{10}\}=(0,\sqrt[3]{10}]\to$ نادرست

گزینه‌ی دوم: $D_{fog} = \{x \ge 0, \sqrt{x} \le 1\} = \{x \ge 0, x \le 1\} = [0,1] \to$ نادرست

گزینه‌ی سوم: $D_{fog} = \{x \in R, \sqrt[3]{x} \le 1\} = \{x \in R, x \le 1\} = (-\infty, 1] \to$ درست

گزینه‌ی چهارم: $D_{fog} = \{x \in R, \sin x \le 1\} = R \to$ نادرست

۱۲ - گزینه ۱

$g(f(a)) = 3 \xrightarrow{\text{باید مشخص کنید به ازای کدام } x \text{ در تابع } g \text{ حاصل برابر ۳ می‌شود}} f(a) = -2$

$a \ge 0 \to f(a) = \sqrt{a} \to \sqrt{a} = -2$ امکان ندارد

$a < 0 \to f(a) = -\sqrt{-a} \to -2 = -\sqrt{-a} \to -a = 4 \to a = -4$

۱۳ - گزینه ۲

$fog(x) = f(g(x)) = (3x+1)^2 - 3(3x+1) - 1 = 9x^2 + 1 + 6x - 9x - 3 - 1 = 9x^2 - 3x - 3$

$4x + fog(x) = 2 \to 4x + 9x^2 - 3x - 3 = 2 \to 9x^2 + x - 5 = 0$

مجموع ریشه‌ها $= x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{9}$

۱۴ - گزینه ۳

$fog(x) = f\,(g(x)) = \sqrt{5x - x^2 - 6}$

زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد.

$-x^2 + 5x - 6 \ge 0 \to x^2 - 5x + 6 \le 0 \to (x-2)(x-3) \le 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 \le x \le 3$ یا $x \in [2,3]$

۱۵ - گزینه ۲

$g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \to g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$

$\xrightarrow{2x+3=\frac{1}{2} \to x = \frac{-5}{4}} g(\frac{1}{2}) = 8(\frac{25}{16}) + 22(\frac{-5}{4}) + 20 \to g(\frac{1}{2}) = \frac{25}{2} - \frac{55}{2} + 20 = 5$

۱۶ - گزینه ۴

$fog(x) = x^6 - 2x^4 + x^2 + 1 \longrightarrow f(g(x)) = x^6 - 2x^4 + x^2 + 1$

$\longrightarrow f(x^3 - x) = (x^3 - x)^2 + 1 \xrightarrow{x^3 - x = t} f(t) = t^2 + 1$

$\longrightarrow f(3) = 3^2 + 1 = 10$

۱۷ - گزینه ۳ تابع خطی را به‌صورت $f(x) = ax + b$ نشان می‌دهند.

$f(2x-1) + 2f(3x) = 7x + 1 \to a(2x-1) + b + 2(3ax + b) = 7x + 1$

$\to 2ax - a + b + 6ax + 2b = 7x + 1 \to 8ax - a + 3b = 7x + 1$

$8a = 7 \to a = \frac{7}{8} \quad , \quad -a + 3b = 1 \to -\frac{7}{8} + 3b = 1 \to b = \frac{5}{8}$

پس: $f(x) = \frac{7}{8}x + \frac{5}{8} \to f(1) = \frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

۱۸ - گزینه ۳ ابتدا ضابطه‌ی $f(x)$ و از روی آن ضابطه‌ی $f(2x)$ را بدست می آوریم.

$x + 3 = t \to x = t - 3 \to f(t) = t - 3 + \frac{5}{t-3} \to f(x) = x - 3 + \frac{5}{x-3}$

$\to f(2x) = 2x - 3 + \frac{5}{2x-3}$

$y = 3 - f(2x) = 3 - 2x + 3 - \frac{5}{2x-3} \to y = 6 - 2x - \frac{5}{2x-3}$

گزینه‌ی سوم در این رابطه صدق می‌کند.

