



علی هاشمی

نام آزمون: الگوهای غیر خطی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- مجموع بی شمار جمله از دنباله‌ی اعداد $\frac{8}{3}, 4, 6, 9, \dots$ کدام است؟

۲- کارفرمایی با یک کارگر توافق کرده است که اجرت روز اول ۵۰۰ تومان باشد و تا پایان هفته، اجرت هر روز نسبت به روز قبل ۲۰ درصد افزایش داشته باشد. مجموع اجرت ۴ روز اول چه قدر است؟

۳- برای بی‌هوش نگه داشتن یک پرنده، ۳۰ میلی‌گرم دارو به ازای هر کیلوگرم وزن آن لازم است. نیمه عمر زوال دارو یک ساعت است. حداقل چه مقدار دارو برای بی‌هوش نگه داشتن پرنده‌ی ۳ کیلویی در مدت ۳۰ دقیقه به طور تقریبی لازم است؟ $(\sqrt{2} \sim 1,4)$

۴- در یک دنباله‌ی هندسی نامتناهی، مجموع جملات اول و چهارم برابر ۱۴ و مجموع جملات دوم و پنجم برابر ۷- است. حد مجموع این دنباله کدام است؟

۵- در یک دنباله‌ی هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول $\frac{1}{3}$ و نسبت مشترک $\frac{1}{3}$ ، حد مجموع جملات دنباله چقدر است؟



۶- در دنباله‌ی هندسی غیر کاهشی $\frac{8}{9}, \dots, x, 2$ ، مجموع تمام جملات چقدر است؟

۷- حد مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{3}$ برابر ۶ است. جمله‌ی سوم این دنباله کدام است؟

۸- در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت مثبت، مجموع جملات دوم و سوم، شش برابر جمله‌ی اول است. اگر جمله‌ی پنجم ۸ باشد، جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۹- در دنباله‌ی هندسی $k, k+1, k+3, \dots$ حد مجموع جملات کدام است؟

۱۰- قیمت هر بشکه نفت در حال حاضر ۵۰ دلار است. اگر در هر هفته ۱۰ درصد به قیمت هر بشکه نفت اضافه شود، پس از چهار هفته قیمت هر بشکه نفت تقریباً چند دلار است؟



۱۱- در یک دنباله هندسی $a_4 + a_5 = 32$ و $a_1 + a_2 = 4$ است. جمله اول دنباله کدام است؟

۱۲- در یک دنباله هندسی جمله دوم 36 و جمله سوم 24 است. حد مجموع بی‌شمار جمله این دنباله کدام است؟

۱۳- در یک دنباله هندسی جملات چهارم و هفتم به ترتیب 2 و 16 است. جمله پنجم کدام است؟

۱۴- در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک مثبت، مجموع جملات اول و دوم 9 برابر مجموع جملات سوم و چهارم است. حد مجموع جملات چند برابر جمله اول است؟

۱۵- در یک دنباله $a_{n+1} = 2a_n$ و $a_1 = 3$ است، مجموع ده جمله اول این دنباله کدام است؟

۱۶- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و دوم 6 و مجموع جملات سوم و چهارم 24 است. نسبت مشترک این دنباله کدام است؟



۱۷- حد مجموع جملات دنباله‌ی هندسی $10, 6, \frac{18}{5}, \dots$ کدام است؟

۱۸- در یک دنباله‌ی هندسی هر جمله $\frac{1}{3}$ جمله‌ی قبلی آن است. اگر مجموع چهار جمله‌ی اول آن 40 باشد، جمله‌ی سوم کدام است؟

۱۹- در دنباله‌ی هندسی $9, a, 4, \dots$ همه‌ی جملات مثبت هستند. حد مجموع جملات کدام است؟

۲۰- یک دنباله‌ی هندسی دارای 4 جمله است. مجموع دو جمله‌ی اول 3 و مجموع دو جمله‌ی آخر 48 است. نسبت مشترک دنباله کدام است؟

۲۱- جملات اول، سوم و هفتم یک دنباله‌ی حسابی غیر ثابت، تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. نسبت جمله‌ی اول به اختلاف مشترک دنباله‌ی حسابی کدام است؟



