



علی هاشمی

نام آزمون: الگوهای خطی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- در یک دنباله‌ی حسابی با اختلاف مشترک ۳، مجموع پانزده جمله‌ی اول ۲۱۰ است. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۲- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع  $n$  جمله‌ی اول از رابطه‌ی  $S_n = 3n^2 - 2n$  محاسبه می‌شود. جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

۳- میانگین بین جمله‌ی دهم و جمله‌ی بیستم دنباله‌ی حسابی  $\dots, -6, -8$  کدام است؟

۴- در یک دنباله‌ی حسابی که دارای ۱۵ جمله است، جمله‌ی هشتم برابر ۹ است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۵- مجموع بیست جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۷۱۰ و مجموع ۲۰ جمله‌ی بعدی آن ۱۹۱۰ است. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟



۶- در پنج جمله اول یک دنباله‌ی حسابی افزایشی، مجموع کل جملات برابر ۹۰ و مجموع دو جمله بزرگ‌تر با مجموع سه جمله کوچک‌تر برابر است. اختلاف مشترک این دنباله کدام است؟

۷- حاصل  $۱۰۰ + \dots + ۵۲ + ۵۱$  کدام است؟

۸- در یک دنباله‌ی حسابی، جملات دوم و پنجم به ترتیب برابر ۲۴ و ۸۴ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله کدام است؟

۹- مجموع ۵۰ جمله اول یک دنباله‌ی حسابی، ثلث مجموع ۵۰ جمله بعدی آن است. اختلاف مشترک این دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

۱۰- در دنباله‌ی حسابی  $۲, ۵, ۸, ۱۱, \dots$  مجموع ۱۵ جمله اول کدام است؟

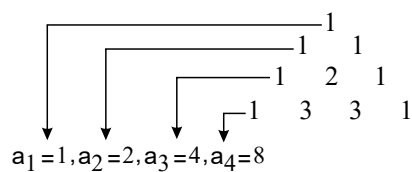
۱۱- مجموع اعداد  $۱۵۱, ۰, -۵, -۱۱, -۱۷, -۲۳$  کدام است؟



۱۲ - مجموع اعداد طبیعی دورقمی که بر ۴ بخش پذیرند، کدام است؟

۱۳ - مجموع اعداد طبیعی فرد و متوالی شروع از ۲۳ و ختم به ۶۱، کدام است؟

۱۴ - باتوجه به الگوی زیر، مجموع جمله های ششم و هفتم کدام است؟



۱۵ - اگر  $b_n = n + \frac{(-1)^n}{2n}$ ، آنگاه مجموع سه جمله ابتدایی این دنباله کدام است؟

۱۶ - اگر  $a_1 = 7$  و  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{7}{a_n})$ ، آنگاه  $a_3$  کدام است؟

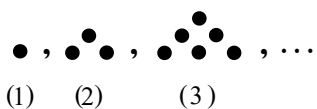


۱۷- نسبت جمله هشتم دنباله‌ای با جمله عمومی  $a_n = \frac{n^{(n-3)}}{n-1}$  (با فرض  $a_1 = 2$ ) به جمله دوم آن کدام است؟

۱۸- در دنباله‌ای  $a_1 = a_2 = 1$  و  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$  است. مجموع جمله‌های ششم، هفتم و هشتم این دنباله کدام است؟

۱۹- در یک دنباله با رابطه بازگشتی  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$  با فرض آن که جمله هفتم برابر با ۳۲ باشد، جمله اول کدام است؟

۲۰- در دنباله اعداد  $b_1 = 1, b_{n+1} = b_n + 2n + 1$  جمله سی‌ام کدام است؟



۲۱- مطابق شکل زیر، مجموع تعداد نقطه‌های شکل چهارم با تعداد نقطه‌های شکل پنجم این دنباله برابر ۳۸ است؟

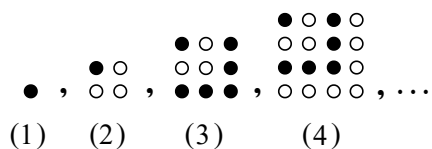
(1) (2) (3)



۲۲- در دنباله‌ای با جمله عمومی  $a_n = \frac{n^2 - n}{2n + 1}$  مجموع جملات سوم و هفتم کدام است؟