۱۹ - گزینه ۲

$$f(x)=\frac{x+۱}{x+a}\Rightarrow f(-\frac{۱}{x})=\frac{-\frac{۱}{x}+۱}{-\frac{۱}{x}+a}=\frac{\frac{-۱+x}{x}}{\frac{-۱+ax}{x}}=\frac{x-۱}{ax-۱}$$

$$f(x)\cdot f(-\tfrac{۱}{x})=\frac{x+۱}{x+a}\times\frac{x-۱}{ax-۱}=\frac{x^۲-۱}{(x+a)(ax-۱)}=-۱$$

$$\Rightarrow x^۲-۱=-(ax^۲-x+a^۲x-a)\Rightarrow x^۲-۱=-ax^۲+x-a^۲x+a$$

$$\Rightarrow x^۲-۱=-ax^۲+(۱-a^۲)x+a\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}-a=۱ & \Rightarrow a=-۱\\ ۱-a^۲=۰ & \Rightarrow a=\pm۱\\ a=-۱ & \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}a=-۱$$

۲۰ - گزینه ۲ فرم کلی تابع خطی بصورت $f(x)=ax+b$ است که داریم:

$$f(x-۱)+f(x+۲)=x\Rightarrow a(x-۱)+b+a(x+۲)+b=x$$

$$\Rightarrow ax-a+b+ax+۲a+b=x\Rightarrow ۲ax+a+۲b=x\Rightarrow\begin{cases}۲a=۱\rightarrow a=\frac{۱}{۲}\\ a+۲b=۰\rightarrow\frac{۱}{۲}+۲b=۰\rightarrow b=-\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

پس: $f(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}\Rightarrow f(۲)=\frac{۲}{۲}-\frac{۱}{۴}=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$

۲۱ - گزینه ۳

تابع همانی $f\Rightarrow f(x)=x$ ، تابع خطی $h(x)=ax+b$ ، تابع ثابت $g(x)=k$

$$۲f(-۲)=g(۲)\Rightarrow ۲(-۲)=k\Rightarrow k=-۴\Rightarrow g(x)=-۴$$

$$\begin{array}{ll}h(-۲)=g(۰)+۱\Rightarrow -۲a+b=-۴+۱ & \Rightarrow\\ h(۲)=f(۲)+g(۳)+۱\Rightarrow ۲a+b=۲-۴+۱ & \Rightarrow\end{array}\begin{cases}-۲a+b=-۳\\ ۲a+b=-۱\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲},b=-۲$$

$$h(x)=\frac{۱}{۲}x-۲\geq۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}x\geq۲\Rightarrow x\geq۴$$

۲۲ - گزینه ۱ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{-۳\}$ است پس $x=-۳$ تنها ریشهٔ مخرج است و چون مخرج درجهٔ دوم است پس حتماً مخرج به‌صورت $۲(x+۳)^۲$ است.

$$۲(x+۳)^۲=۲x^۲+۱۲x+۱۸=۲x^۲+cx+d\longrightarrow c=۱۲\,,\,d=۱۸$$

دقت کنید که تابع $f(x)=\frac{۳x^۲+ax+b}{۲x^۲+۱۲x+۱۸}$ قرار است یک تابع ثابت شود برای این منظور صورت کسر باید به‌صورت ضریبی از مخرج درآید. با مقایسهٔ جملات اول صورت و مخرج، مشخص می‌شود که صورت قرار است $\frac{۳}{۲}$ برابر مخرج باشد پس این نسبت در بقیهٔ جملات صورت و مخرج نیز برقرار است یعنی:

$$\begin{cases}a=\frac{۳}{۲}(۱۲)=۱۸\\ b=\frac{۳}{۲}(۱۸)=۲۷\end{cases}$$

پس : $f(x)=\frac{۳x^۲+۱۸x+۲۷}{۲x^۲+۱۲x+۱۸}=\frac{\frac{۳}{۲}(۲x^۲+۱۲x+۱۸)}{۲x^۲+۱۲x+۱۸}=\frac{۳}{۲}=k$

درنتیجه : $\frac{a-b+c-d}{k}=\frac{۱۸-۲۷+۱۲-۱۸}{\frac{۳}{۲}}=\frac{-۱۵}{\frac{۳}{۲}}=-۱۰$

۲۳ - گزینه ۱ تابع ثابت به صورت $f(x)=k$ و تابع همانی به صورت $g(x)=x$ است.

$$f(-۱)=۳\rightarrow k=۳\rightarrow f(x)=۳$$

$$f\left(g(۲)\right)+g\left(f(۳)\right)=f(۲)+g(۳)=۳+۳=۶$$

۲۴ - گزینه ۴ در تابع همانی تمام زوج‌های مرتب دارای x و y برابر هستند. پس:

$$۳=a-۱\rightarrow a=۴\ ,\ \ \frac{b}{۲}=۲\rightarrow b=۴$$

$f(a-۳)+g(b+۱)=f(۱)+g(۵)=۵+۵=۱۰$

۲۵ - گزینه ۲ هر تابع خطی را به صورت $f(x)=ax+b$ نشان می‌دهند.