۲۲- مجموع n جمله‌ای اول از دنباله‌ی $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$ را S_n می‌نامیم. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ کدام است؟

۲۳- در یک دنباله‌ی هندسی هر جمله ۲ برابر جمله‌ی قبلی است. اگر جمله‌ی اول دنباله ۳ باشد، مجموع 10 جمله‌ی اول آن کدام است؟

۲۴- در یک دنباله‌ی حسابی غیر ثابت، جملات پنجم، هفتم و یازدهم تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. نسبت جمله‌ی اول به اختلاف مشترک در دنباله‌ی حسابی کدام است؟

۲۵- کدام دنباله بیانگر دنباله‌ی هندسی است؟

۲۶- در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع جملات اول و دوم -1 و مجموع جملات چهارم و پنجم 8 است. جمله‌ی سوم این دنباله کدام است؟

۲۷- در یک دنباله‌ی هندسی مجموع ده جمله‌ی اول 33 برابر مجموع پنج جمله‌ی اول می‌باشد. نسبت جمله‌ی هفتم به جمله‌ی سوم کدام است؟



۲۸- حد مجموع دنباله هندسی $9, 6, 4, \dots$ کدام است؟

۲۹- در یک دنباله هندسی، جمله چهارم 27 برابر جمله اول است. اگر جمله ششم برابر 486 باشد، مجموع شش جمله اول این دنباله کدام است؟

۳۰- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و دوم برابر $\frac{3}{8}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم برابر 3 است. در این دنباله، نسبت جمله مشترک به جمله اول کدام است؟

۳۱- اگر $a - 2, 5, b + 3$ هم سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و هم سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، $a + b$ کدام است؟

۳۲- کارفرمایی با یک کارگر توافق کرده است که اجرت روز اول او 32000 تومان باشد و تا پایان هفته اجرت هر روز او نسبت به روز قبل، 5% درصد افزایش یابد. مجموع اجرت 5 روز اول این کارگر چند تومان است؟



۳۳- در دنباله هندسی a_n حد مجموع جملات، ۳ برابر حد مجموع جملات با شماره‌ی زوج (a_2, a_4, a_6, \dots) می‌باشد. نسبت مشترک دنباله‌ی a_n کدام است؟

۳۴- اگر $\frac{1}{3}$ ، $\frac{\sqrt{x+2}}{3}$ و ۲ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار x کدام است؟

۳۵- جمله‌ی دهم دنباله‌ی هندسی $1, 2, 4, 8, \dots$ کدام است؟



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ ابتدا نسبت مشترک دنباله را بدست می آوریم:

$$r = \frac{\text{جملهی مابعد}}{\text{جملهی ماقبل}} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

اکنون با داشتن جملهی اول و نسبت مشترک، حد مجموع جملات را بدست می آوریم:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{۹}{1-\frac{۲}{۳}} = \frac{۹}{\frac{۱}{۳}} = ۲۷$$

۲ - گزینه ۳

جملهی اول: $a_1 = ۵۰۰$, $a_۲ = a_1 + \frac{۲۰}{۱۰۰}a_1 = a_1 + \frac{۱}{۵}a_1 = \frac{۶}{۵}a_1$

$$r = \frac{a_۲}{a_1} = \frac{\frac{۶}{۵}a_1}{a_1} = \frac{۶}{۵}$$

نوشتن جملات دنباله $\rightarrow ۵۰۰, \underbrace{\frac{۶}{۵} \times ۵۰۰}_{۶۰۰}, \underbrace{\frac{۶}{۵} \times ۶۰۰}_{۷۲۰}, \underbrace{\frac{۶}{۵} \times ۷۲۰}_{۸۶۴}$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۴ جملهی اول} = ۵۰۰ + ۶۰۰ + ۷۲۰ + ۸۶۴ = ۲۶۸۴$$

البته: برای یافتن مجموع جملات، می توان از رابطهی $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ هم استفاده کنید.

۳ - گزینه ۳

$$۳ \times ۳۰ = ۹۰$$

حداقل ۹۰ میلی گرم دارو برای بی هوش نگه داشتن پرنده لازم است.

