



علی هاشمی

نام آزمون: الگوهای غیر خطی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- جملات $2x + 1$ ، $\sqrt{2x}$ و $x - 1$ ، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند. مجموع این سه جمله کدام است؟

$$۲-۱ \text{ اگر } \frac{3}{4} = \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x + \dots \text{ مقدار } x \text{ کدام است؟}$$

۳- در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی هفتم برابر ۱۹۲ و جمله‌ی چهارم برابر ۲۴ است. جمله‌ی دهم کدام است؟

۴- جمعیت یک کشور با رشد ثابت پس از گذشت ۴۰ سال ۴ برابر شده است. این جمعیت با همین رشد ثابت با گذشت ۶۰ سال چند برابر خواهد شد؟

۵- پس از مصرف داروی A بعد از هر ساعت میزان ماده‌ی مؤثر آن در خون نصف می‌شود. اگر شخصی ۱۰۰ میلی‌گرم از داروی A را مصرف کند، پس از چند ساعت میزان ماده‌ی مؤثر آن در خون کم‌تر از ۷ میلی‌گرم می‌شود؟



۶- اگر $a - 1, 8, -4, 2b, \dots$ جملات یک دنباله هندسی باشند، جمله هشتم این کدام است؟

۷- اگر رابطه بازگشتی یک دنباله به صورت $a_n = -2a_{n-1}$ و جمله سوم دنباله ۸- باشد، جمله اول دنباله کدام است؟

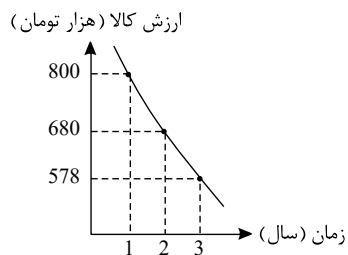
۸- شخصی ۲۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن ۴ ساعت است، مصرف کرده است. بعد از ۲۴ ساعت چند میلی گرم از آن در بدن این شخص باقی می ماند؟

۹- در یک دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$ مجموع جمله اول و نسبت مشترک کدام است؟

۱۰- جملات سوم و هشتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۳ و ۷۲۹ می باشد، جمله دوم کدام است؟



۱۱ - قیمت کالایی در سه سال اخیر مطابق نمودار زیر است. هزینه استهلاک این کالا هر سال معادل چند درصد ارزش سال قبل آن کالا است؟



۱۲ - در یک دنباله هندسی $a_3 = 16$ و $a_4 = 8a_7$ ، مجموع پنج جمله اول این دنباله چقدر است؟

۱۳ - عدد $(\frac{1}{27})^{-5}$ را به صورت عدد 3^n نوشته ایم، مقدار n کدام است؟

۱۴ - حاصل عبارت $A = (\sqrt[3]{2^7})^2 (\sqrt[6]{2^7})^2 + 2^{-0.6} \times (\frac{1}{4})^{0.2}$ کدام است؟

۱۵ - از تساوی $8 \times 2^{x+1} = (\frac{1}{2})^x$ مقدار x کدام است؟



۱۶- حاصل ضرب ریشه پنجم عدد 8^6 و ریشه دوم غیر مثبت عدد 4^8 کدام است؟

۱۷- اگر مجموع ریشه سوم $0.001a^6$ و ریشه چهارم مثبت 0.0016 برابر با یک باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱۸- اگر حجم کره ای برابر 36π باشد، طول قطر کره کدام است؟ $(\text{حجم کره به شعاع } r = \frac{4}{3}\pi r^3)$

۱۹- حاصل $(m^{-\frac{3}{4}} \times n^{\frac{1}{2}})^3 (m^4 n^{-2})^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

۲۰- حاصل عبارت $125^{\frac{4}{5}} \div 25^{\frac{3}{2}}$ کدام است؟

۲۱- کدام تساوی نادرست است؟



۲۲- حاصل $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times (0,75)^{-7} \times \left(\frac{9}{16}\right)^4$ کدام است؟

۲۳- مقدار تابع $y = (\sqrt{3})^x$ با افزایش مقدار x ، و مقدار تابع $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ با افزایش مقدار x ، می یابد.

۲۴- در تابع نمایی $f(x) = a^x$ ، اگر $f(b) = \frac{1}{4}$ و $f(0) = \frac{b}{2}$ باشد، مقدار $f(-2)$ کدام است؟

۲۵- اگر قیمت اولیه کالایی ۱۶ هزار تومان باشد و قیمت این کالا پس از دو سال برابر با ۲۵ هزار تومان گردد، نرخ تورم سالانه چند درصد است؟ (نرخ تورم سالانه ثابت است.)