۲۳- در دنباله اعداد  $a_1 = 3$  و  $a_{n+1} = 4a_n - 1$  جمله چهارم کدام است؟

۲۴- در الگوی زیر تعداد دایره‌های توخالی در شکل چهاردهم کدام است؟





## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و اختلاف مشترک  $d$ ، مجموع  $n$  جمله‌ی اول از رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  بدست می‌آید.

$$S_{15} = 210 \Rightarrow \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = 210 \Rightarrow \frac{1}{2}(2a_1 + 14d) = 14$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(2(a_1 + 7d)) = 14 \Rightarrow a_1 + 7d = 14 \xrightarrow{d=3} a_1 + 21 = 14 \Rightarrow a_1 = -7$$

۲ - گزینه ۲ اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی باشد در این صورت  $a_n = S_n - S_{n-1}$  است.

$$S_n = 3n^2 - 2n \Rightarrow a_{10} = S_{10} - S_9 = (3 \times 10^2 - 2 \times 10) - (3 \times 9^2 - 2 \times 9)$$

$$= 280 - 225 = 55$$

۳ - گزینه ۱ در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و اختلاف مشترک  $d$ ، جمله‌ی  $n$ ام از رابطه‌ی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  بدست می‌آید.

$$-8, -6, \dots \Rightarrow d = (-6) - (-8) = 2$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -8 + 9 \times (2) = 10$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -8 + 9 \times (2) = 10$$

$$\text{میانگین جمله‌های دهم و بیستم} = \frac{10 + 30}{2} = 20$$

۴ - گزینه ۳ در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و نسبت مشترک  $d$ ، جمله‌ی  $n$ ام از رابطه‌ی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  و مجموع  $n$  جمله‌ی اول از رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  بدست می‌آید.

$$a_8 = a_1 + 7d = 9$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = \frac{15}{2}(2)(a_1 + 7d) = 15 \times a_8 = 15 \times 9 = 135$$

۵ - گزینه ۴ مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و اختلاف مشترک  $d$  برابر  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  است.

$$\begin{cases} S_{10} = 710 \\ S_{20} = 1910 + 710 = 2620 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{2}(2a_1 + 19d) = 710 \\ \frac{20}{2}(2a_1 + 39d) = 2620 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 19d = 71 & (1) \\ 2a_1 + 39d = 131 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(2)-(1)} 20d = 60 \Rightarrow d = 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری در (1)}} a_1 = 7$$

۶ - گزینه ۳ جمله‌ی  $n$ ام یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و اختلاف مشترک  $d$  به صورت  $a_n = a_1 + (n-1)d$  است.

مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و قدرنسبت  $d$  برابر  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  است.

چون  $a_n$  افزایشی است، پس دو جمله‌ی بزرگ‌تر  $a_6$  و  $a_8$  و سه جمله‌ی کوچک‌تر  $a_4$  و  $a_7$  و  $a_9$  است.

$$\begin{cases} S_5 = 90 \\ a_6 + a_8 = a_1 + a_7 + a_9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 90 \\ a_1 + 3d + a_1 + 4d = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(a_1 + 2d) = 90 \\ 2a_1 + 7d = 3a_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 18 \\ a_1 = 4d \end{cases} \Rightarrow 6d = 18 \Rightarrow d = 3$$

۷ - گزینه ۱ مجموع  $n$  عدد طبیعی با شروع از ۱ برابر  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  است.

$$\text{پس: } 51 + 52 + \dots + 100 = (1 + 2 + 3 + \dots + 100) - (1 + 2 + 3 + \dots + 50) = \frac{100 \times 101}{2} - \frac{50 \times 51}{2}$$

$$= 50 \times 101 - 25 \times 51 = 25(202 - 51) = 25 \times 151 = 3775$$

۸ - گزینه ۴ در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و اختلاف مشترک  $d$ ، جمله‌ی  $m$ ام از رابطه‌ی  $a_m = a_1 + (m-1)d$  و مجموع  $n$  جمله‌ی اول از رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  بدست می‌آید.

$$\begin{cases} a_7 = 24 \Rightarrow a_1 + d = 24 \\ a_8 = 14 \Rightarrow a_1 + 2d = 14 \end{cases} \Rightarrow 3d = 60 \Rightarrow d = 20 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(2 \times 4 + 14 \times 20) = 15 \times 144 = 2160$$



۹ - گزینه ۲ در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و اختلاف مشترک  $d$ ، مجموع  $n$  جمله‌ی اول از رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  به دست می‌آید.

