نام آزمون: آمار توصیفی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - داده‌های $x_i = 1,2,3,4,5$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i = 12x_i + 6$ کدام است؟

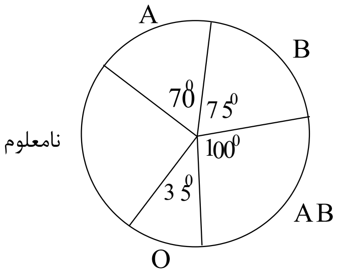
۲ - در دسته‌بندی داده‌های آماری، مناسب‌ترین مقداری که می‌توانیم به هر یک از افراد یک دسته نسبت دهیم، کدام است؟

۳ - مقادیر ۱۲۰ دادهٔ آماری، در بازهٔ $[23, 59]$ می‌باشند. این داده‌ها در ۹ طبقه، دسته‌بندی شده‌اند. اگر مجموع فراوانی‌های دو دستهٔ آخر ۱۵ باشد، چند درصد داده‌ها کمتر از ۵۱، هستند؟

۴ - در یک جدول فراوانی شامل ۱۵ داده، زاویه‌ی دسته‌ی اول در نمودار دایره‌ای برابر ۷۲ درجه است. چند داده به داده‌های دسته‌ی اول اضافه کنیم تا زاویه‌ی این دسته در نمودار دایره‌ای برابر 90° شود؟

۵ - پانزده دادهٔ آماری با واریانس ۱۲ و ده دادهٔ آماری دیگر با واریانس ۷٫۶ را با هم ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین هر دو گروه یکسان باشند، انحراف معیار ۲۵ دادهٔ حاصل کدام است؟

۶ - نمودار دایره‌ای روبه‌رو، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲ نفر از آنان تعیین نشده است. چند نفر از آنها، دارای نوع خون B هستند ؟



۷ - در ۵۰ دادهٔ آماری مجموع تمام داده‌ها برابر ۱۰۰ و مجموع مجذورات این داده‌ها برابر ۲۷۲ می‌باشد ضریب تغییرات کدام است؟

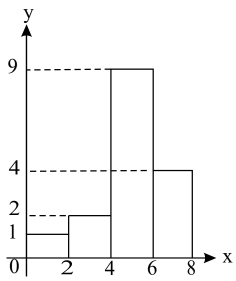
۸ - واریانس داده‌های ۷۲،۷۲،۷۳،۷۴،۷۵،۷۵،۹۱ ،تقریباً کدام است؟

۹ - داده های جدول مقابل، داده‌های آماری پیوسته است، چند درصد داده‌ها، در فاصله‌ی [۱۸٫۵ , ۲۱٫۵) قرار دارند؟

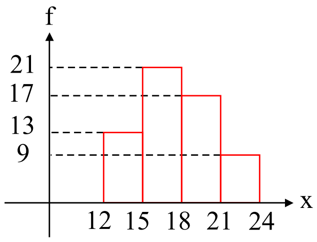
مرکز دسته	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
فراوانی تجمعی	۵	۱۳	۲۵	۳۴	۴۰

۱۰ - در یک سری داده‌ی آماری، میانگین برابر ۰٫۶ و ضریب تغییرات برابر ۳ است. میانگین مجذورات این داده‌ها کدام است؟

۱۱ - در شکل زیر، نمودار مستطیلی یک سری داده‌ی آماری پیوسته‌ی دسته‌بندی شده، رسم شده است. ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟



۱۲ - از داده‌های آماری با نمودار مستطیلی مقابل، سه داده‌ی ۱۴ و ۱۶ و ۱۶ حذف شده است. در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید، بزرگترین زاویه‌ی مرکزی نظیر دسته‌ها، چند درجه است؟



۱۳ - جمع‌آوری داده‌ها به کدام طریق مورد قبول نیست؟

۱۴ - میانگین ۵۰ دادهٔ دسته‌بندی‌شدهٔ زیر با روش سریع کدام است؟

x	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
F	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

۱۵ - جدول زیر، زاویه‌ی مرکزی هر دسته در داده‌های پیوسته‌ی دسته‌بندی شده را نشان می‌دهد. میانگین داده‌ها کدام است؟

حدود دسته‌ها	$[۲,۶)$	$[۶,۱۰)$	$[۱۰,۱۴)$	$[۱۴,۱۸]$
زاویه‌ی مرکزی	۷۲°	α	۱۴۴°	۳۶°

۱۶ - واریانس ۵ دادهٔ آماری برابر صفر است. اگر سه دادهٔ ۵ ,۸ ,۱۰ را به داده‌ها اضافه کنیم، میانگین داده‌ها ۶ می‌شود. واریانس کل ۸ داده کدام است؟