۲۶- اگر $f(x) = 2^x$ باشد، حاصل $\frac{f(x+3)}{f(x-3)}$ کدام است؟



۲۷- نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$ کدام است؟

۲۸- برد تابع $f(x) = \begin{cases} 4^x & , x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x & , x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

۲۹- نقطه برخورد نمودار تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1}$ با محور عرض ها کدام است؟

۳۰- اگر $f(x) = 3^x$ و $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ باشند، حاصل $(f+g)(2)$ کدام است؟



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

نکته: اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، داریم: $b^2 = ac$
با استفاده از نکته‌ی بالا، داریم:

$$(\sqrt{2}x)^2 = (x-1)(2x+1) \Rightarrow 2x^2 = 2x^2 - 2x + x - 1 \Rightarrow -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$-2, -\sqrt{2}, -1$$

بنابراین جملات این دنباله عبارتند از:

$$-2 - \sqrt{2} - 1 = -3 - \sqrt{2}$$

در نتیجه مجموع این جملات برابر است با:

۲ - گزینه ۳ سمت چپ تساوی داده شده مجموع تمام جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول x و نسبت مشترک $(-\frac{1}{2})$ است. بنابراین:

$$x + (-\frac{1}{2}x) + (\frac{1}{4}x) + (-\frac{1}{8}x) + \dots = \frac{x}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2x}{3} \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow 8x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{8}$$

۳ - گزینه ۳ در هر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = 192 \Rightarrow a_1 r^3 = 192 \\ a_6 = 24 \Rightarrow a_1 r^5 = 24 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 r^3}{a_1 r^5} = \frac{192}{24} \Rightarrow r^2 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$a_1 r^3 = 24 \xrightarrow{r=2} a_1 \times 2^3 = 24 \Rightarrow a_1 \times 8 = 24 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$a_{10} = a_1 r^9 = 3 \times 2^9 = 3 \times 512 = 1536$$

۴ - گزینه ۳

$$A_t = A_0 (1+r)^t \Rightarrow 4A_0 = A_0 (1+r)^{40} \Rightarrow 4 = (1+r)^{40} \xrightarrow{\text{جذر}} 2 = (1+r)^{20}$$

$$A_t = A_0 (1+r)^{60} = A_0 ((1+r)^{20})^3 \rightarrow A_t = A_0 (2)^3 \Rightarrow A_t = 8A_0$$

۵ - گزینه ۴ نیمه‌ی عمر داروی A ، یک ساعت است بنابراین:

$$100 \text{ mg} \xrightarrow{1 \text{ ساعت}} 50 \text{ mg} \xrightarrow{1 \text{ ساعت}} 25 \text{ mg} \xrightarrow{1 \text{ ساعت}} 12,5 \text{ mg} \xrightarrow{1 \text{ ساعت}} 6,25 \text{ mg}$$

بنابراین بعد از ۴ ساعت مقدار دارو از 7 mg کم‌تر می‌شود.

۶ - گزینه ۳ اگر a, b, c جملات متوالی دنباله‌ی هندسی باشند $b^2 = ac$ است بنابراین:

$$a - 1, \lambda, -4, 2b, \dots$$

$$\lambda^2 = (a-1)(-4) \rightarrow 64 = -4a + 4 \rightarrow -4a = 60 \rightarrow a = -15$$

$$\text{جمله اول } a_1 = a - 1 \stackrel{a=-15}{=} -15 - 1 = -16$$

$$\text{نسبت مشترک } r = \frac{-4}{\lambda} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow a_8 = a_1 r^7 = -16 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^7 = -16 \times \frac{-1}{128} = \frac{1}{8}$$

۷ - گزینه ۱ باتوجه به $a_n = -2a_{n-1}$ دنباله هندسی است؛ پس نسبت مشترک برابر -2 است؛ $r = -2$

$$\text{جمله سوم } a_3 = a_1 r^2 = a_1 (-2)^2 = 4a_1 = -8 \Rightarrow a_1 = -2$$

۸ - گزینه ۱ چون نیمه‌ی عمر دارو ۴ ساعت است، پس بعد از هر ۴ ساعت مقدار آن نصف می‌شود:

$$200 \text{ mg} \xrightarrow{4 \text{ ساعت}} 100 \text{ mg} \xrightarrow{4 \text{ ساعت}} 50 \text{ mg} \xrightarrow{4 \text{ ساعت}} 25 \text{ mg} \xrightarrow{4 \text{ ساعت}} 12,5 \text{ mg} \xrightarrow{4 \text{ ساعت}} 6,25 \text{ mg} \xrightarrow{4 \text{ ساعت}} 3,125 \text{ mg}$$