چون ۳۰ دقیقه باید بی هوش باشد باید مقداری دارو تزریق شود که پس از ۳۰ دقیقه ۹۰ میلی گرم دارو در بدن پرنده باشد.

$$\text{ساعت } T = \frac{۳۰}{۶۰} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \text{یک ساعت } = \text{نیم عمر}$$

$$\left(\frac{1}{۲}\right)^T = b \Rightarrow b = \left(\frac{1}{۲}\right)^{\frac{1}{۲}} \Rightarrow \frac{1}{b} = ۲^{\frac{1}{۲}} = \sqrt{۲} \approx ۱,۴$$

اگر x مقدار داروی مورد نیاز باشد:

$$\frac{۹۰}{x} = b \Rightarrow \frac{x}{۹۰} = \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{x}{۹۰} \approx ۱,۴ \Rightarrow x \approx ۹۰ \times ۱,۴ = ۱۲۶$$

۴ - گزینه ۲ جمله n ام یک دنبالهی هندسی با جملهی اول a_1 و نسبت مشترک r برابر $a_n = a_1 r^{n-1}$ است و مجموع همهی جملات (حد مجموع) یک دنبالهی هندسی نامتناهی با جملهی اول

$$a_1 \text{ و نسبت مشترک } r \text{ (} |r| < 1 \text{) برابر } S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} \text{ است.}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_۲ = ۱۴ \\ a_۲ + a_۵ = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 r^۳ = ۱۴ \\ a_1 r + a_1 r^۴ = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1+r^۳) = ۱۴ \quad (I) \\ a_1 r(1+r^۳) = -۷ \quad (II) \end{cases}$$

$$\frac{(II) \div (I)}{\rightarrow} \frac{a_1 r(1+r^۳)}{a_1(1+r^۳)} = \frac{-۷}{۱۴} \Rightarrow r = -\frac{1}{۲}$$

$$\xrightarrow{(I)} a_1 \left(1 - \frac{1}{۸}\right) = ۱۴ \Rightarrow \frac{۷}{۸} a_1 = ۱۴ \Rightarrow a_1 = ۱۶$$

بنابراین حد مجموع این دنباله برابر است با:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{۱۶}{1+\frac{1}{۲}} = \frac{۱۶}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳۲}{۳}$$

۵ - گزینه ۲ حد مجموع (مجموع همهی جملات) یک دنبالهی هندسی نامتناهی با جملهی اول a_1 و نسبت مشترک r ($|r| < 1$) برابر $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$ است، بنابراین:

$$S_{\infty} = \frac{\frac{1}{۳}}{1-\frac{1}{۲}} = \frac{\frac{1}{۳}}{\frac{1}{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

۶ - گزینه ۲ مجموع همهی جملات (حد مجموع) یک دنبالهی هندسی نامتناهی با جملهی اول a و نسبت مشترک r ($|r| < 1$) برابر $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$ است. اگر a, b, c جملات متوالی یک



دنباله‌ی هندسی باشند آنگاه $b^r = ac$ است.

$$x^r = 2 \times \frac{8}{9} \Rightarrow x^r = \frac{16}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} ? \\ x = \frac{4}{3} \times \end{cases}$$

به ازای $x = \frac{4}{3}$ دنباله‌ی هندسی، کاهشی است، پس $x = \frac{4}{3}$ قابل قبول نیست.

$$r = \frac{x}{2} = \frac{-\frac{4}{3}}{2} = -\frac{2}{3} \rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{5}$$

۷ - گزینه ۳

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow 6 = \frac{a_1}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow 6 = \frac{a_1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow a_1 = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_r = a_1 r^r \Rightarrow a_r = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^r = 4 \times \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

۸ - گزینه ۴

در هر دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی a_1 و نسبت مشترک r ، جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$a_r + a_r = 6a_1 \Rightarrow a_1 r + a_1 r^r = 6a_1 \Rightarrow r^r + r = 6 \Rightarrow r^r + r - 6 = 0 \rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} r = -3 \text{ ق ق} \\ r = 2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$a_5 = 8 \Rightarrow a_1 r^5 = 8 \Rightarrow a_1 \times 16 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

۹ - گزینه ۳ اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه $b^r = ac$ است.