۱۷ - اگر مجموع ۲۰ داده‌ی آماری برابر ۱۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها برابر ۱۶۰۰ باشد، اختلاف واریانس و انحراف معیار این داده‌ها کدام است؟

۱۸ - داده‌های آماری در ۹ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. فراوانی تجمعی نسبی در دسته‌ی چهارم و پنجم به‌ترتیب ۰٫۲۸ و ۰٫۴۰ است. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی پنجم چند درجه است؟

۱۹ - اگر ۲۰ دادهٔ آماری را دو برابر کرده و سپس ۷ واحد از هرکدام کم کنیم، ضرب تغییرات داده‌های جدید، ۱٫۵ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع داده‌های قبلی کدام است؟

۲۰ – هشت داده‌ی آماری با میانگین ۱۱ و انحراف معیار $\sqrt{10}$ داریم. اگر یک داده‌ی جدید با مقدار ۲ به آن‌ها اضافه شود واریانس کل ۹ داده‌ی حاصل تقریباً کدام است؟

۲۱ – در ۶۰۰ داده‌ی آماری با میانگین ۳۶، به سه برابر هر یک از داده‌ها ۵ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

۲۲ – در داده‌های ۲۰، ۱۷، ۲۱، ۲۳، ۲۲، ۲۰، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۲۱، ۲۴ و ۲۰، میانگین مقادیر چارک اول، میانه و مد تقریباً کدام است؟

۲۳ – سه داده‌ی آماری با میانگین ۶ مفروض است. اگر داده‌ی ۲ به آن‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات ۴ داده‌ی موجود ۱٫۲ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع مربعات ۳ داده‌ی اولیه کدام است؟

۲۴ – یک سری داده‌ی آماری به ۱۲ دسته با طول یکسان دسته‌بندی شده‌اند. حدود دسته‌ی اول $[17, 21)$ است. اگر مجدداً این داده‌ها به ۸ دسته با طول یکسان دسته‌بندی شوند، مرکز دسته‌ی سوم در دسته‌بندی جدید کدام است؟ (در هر دو دسته‌بندی، کران پایین دسته‌ی اول و کران بالای دسته‌ی آخر به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها هستند.)

۲۵ - جدول مقابل درصد نمرات داوطلبی با ضرایب متفاوت است. اگر حداقل میانگین برای پذیرش ۷۵ باشد. حداقل نمرهٔ ادبیات وی برای پذیرش کدام است؟

درس	ادبیات فارسی	معارف	زبان	اختصاصی
درصد نمره	?	۹۰	۸۱	۷۰
ضریب	۴	۲	۳	۸

۲۶ - ضریب تغییرات در داده‌های آماری، ۰٫۸ محاسبه شده است. اگر به هر دادهٔ مفروض ۵ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات حاصل ۰٫۰۷۵ خواهد شد. میانگین داده‌های اولیه کدام است؟

۲۷ - انحراف معیار اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ چند برابر انحراف معیار اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ است؟

۲۸ - اگر میانگین و واریانس داده‌های x_1، $x_2, \dots$ و x_{10} به ترتیب برابر ۴ و ۵ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $3x_1+2$، $3x_2+2, \dots$ و $3x_{10}+2$ کدام است؟

۲۹ - در دسته‌بندی ۱۳۵ داده‌ی آماری در ۱۵ طبقه، حدود دسته‌ی چهارم به صورت $[74, 77)$ است. اگر این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شوند، کران پایین دسته‌ی آخر، کدام است؟

۳۰ - جدول مقابل، درصد فراوانی تجمعی در گروه‌های سنّی مختلف در یک جامعه را نشان می‌دهد. در نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مربوط به سطح گروه سنی بین ۲۰ و ۳۰ سال چند درجه است؟

کران بالای سن	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۱۲۰
درصد فراوانی تجمعی	۱۷	۳۶	۵۱	۷۰	۱۰۰

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ ابتدا ضریب تغییرات داده‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را حساب می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{۱+۲+۳+۴+۵}{۵} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{N}^{i=۱}(x_i-\bar{x})^۲ = \frac{۱}{۵}((۱-۳)^۲+(۲-۳)^۲+(۳-۳)^۲+(۴-۳)^۲+(۵-۳)^۲)$$

$$= \frac{۱}{۵}(۴+۱+۰+۱+۴) = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \rightarrow \sigma = \sqrt{۲} \sim ۱٫۴$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱٫۴}{۳}$$