$$۵x+۲f(۱)=f(x)\to ۵x+۲(a+b)=ax+b\to ۵x+\underbrace{۲a+۲b}=ax+\underbrace{b}$$

$$\to\begin{cases}۵x=ax\to a=۵\\ ۲a+۲b=b\xrightarrow{a=۵}۱۰+۲b=b\to b=-۱۰\end{cases}$$

پس : $f(x)=۵x-۱۰\to f(۷)=۵(۷)-۱۰=۲۵$

۲۶ - گزینه ۱ در تابع ثابت، $f(x)=k$ است و چون ۲ $f(۵)=$ است بنابراین ۲ $f(x)=$ می‌باشد. در تابع همانی $g(x)=x$ است. (x و y با هم برابرند)

$$f(g(۳))+g(f(۱))=f(۳)+g(۲)=۲+۲=۴$$

۲۷ - گزینه ۳

$$f(x+۱)+f(۲x)=۴x-۱\to a(x+۱)+b+a(۲x)+b=۴x-۱$$

$$\to ax+a+b+۲ax+b=۴x-۱$$

$$\to ۳ax+a+۲b=۴x-۱\xrightarrow{\text{مقایسه کردن دو طرف}}\begin{cases}۳a=۴\to a=\frac{۴}{۳}\\ a+۲b=-۱\to\frac{۴}{۳}+۲b=-۱\to b=-\frac{۷}{۶}\end{cases}$$

بنابراین تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\frac{۴}{۳}x-\frac{۷}{۶}$ در می‌آید و واضح است که $f(x)-\frac{۴}{۳}x$ یک تابع ثابت است زیرا:

$$f(x)-\frac{۴}{۳}x=\frac{۴}{۳}x-\frac{۷}{۶}-\frac{۴}{۳}x=-\frac{۷}{۶}$$

۲۸ - گزینه ۱ تابع خطی به‌صورت $f(x)=ax+b$ نشان داده می‌شود این دو نقطه را در تابع صدق می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l}\left|\begin{array}{l}۱\\-۳\end{array}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}-۳=a+b\\ \left|\begin{array}{l}۳\\۵\end{array}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}۵=۳a+b\end{array}\right\}\Rightarrow a=۴,b=-۷$$

بنابراین: $f(x)=۴x?۷\to f(?۲)=?۸?۷=?۱۵$

۲۹ - گزینه ۱ تابع موردنظر را به فرم $f(x)=ax+b$ درنظر می‌گیریم، اکنون می‌توان نوشت:

$$f(x+۱)=a(x+۱)+b=ax+a+b\Rightarrow f(f(x+۱))=a(ax+a+b)+b=a^۲x+a^۲+ab+b$$

اکنون از تساوی $a^۲x+a^۲+ab+b=۹x-۳$ می‌توان دریافت:

$$a^۲=۹\xrightarrow{a<۰}a=-۳\Rightarrow f(x)=-۳x+b\Rightarrow f(۳)-f(۱)=(-۹+b)-(-۳+b)=-۶$$

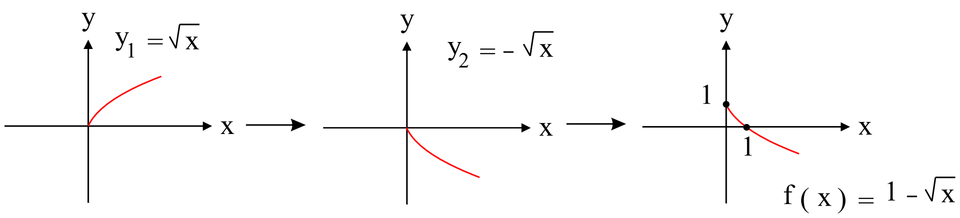
۳۰ - گزینه ۱ باتوجه به این‌که زوج مرتب‌های تابع همانی $(y=x)$، به‌صورت (x,x) هستند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases}a+b=۱\\ b+c=۲\xrightarrow{\text{جمع}}۲(a+b+c)=۶\Rightarrow a+b+c=۳\\ c+a=۳\end{cases}$$

۳۱ - گزینه ۴ تابع درجه‌ی دوم $y=ax^۲+bx+c$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی یک به یک نمی‌باشد پس در تابع داده شده باید ضریب $x^۲$ صفر باشد تا $x^۲$ از بین برود پس $a-۳=۰\to a=۳$ یعنی $f(x)=۲x-۳$ می‌باشد.

$$af(۳)=۳(۲(۳)-۳)=۹$$

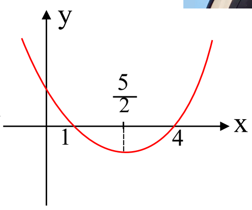
۳۲ - گزینه ۲ کافی است که تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ را رسم کنیم.