$k+1, k+3, k$ تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند، لذا:

$$k(k+3) = (k+1)^2 \Rightarrow k^2 + 3k = k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k = 1$$

بنابراین دنباله‌ی هندسی به صورت روبه‌رو است:

$$4, 2, 1, \dots \Rightarrow r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

۱۰ - گزینه ۱

توجه کنید که $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ است.

$$A_t = A_0 (1+r)^t \rightarrow A_r = 50(1+0.1)^r = 50(1.1)^r = 50 \times 1.4641 \approx 73.2 \text{ دلار}$$

$$\text{تذکر: } (1.1)^4 = (1.1)^2 \times (1.1)^2 = (1.21) \times (1.21) = 1.4641$$

۱۱ - گزینه ۳

در هر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$\begin{cases} a_r + a_5 = 32 \\ a_1 + a_r = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^r + a_1 r^5 = 32 \\ a_1 + a_1 r = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^r (1+r) = 32 \\ a_1 (1+r) = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} r^r = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$a_1 (1+r) = 4 \Rightarrow a_1 (1+2) = 4 \Rightarrow a_1 (3) = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3}$$

۱۲ - گزینه ۴

در هر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$\frac{a_r}{a_r} = \frac{24}{36} \rightarrow \frac{a_1 r^r}{a_1 r} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$a_r = 36 \Rightarrow a_1 r = 36 \Rightarrow a_1 \left(\frac{2}{3}\right) = 36 \Rightarrow a_1 = \frac{36}{\frac{2}{3}} = 54$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{54}{1-\frac{2}{3}} = \frac{54}{\frac{1}{3}} = 162$$



در هر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله‌ی m ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{16}{2} \Rightarrow \frac{a_1 r^3}{a_1 r^1} = 8 \Rightarrow r^2 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$a_2 = a_1 r^1 = 2 \xrightarrow{r=2} a_1 (2)^1 = 2 \Rightarrow a_1 (8) = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_5 = a_1 r^4 = \left(\frac{1}{4}\right)(2)^4 = \frac{16}{4} = 4$$

۱۴ - گزینه ۲ در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله‌ی m ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

$$a_1 + a_2 = 9(a_2 + a_3) \Rightarrow a_1 + a_1 r = 9(a_1 r^1 + a_1 r^2) \Rightarrow a_1(1+r) = 9a_1 r^1(1+r) \Rightarrow r^2 = \frac{1}{9} \xrightarrow{r>0} r = \frac{1}{3}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{a_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{a_1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}a_1 \Rightarrow \frac{S_{\infty}}{a_1} = \frac{3}{2}$$

$$a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

بنابراین دنباله، هندسی بوده و اختلاف مشترک آن ۲ است.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \rightarrow S_{10} = \frac{3(1-2^{10})}{1-2} = -3(1-1024) = -3(-1023) = 3069$$

در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و نسبت مشترک q ، جمله‌ی m ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 q^{n-1}$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 24 \\ a_1 + a_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^1 + a_1 r^2 = 24 \\ a_1 + a_1 r = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^1(1+r) = 24 \\ a_1(1+r) = 6 \end{cases}$$

حال طرفین رابطه‌ی بالا را بر طرفین رابطه‌ی پایین تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{a_1 r^1(1+r)}{a_1(1+r)} = \frac{24}{6} \Rightarrow r^1 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

$$10, 6, \frac{18}{5}, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 10 \\ r = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{10}{1-\frac{3}{5}} = \frac{10}{\frac{2}{5}} = \frac{10 \times 5}{2} = 25$$

۱۸ - گزینه ۲ در دنباله‌ی هندسی وقتی هر جمله $\frac{1}{3}$ جمله‌ی قبلی است، یعنی نسبت مشترک $r = \frac{1}{3}$ است.