حال اگر داده‌ها را ۱۲ برابر کنیم میانگین و انحراف‌معیار نیز ۱۲ برابر می‌شوند و اگر ۶ واحد به داده‌ها اضافه کنیم، انحراف‌معیار تغییر نمی‌کند و به میانگین ۶ واحد اضافه می‌شود.

$$C_{V_{\text{جدید}}} = \frac{۱۲ \times ۱٫۴}{(۱۲\times ۳)+۶} = \frac{۱۶٫۸}{۴۲} = ۰٫۴$$

۲ - گزینه ۱ مرکز دسته یا نماینده‌ی دسته، مناسب‌ترین مقداری است که به هر یک از افراد دسته نسبت می‌دهیم.

۳ - گزینه ۲

$$R = Max - Min = ۵۹ - ۲۳ = ۳۶\ ,\ C = \frac{R}{n} = \frac{۳۶}{۹} = ۴$$

بنابراین ۹ دسته به‌صورت زیر هستند.

$$\underbrace{[۲۳,۲۷)\ ,\ [۲۷,۳۱)\ ,\ [۳۱,۳۵)\ ,\ [۳۵,۳۹)\ ,\ [۳۹,۴۳)\ ,\ [۴۳,۴۷)\ ,\ [۴۷,۵۱)}_{x}\quad ,\quad \underbrace{[۵۱,۵۵),[۵۵,۵۹]}_{۱۵}$$

$$\text{تعداد داده‌های کمتر از ۵۱} = x \rightarrow x+۱۵ = ۱۲۰ \rightarrow x = ۱۲۰-۱۵ = ۱۰۵$$

$$\text{درصد داده‌های کمتر از ۵۱} = \frac{x}{۱۲۰}\times ۱۰۰ = \frac{۱۰۵}{۱۲۰}\times ۱۰۰ = ۸۷٫۵$$

۴ - گزینه ۴

$$d_i = \frac{۳۶۰}{N}\times F_i \rightarrow ۷۲ = \frac{۳۶۰}{۱۵}\times F_i \rightarrow F_i = ۳$$

اگر تعداد داده‌های اضافه شده به دسته‌ی اول را x بنامیم داریم:

$$۹۰ = \frac{۳۶۰}{x+۱۵}(۳+x) \rightarrow ۱ = \frac{۴(x+۳)}{x+۱۵} \rightarrow x+۱۵ = ۴x+۱۲ \rightarrow ۳x = ۳ \rightarrow x = ۱$$

۵ - گزینه ۲ طبق رابطهٔ واریانس خواهیم داشت:

$$\sigma_۱{}^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲ \Rightarrow ۱۲ = \frac{۱}{۱۵}\sum_{i=۱}^{۱۵}(x_i-\bar{x})^۲ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۵}(x_i-\bar{x})^۲ = ۱۸۰$$

$$\sigma_۱{}^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲ \Rightarrow ۷٫۶ = \frac{۱}{۱۰}\sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i-\bar{x})^۲ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i-\bar{x})^۲ = ۷۶$$

باتوجه به اینکه میانگین هر دو دسته، یکسان است پس وقتی آنها را با هم ترکیب کنیم، میانگین تغییر نمی‌کند و فقط تعداد داده‌ها، ۲۵ می‌شود.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲ \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۱}{۲۵}\sum_{i=۱}^{۲۵}(x_i-\bar{x})^۲ = \frac{۱}{۲۵}(۱۸۰+۷۶) = \frac{۲۵۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{۲۵۶}{۲۵}} = \frac{۱۶}{۵} = ۳٫۲$$

۶ - گزینه ۲ جمع زوایا در نمودار دایره‌ای برابر ۳۶۰° است.

$$۷۰+۷۵+۱۰۰+۳۵+x = ۳۶۰^\circ \rightarrow x = ۸۰^\circ$$

$$d_i = \frac{۳۶۰}{N}F_i \rightarrow ۸۰ = \frac{۳۶۰}{N}\times ۳۲ \rightarrow N = \frac{۳۶۰\times ۳۲}{۸۰} = ۱۴۴ : \text{تعداد کل افراد}$$

$$d_i = \frac{۳۶۰}{N}F_i \rightarrow ۷۵ = \frac{۳۶۰}{۱۴۴}F_i \rightarrow F_i = \frac{۷۵\times ۱۴۴}{۳۶۰} = ۳۰$$

البته پس از پیدا کردن زاویه‌ی ۸۰° می‌توان، با یک تناسب مسأله را حل کرد.