واضح است که این تابع، نزولی و یک به یک می‌باشد (نموداری معرّف تابع یک به یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند)

۳۳ - گزینه ۱ چون $x=۱$ و $x=۴$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $f(x)=۰$ می‌باشند بنابراین می‌توان، عبارت‌درجه‌ی دوم را به‌صورت $f(x)=(x-۱)(x-۴)$ نشان داد. بنابراین $a=۱$ و $b=۴$ می‌باشد.

$f(x)=x^۲-۵x+۴ \to x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\text{به شکل دقت کنید}}$



تابع درجه‌ی دوم در $(-\infty,\frac{۵}{۲}]$, $[\frac{۵}{۲},+\infty)$ یک‌به‌یک می‌باشد پس $c=\frac{۵}{۲}$ می‌باشد بنابراین $abc=(۱)(۴)(\frac{۵}{۲})=۱۰$ است.

توجه کنید که تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ در $x\le\frac{-b}{۲a}$, $x\ge\frac{-b}{۲a}$ یک‌به‌یک است.

۳۴ـ گزینه ۲

شرط تابع بودن $\to (۴,۲),(۴,a^۲-a) \Rightarrow a^۲-a=۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰$

$\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰ \Rightarrow a=۲\ ,\ a=-۱$

$a=-۱ \Rightarrow f=\{(۴,۲),(-۱,۵),(b,۲),(-۱,۴)\} \Rightarrow (-۱,۵)\in f\ ,\ (-۱,۴)\in f$

f تابع نمی‌باشد پس $a=-۱$ غیرقابل قبول است.

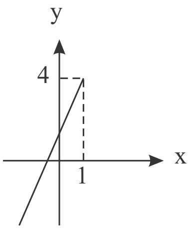
$a=۲ \Rightarrow f=\{(۴,۲),(۲,۵),(b,۲),(-۱,۴)\}$

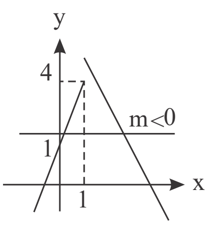
شرط یک‌به‌یک بودن $\Rightarrow (۴,۲),(b,۲) \Rightarrow b=۴ \Rightarrow (a,b)=(۲,۴)$

۳۵ـ گزینه ۲

نمودار قسمت اول تابع $(x\le ۱)$ به‌صورت روبه‌رو است. با توجه به این‌که قسمت دوم تابع نیز به‌صورت یک خط راست با شیب m می‌باشد، واضح است که m نباید منفی شود، زیرا اگر m منفی باشد، حالتی مانند نمودار دوم رخ می‌دهد که در این‌صورت می توان خطی موازی محور xها یافت که نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند. (رد گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴»)

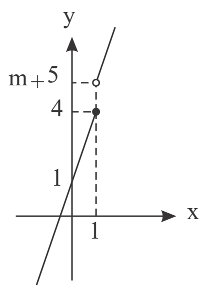
همچنین m نباید برابر با صفر شود زیرا در این‌صورت تابع ثابت خواهد شد و یک‌به‌یک نمی‌شود.





با شرط $m>۰$، نمودار تابع به‌صورت زیر می‌شود. برای آن‌که این نمودار مربوط به یک تابع یک‌به‌یک باشد، باید شرط $m+۵\ge ۴$ برقرار باشد که در نتیجه:

$$\begin{cases} m+۵\ge ۴ \Rightarrow m>-۱ \\ m>۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m>۰$$



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۴	۱۱ - ۳	۱۶ - ۴	۲۱ - ۳	۲۶ - ۱	۳۱ - ۴
۲ - ۱	۷ - ۴	۱۲ - ۱	۱۷ - ۳	۲۲ - ۱	۲۷ - ۳	۳۲ - ۲
۳ - ۴	۸ - ۳	۱۳ - ۲	۱۸ - ۳	۲۳ - ۱	۲۸ - ۱	۳۳ - ۱
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۲	۲۴ - ۴	۲۹ - ۱	۳۴ - ۲
۵ - ۲	۱۰ - ۲	۱۵ - ۲	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۱	۳۵ - ۲