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_4 = \frac{a_1(r^4 - 1)}{r - 1} \rightarrow 40 = \frac{a_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} \Rightarrow 40 = \frac{a_1\left(\frac{1}{81} - 1\right)}{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow 40 = \frac{a_1\left(-\frac{80}{81}\right)}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow 40 = \frac{a_1 \times 80 \times 3}{81 \times 2} \Rightarrow 40 = \frac{a_1 \times 40}{27} \Rightarrow 40 \times 27 = a_1 \times 40$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{40 \times 27}{40} = 27$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_2 = a_1 r^1 \Rightarrow a_2 = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 27 \times \frac{1}{3} \Rightarrow a_2 = 9$$

اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند آنگاه $b^2 = ac$ است.

$$9, a, 4 \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}} a^2 = 36 \rightarrow \begin{cases} a = 6 \text{ ق ق} \\ a = -6 \text{ ق غ} \end{cases}$$

$$\text{نسبت مشترک } \frac{a}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{9}{1-\frac{2}{3}} = \frac{9}{\frac{1}{3}} = 27$$

۲۰ - گزینه ۲

در هر دنباله هندسه با جمله اول a_1 و نسبت مشترک q ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ بدست می آید.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 3 \\ a_3 + a_6 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 q^2 = 3 \\ a_1 q^2 + a_1 q^5 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1+q) = 3 \\ a_1 q^2(1+q) = 48 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 q^2(1+q)}{a_1(1+q)} = \frac{48}{3} \Rightarrow q^2 = 16 \Rightarrow q = \pm 4$$

۲۱ - گزینه ۴

در هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می آید و اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند آن گاه $ac = b^2$ است.

دنباله هندسی

$$a_1, a_3, a_6 \Rightarrow a_1, a_1 + 2d, a_1 + 6d \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} a_1(a_1 + 6d) = (a_1 + 2d)^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 6a_1 d = a_1^2 + 4a_1 d + 4d^2 \Rightarrow 2a_1 d - 4d^2 = 0 \xrightarrow{\div 2d} a_1 - 2d = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 2d \Rightarrow \frac{a_1}{d} = 2$$

۲۲ - گزینه ۲

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \dots \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}, r = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

۲۳ - گزینه ۱

چون هر جمله، ۲ برابر جمله قبلی است بنابراین نسبت مشترک دنباله برابر ۲ است:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = S_{10} = \frac{3(1024 - 1)}{1} = 3069$$

۲۴ - گزینه ۱ در هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می آید و اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند آن گاه $b^2 = ac$ است.

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = a_1 + 4d \\ a_7 = a_1 + 6d \\ a_{11} = a_1 + 10d \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تشکیل دنباله هندسی می دهند}} a_7^2 = a_5 \times a_{11}$$

$$(a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 4d)(a_1 + 10d) \Rightarrow a_1^2 + 12a_1 d + 36d^2 = a_1^2 + 14a_1 d + 40d^2$$

$$4d^2 + 2a_1 d = 0 \Rightarrow 2d(2d + a_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \text{ غلط} \\ 2d + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -2d \Rightarrow \frac{a_1}{d} = -2 \end{cases}$$

۲۵ - گزینه ۳ دنباله ای بیانگر دنباله هندسی است که حاصل تقسیم هر دو جمله متوالی یکسان باشد، یعنی:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots$$

این شرط، فقط در گزینه سوم صدق می کند زیرا:

$$\frac{-1}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{-1}}{\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = \dots = -\frac{3}{2}$$

۲۶ - گزینه ۴

در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می آید.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = -1 \\ a_3 + a_6 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 r^2 = -1 \\ a_1 r^2 + a_1 r^5 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1+r) = -1 \\ r^2 \times \underbrace{a_1(1+r)}_{-1} = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -r^2 = 8 \Rightarrow r^2 = -8 \Rightarrow r = -2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} a_1 = 1 \Rightarrow a_3 = a_1 r^2 = 1 \times (-2)^2 = 4$$



در هر دنباله هندسی $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + r^n$ است.

$$\frac{S_{10}}{S_5} = 33 \Rightarrow 1 + r^5 = 33 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = r^3 = 2^3 = 8$$

۲۸ - گزینه ۲ حد مجموع (مجموع همه‌ی جملات) یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ($|r| < 1$) از رابطه $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ بدست می‌آید.

$$9, 6, 4, \dots \Rightarrow a_1 = 9, r = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{9}{1-\frac{2}{3}} = 27$$