۹ - گزینه ۲

چون جمله عمومی را داریم، ابتدا جمله اول و نسبت مشترک را به دست می‌آوریم.

$$n = 1 \rightarrow a_1 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3$$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$$



$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{مطلوب سوال: } a_1 + r = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} = 3,25$$

۱۰ - گزینه ۴

$$\begin{cases} a_8 = a_1 r^7 = 729 \\ a_7 = a_1 r^6 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{طرفین را بر هم تقسیم می‌کنیم.} \Rightarrow r^8 = 3^5 \Rightarrow r = 3 \xrightarrow{a_1 r^2 = 3} a_1 (3)^2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{جمله دوم } a_7 = a_1 r = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

۱۱ - گزینه ۲ اگر ارزش کالا در ۳ سال اخیر را بنویسیم با توجه به اینکه هزینه استهلاک کالا در هر سال $r\%$ سال قبل است، این جملات تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. (دنباله کاهشی است).
۸۰۰, ۶۸۰, ۵۷۸, ...

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{680}{800} = \frac{17}{20} \Rightarrow (1 - \frac{17}{20}) \times 100 = \frac{3}{20} \times 100 = 15\%$$

۱۲ - گزینه ۳

$$a_7 = 8a_6 \Rightarrow a_1 r^6 = 8 \times a_1 r^5 \Rightarrow 1 = 8r \Rightarrow r^6 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\text{از طرفی: } a_7 = a_1 r^6 = 16 \Rightarrow a_1 (\frac{1}{2})^6 = 16 \Rightarrow a_1 \times \frac{1}{64} = 16 \Rightarrow a_1 = 64$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_8 = \frac{64 \times (1 - (\frac{1}{2})^8)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{64 \times (1 - \frac{1}{256})}{\frac{1}{2}} = 128 \times \frac{255}{256} = 124$$

۱۳ - گزینه ۳

$$(\frac{1}{27})^{-5} = (3^{-3})^{-5} = 3^{15} \Rightarrow 3^n = 3^{15} \Rightarrow n = 15$$

۱۴ - گزینه ۱

$$(\sqrt[2]{2^y})^2 (\sqrt[6]{2^y})^2 = (2^{\frac{y}{2}})^2 (2^{\frac{y}{6}})^2 = 2^{\frac{14}{2}} \times 2^{\frac{14}{6}} = 2^{\frac{21}{3}} = 2^7 = 128$$

$$2^{-0,6} \times (\frac{1}{4})^{0,2} = 2^{-0,6} \times (2^{-2})^{0,2} = 2^{-0,6} \times 2^{-0,4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = 128 + \frac{1}{2} = 128,5$$

۱۵ - گزینه ۲

$$8 \times 2^{x+1} = 2^{-x} \Rightarrow 2^3 \times 2^{x+1} = 2^{-x} \Rightarrow 2^{x+4} = 2^{-x} \Rightarrow x+4 = -x \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

۱۶ - گزینه ۴ ریشه پنجم 8^6 برابر است با:

$$\sqrt[5]{8^6} = 8^{\frac{6}{5}} = (2^3)^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{18}{5}} = \sqrt[5]{2^{18}} \times 2^2 = 2^2 \sqrt[5]{2^{18}} = 8 \sqrt[5]{8}$$

ریشه دوم غیرمثبت 4^8 برابر است با:

$$-\sqrt{4^8} = -\sqrt{(2^2)^8} = -2^8$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌های خواسته شده} = (8 \sqrt[5]{8})(-2^8) = (2^3 \sqrt[5]{8})(-2^8) = -2^{11} \sqrt[5]{8}$$

۱۷ - گزینه ۴

$$\sqrt[3]{0,001a^6} = \sqrt[3]{\frac{a^6}{1000}} = \frac{a^2}{10}$$

ریشه سوم $0,001a^6$: ۰,۰۰۱



$$\sqrt[4]{0,0016} = \sqrt[4]{\frac{16}{10000}} = \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{10} + \frac{2}{10} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{10} = \frac{8}{10} \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \checkmark a > 0 \\ a = -2\sqrt{2} \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۱۸ - گزینه ۲

$$\text{حجم } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \xrightarrow{\times \frac{3}{4}} r^3 = 36 \times \frac{3}{4} = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$\Rightarrow \text{قطر} = 2r = 2(3) = 6$$

۱۹ - گزینه ۴

$$\left(m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(m^2n^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{1}{2}} \times m^2n^{-1} = m^{\frac{3}{2}+2}n^{\frac{1}{2}-1} = m^{\frac{7}{2}}n^{-\frac{1}{2}} = m^{\frac{7}{2}} \times n^{-\frac{1}{2}}$$