$$a_1 + \dots + a_{50} = \frac{1}{3}(a_{51} + \dots + a_{100}) \Rightarrow S_{50} = \frac{1}{3}(S_{100} - S_{50})$$

$$\Rightarrow 3S_{50} = S_{100} - S_{50} \Rightarrow S_{100} = 4S_{50}$$

$$\Rightarrow \frac{100}{2}(2a_1 + 99d) = 4 \times \frac{50}{2}(2a_1 + 49d) \Rightarrow 2a_1 + 99d = 4a_1 + 98d$$

$$\Rightarrow d = 2a_1 \Rightarrow \frac{d}{a_1} = 2$$

۱۰ - گزینه ۲ مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و اختلاف مشترک  $d$  از رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  به دست می‌آید.

ابتدا داریم:

$$2, 5, 8, \dots: a_1 = 2, d = 5 - 2 = 3$$

$$\text{پس: } S_{15} = \frac{15}{2}(2 \times 2 + (15-1) \times 3) = 15 \times (2 + 21) = 345$$

۱۱ - گزینه ۴ این اعداد جملات یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $-23$  و قدرنسبت  $6$  هستند.

$$d = a_7 - a_1 = -17 - (-23) = 6$$

اول تعداد جملات دنباله را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\rightarrow 151 = -23 + (n-1)6 \Rightarrow 151 = -23 + 6n - 6 \Rightarrow 180 = 6n \Rightarrow n = 30$$

حال  $S_n$  (مجموع جملات دنباله) را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}(-23 + 151) = 15 \times 128 = 1920$$

۱۲ - گزینه ۱ جمله‌ی  $n$ ام یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و اختلاف مشترک  $d$  از رابطه‌ی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  به دست می‌آید.

مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و جمله‌ی  $n$ ام برابر  $a_n$  برای  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$  است.

اعداد دو رقمی که بر ۴ بخش پذیرند، عبارتند از:

$$12, 16, 20, \dots, 96$$

این اعداد یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۱۲ و اختلاف مشترک ۴ تشکیل می‌دهند. اکنون تعداد این اعداد را به دست می‌آوریم:

$$a_n = 96 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 96 \Rightarrow 12 + (n-1) \times 4 = 96$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{96-12}{4} = \frac{84}{4} = 21 \Rightarrow n = 22$$

بنابراین مجموع این ۲۲ جمله برابر است با:

$$S_{22} = \frac{22}{2}(a_1 + a_{22}) = \frac{22}{2}(12 + 96) = 11 \times 108 = 1188$$

۱۳ - گزینه ۲

دنباله ۶۱، ۲۵، ۲۳، یک دنباله‌ی حسابی است. بنابراین:

$$a_1 = 23, d = 2, a_n = 61$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow 61 = 23 + (n-1) \times 2$$

$$\Rightarrow 61 - 23 = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow 38 = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow n-1 = 19 \Rightarrow n = 20$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(23 + 61) = 10 \times 84 = \boxed{840}$$



$$\begin{aligned} a_1 &\leftarrow 1 \\ a_2 &\leftarrow 1 \quad 1 \\ a_3 &\leftarrow 1 \quad 2 \quad 1 \\ a_4 &\leftarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ a_5 &\leftarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ a_6 &\leftarrow 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ a_7 &\leftarrow 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{aligned}$$

$$a_6 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

مجموع اعداد در جمله ششم برابر:

$$a_7 = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

مجموع اعداد در جمله هفتم برابر:

$$a_6 + a_7 = 32 + 64 = 96$$

بنابراین مجموع جملات شش و هفت برابر:

۱۵ - گزینه ۳ کافی است سه جمله ابتدایی دنباله را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} n=1 &\Rightarrow b_1 = 1 + \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \\ n=2 &\Rightarrow b_2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \\ n=3 &\Rightarrow b_3 = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{17}{6} = \frac{6 + 27 + 34}{12} = \frac{67}{12}$$

۱۶ - گزینه ۴ با استفاده از رابطه بازگشتی داده شده، جملات دوم و سوم را به دست می آوریم:

$$n=1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{7}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 7 + \frac{7}{1} \right) = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

$$n=2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \left( a_2 + \frac{7}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left( 7 + \frac{7}{7} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{23}{1} = \frac{23}{2}$$