۲۹ - گزینه ۱ در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ و مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ بدست می‌آید.

$$a_7 = 27a_1 \Rightarrow a_1 r^6 = 27a_1 \Rightarrow r^6 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$a_6 = 486 \Rightarrow a_1 r^5 = 486 \Rightarrow a_1 \times 3^5 = 486 \Rightarrow a_1 \times 243 = 486 \Rightarrow a_1 = 2$$

بنابراین مجموع شش جمله اول این دنباله هندسی برابر است با:

$$S_6 = \frac{2(1-3^6)}{1-3} = \frac{2(1-729)}{-2} = 729 - 1 = 728$$

۳۰ - گزینه ۳ در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت r ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$\begin{cases} a_1 + a_7 = \frac{3}{8} \Rightarrow a_1 + a_1 r^6 = \frac{3}{8} \Rightarrow a_1(1+r^6) = \frac{3}{8} & (I) \\ a_4 + a_8 = 3 \Rightarrow a_1 r^3 + a_1 r^7 = 3 \Rightarrow a_1 r^3(1+r^4) = 3 & (II) \end{cases}$$

با تقسیم دو طرف تساوی عبارت (II) بر عبارت (I) داریم:

$$r^3 = \frac{3}{\frac{3}{8}} = 8 \Rightarrow r = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در (I)}} a_1 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{r}{a_1} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$$

۳۱ - گزینه ۳ اگر a, b, c هم سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و هم سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a = b = c$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a - 2 = 5 \Rightarrow a = 7 \\ b + 3 = 5 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 9$$

۳۲ - گزینه ۲ ۵۰ درصد افزایش به روز قبل، یعنی اجرت روز قبل در ۵ ضرب شود. بنابراین اجرت کارگر یک دنباله هندسی با جمله اول ۳۲۰۰۰ و نسبت مشترک ۱٫۵ می‌باشد، پس مجموع ۵ جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{a_1(r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{32000 \times \left(\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{32000 \times \left(\frac{243}{32} - 1\right)}{\frac{1}{2}} = 32000 \times \frac{211}{16} = 422000$$

۳۳ - گزینه ۲ حد مجموع جملات یک دنباله هندسی نزولی نامحدود از رابطه $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$ بدست می‌آید.

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rightarrow a_1, a_1 r, a_1 r^2, \dots \rightarrow \text{حد مجموع} : S = \frac{a_1}{1-r} \\ a_2, a_4, a_6, \dots \rightarrow a_1 r, a_1 r^3, a_1 r^5, \dots \rightarrow \text{حد مجموع} : S' = \frac{a_1 r}{1-r^2} \end{cases}$$

طبق فرض $S = 3S'$ پس:

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{3a_1 r}{1-r^2} \Rightarrow \frac{a_1}{1-r} = \frac{3a_1 r}{(1-r)(1+r)} \Rightarrow 1 = \frac{3r}{1+r} \Rightarrow 1+r = 3r \Rightarrow 2r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

۳۴ - گزینه ۲ اگر a, b, c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = a \times c$ و b را واسطه هندسی بین a و c می‌نامیم.

$$\left(\frac{\sqrt{x+2}}{3}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x+2}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x+6 = 18 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

۳۵ - گزینه ۱ در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$a_1 = 1, r = \frac{a_7}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow a_{10} = a_1 r^9 = 1 \times 2^9 = 512$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۲ - ۳

۳ - ۳

۴ - ۲

۵ - ۲

۶ - ۲

۷ - ۳

۸ - ۴

۹ - ۳

۱۰ - ۱

۱۱ - ۳

۱۲ - ۴

۱۳ - ۱

۱۴ - ۲

۱۵ - ۲

۱۶ - ۳

۱۷ - ۴

۱۸ - ۲

۱۹ - ۱

۲۰ - ۲

۲۱ - ۴

۲۲ - ۲

۲۳ - ۱

۲۴ - ۱

۲۵ - ۳

۲۶ - ۴

۲۷ - ۱

۲۸ - ۲

۲۹ - ۱

۳۰ - ۳

۳۱ - ۳

۳۲ - ۲

۳۳ - ۲

۳۴ - ۲

۳۵ - ۱