۲۰ - گزینه ۲

$$125^{\frac{4}{5}} \div 25^{\frac{2}{5}} = (5^3)^{\frac{4}{5}} \div (5^2)^{\frac{2}{5}} = 5^{\frac{12}{5}} \div 5^{\frac{4}{5}} = 5^{\frac{12}{5}-\frac{4}{5}} = 5^{\frac{8}{5}} = 5^{-\frac{3}{5}}$$

۲۱ - گزینه ۳ می دانیم اعداد منفی ریشه زوج ندارند $\Leftarrow (-4)^3$ نیز چون عدد منفی است ریشه زوج و در نتیجه ریشه هشتم ندارد.

۲۲ - گزینه ۲ می دانیم $\frac{3}{4} = 0,75$ و $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ است بنابراین:

$$A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2 \times 4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

۲۳ - گزینه ۲ در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد، با افزایش تعداد x افزایش می یابد و اگر $0 < a < 1$ باشد با افزایش مقدار x کاهش می یابد بنابراین خواهیم داشت:

$$y = (\sqrt{3})^x \xrightarrow{\sqrt{3} > 1} \text{افزایش می یابد.}$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \xrightarrow{0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1} \text{کاهش می یابد.}$$

۲۴ - گزینه ۴

$$f(x) = a^x \Rightarrow f(b) = a^b = \frac{1}{4} \quad (1), \quad f(0) = a^0 = 1 = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2 \quad (2)$$

رابطه (۲) را در (۱) جایگذاری می کنیم.

$$a^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$$

۲۵ - گزینه ۳ قیمت اولیه ۱۶۰۰۰ تومان است پس $A_0 = 16000$ و می دانیم قیمت پس از t سال از رابطه زیر به دست می آید:

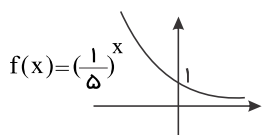
$$f(t) = A_0(1+r)^t \Rightarrow 25000 = 16000(1+r)^2 \Rightarrow (1+r)^2 = \frac{25000}{16000} = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow 1+r = \frac{5}{4} \Rightarrow r = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \rightarrow \text{نرخ تورم: } r \times 100 = \frac{1}{4} \times 100 = 25 \text{ درصد}$$

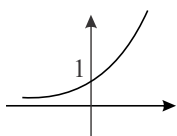
۲۶ - گزینه ۱

$$f(x) = 2^x \Rightarrow \begin{cases} f(x+3) = 2^{x+3} \\ f(x-3) = 2^{x-3} \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x+3)}{f(x-3)} = \frac{2^{x+3}}{2^{x-3}} = 2^6 = 64$$

۲۷ - گزینه ۱ راه حل اول: می دانیم نمودار $f(x) = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ به صورت زیر است:



و اگر بخواهیم $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$ را رسم کنیم باید نمودار را نسبت به محور y قرینه کنیم بنابراین خواهیم داشت:



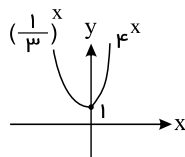
راه حل دوم:

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = 5^x$$

در رسم تابع $y = a^x$ وقتی که $a > 1$ باشد تابع رشد افزایشی دارد و از نقطه $(0, 1)$ عبور می کند در نتیجه نمودار آن گزینه ۱ می باشد.

۲۸ - گزینه ۲

بهتر است از روی رسم نمودار، حدود y یا برد را تعیین کنیم.



پس حدود y عبارت است از $y \geq 1$

۲۹ - گزینه ۳ برای یافتن نقطه برخورد تابع با محور عرض ها باید به جای x صفر قرار دهیم:

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4 \Rightarrow \text{نقطه برخورد } A(0, 4)$$

۳۰ - گزینه ۴

$$f(2) = 3^2 = 9$$

$$g(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4} = 9,25$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۳	۱۱ - ۲	۱۶ - ۴	۲۱ - ۳	۲۶ - ۱
۲ - ۳	۷ - ۱	۱۲ - ۳	۱۷ - ۴	۲۲ - ۲	۲۷ - ۱
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۳	۱۸ - ۲	۲۳ - ۲	۲۸ - ۲
۴ - ۳	۹ - ۲	۱۴ - ۱	۱۹ - ۴	۲۴ - ۴	۲۹ - ۳
۵ - ۴	۱۰ - ۴	۱۵ - ۲	۲۰ - ۲	۲۵ - ۳	۳۰ - ۴