۱۷ - گزینه ۳

جمله هشتم و جمله دوم را به دست می آوریم:

$$n=7 \Rightarrow a_8 = \frac{7^5}{\frac{7}{2}} = \frac{7 \times 7^5}{7} = 7^5$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{2^{-1}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین: } \frac{a_8}{a_2} = \frac{7 \times 7^5}{\frac{1}{2}} = \frac{7 \times 2^{12}}{2^{-2}} = 7 \times 2^{14}$$

۱۸ - گزینه ۳ طبق رابطه  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$  به این نتیجه می رسیم که در این دنباله هر جمله برابر است با جمع ۲ جمله قبل از خود، بنابراین خواهیم داشت:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots \Rightarrow a_6 + a_7 + a_8 = 8 + 13 + 21 = 42$$

۱۹ - گزینه ۳ طبق رابطه داده شده، در دنباله مورد نظر، هر جمله تقسیم بر جمله قبل از خود ۲ است، کافی است از جمله هفتم به عقب برگردیم تا به جمله اول برسیم:

$$\frac{a_7}{a_6} = 2 \Rightarrow \frac{32}{a_6} = 2 \Rightarrow a_6 = 16$$

$$\frac{a_6}{a_5} = 2 \Rightarrow \frac{16}{a_5} = 2 \Rightarrow a_5 = 8 \Rightarrow \frac{a_5}{a_4} = 2 \Rightarrow \frac{8}{a_4} = 2 \Rightarrow a_4 = 4 \Rightarrow \frac{a_4}{a_3} = 2 \Rightarrow \frac{4}{a_3} = 2 \Rightarrow a_3 = 2 \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = 2 \Rightarrow \frac{2}{a_2} = 2 \Rightarrow a_2 = 1 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = 2 \Rightarrow \frac{1}{a_1} = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

۲۰ - گزینه ۳ در این گونه دنباله های نا آشنا، چند جمله اول را می نویسیم و بررسی می کنیم که می توانیم به رابطه ای پی ببریم یا خیر.

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = b_1 + 2(1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4 \rightarrow 2^2$$

$$b_3 = b_2 + 2(2) + 1 = 4 + 5 = 9 \rightarrow 3^2$$

$$b_4 = b_3 + 2(3) + 1 = 9 + 7 = 16 \rightarrow 4^2$$

$$\text{بنابراین خواهیم داشت } b_n = n^2 \Rightarrow b_{30} = 30^2 = 900$$

۲۱ - گزینه ۲ ابتدا سعی می کنیم الگوی تعداد نقطه ها را به دست آوریم:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2 = \frac{2 \times 3}{2} = 3$$

$$a_3 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$





یادآوری:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$a_4 = \frac{4 \times 5}{2} = 10$  و  $a_4 + a_n = 38 \Rightarrow a_n = 38 - 10 = 28$

$\Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n+1) = 56 = 7 \times 8 \Rightarrow n = 7$

۲۲ - گزینه ۱ کافی است به جای  $n$  اعداد ۳ و ۷ را جایگذاری کنیم:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= \frac{3^2 - 3}{2(3) + 1} = \frac{6}{7} \\ a_7 &= \frac{7^2 - 7}{2(7) + 1} = \frac{42}{15} = \frac{14}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_3 + a_7 = \frac{6}{7} + \frac{14}{5} = \frac{128}{35}$$

۲۳ - گزینه ۴

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 4a_1 - 1 = 4(3) - 1 = 11$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 4a_2 - 1 = 4(11) - 1 = 43$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 4a_3 - 1 = 4(43) - 1 = 171$

۲۴ - گزینه ۴ باتوجه به شکل‌ها مشاهده می‌کنیم، تعداد کل دایره‌ها در هر مرحله مجذور شماره مرحله است و از طرفی داریم:

دایره‌های توپر  $\Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$  در شکل‌های با مرحله فرد

دایره‌های توخالی  $\Rightarrow a'_n = \frac{n(n+1)}{2}$  در شکل‌های با مرحله زوج

بنابراین  $a'_{14} = \frac{14 \times 15}{2} = 7 \times 15 = 105$

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۵ - ۴

۹ - ۲

۱۳ - ۲

۱۷ - ۳

۲۱ - ۲

۲ - ۲

۶ - ۳

۱۰ - ۲

۱۴ - ۱

۱۸ - ۳

۲۲ - ۱

۳ - ۱

۷ - ۱

۱۱ - ۴

۱۵ - ۳

۱۹ - ۳

۲۳ - ۴

۴ - ۳

۸ - ۴

۱۲ - ۱

۱۶ - ۴

۲۰ - ۳

۲۴ - ۴