تعداد زاویه

۸۰° ۳۲

۷۵° $x \to F_B = \frac{۳۲ \times ۷۵}{۸۰} = ۳۰$

۷ - گزینه ۴

میانگین این داده‌ها برابر $۲ = \frac{۱۰۰}{۵۰} = \bar{x}$ است.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \to \sigma^۲ = \frac{۲۷۲}{۵۰} - (۲)^۲ = \frac{۱۳۶}{۲۵} - ۴ = \frac{۳۶}{۲۵} \to \sigma = \frac{۶}{۵}$$

$$c_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{۶}{۵}}{۲} = \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$$

۸ - گزینه ۲ برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۷۴ واحد کم می‌کنیم. (اگر به تمام داده‌ها مقدار ثابتی اضافه یا کم کنیم در واریانس تغییری ایجاد نمی‌شود)

$$-۲, -۲, -۱, ۰, ۱, ۱, ۱۷$$

$$\bar{x} = \frac{-۲ - ۲ - ۱ + ۱ + ۱ + ۱۷}{۷} = \frac{۱۴}{۷} = ۲$$

$$\delta^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۷}((-۲-۲)^۲ + (-۲-۲)^۲ + (-۱-۲)^۲ + (۰-۲)^۲ + (۱-۲)^۲ + (۱-۲)^۲ + (۱۷-۲)^۲)$$

$$= \frac{۲۷۲}{۷} \sim ۳۸/۸$$

۹ - گزینه ۳

$$(۱۸/۵, ۲۱/۵) \Rightarrow \text{مرکز دسته} = \frac{۱۸/۵ + ۲۱/۵}{۲} = \frac{۴۰}{۲} = ۲۰$$

طرح سوال درصد فراوانی نسبی دسته‌ای که مرکز دسته‌ی آن ۲۰ می‌باشد را خواسته است.

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \text{فراوانی نسبی} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{درصدفراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{۲۵ - ۱۳}{۴۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۲}{۴۰} \times ۱۰۰ = ۳۰$$

دقت کنید فراوانی تجمعی آخرین طبقه در جدول برابر تعداد کل داده‌ها است. و اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته‌ی iام و $(i+۱)$ام فراوانی مطلق دسته‌ی $(i+۱)$ام را می‌دهد.

۱۰ - گزینه ۳ دقت کنید که میانگین مجذورات داده‌ها $\frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N}$ است.

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow ۳ = \frac{\sigma}{۰/۶} \Rightarrow \sigma = ۱/۸ \Rightarrow \sigma^۲ = ۳/۲۴$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \Rightarrow ۳/۲۴ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - ۰/۳۶ \Rightarrow \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} = ۳/۲۴ + ۰/۳۶ = ۳/۶$$

۱۱ - گزینه ۱

ابتدا از روی نمودار، جدول فراوانی را رسم می‌کنیم.

حدود دسته‌ها	$[۰, ۲)$	$[۲, ۴)$	$[۴, ۶)$	$[۶, ۸]$
فراوانی مطلق	۱	۲	۹	۴
مرکز دسته‌ها	۱	۳	۵	۷

ابتدا باید میانگین را حساب کنیم.

$$\bar{x} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i x_i = \frac{۱}{۱۶}((۱ \times ۱) + (۳ \times ۲) + (۵ \times ۹) + (۷ \times ۴)) = \frac{۸۰}{۱۶} = ۵$$

حال، واریانس را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i\,(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۱۶}(۱(۱-۵)^۲ + ۲(۳-۵)^۲ + ۹(۵-۵)^۲ + ۴(۷-۵)^۲) = \frac{۴۰}{۱۶} = ۲/۵ \to \sigma = \sqrt{۲/۵}$$

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۲/۵}}{۵} = \frac{\sqrt{۲۵ \times ۰/۱}}{۵} = \frac{۵\sqrt{۰/۱}}{۵} = \sqrt{۰/۱} = \sqrt{\frac{۱}{۱۰}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

۱۲ - گزینه ۳ ابتدا با توجه به نمودار مستطیلی، جدول فراوانی را می‌نویسیم.

حدود دسته‌ها	۱۲ − ۱۵	۱۵ − ۱۸	۱۸ − ۲۱	۲۱ − ۲۴
فراوانی مطلق	۱۳	۲۱	۱۷	۹

اگر داده‌های ۱۴ و ۱۶ و ۱۶ را حذف کنیم یک داده از دسته‌ی اول و دو داده از دسته‌ی دوم کم می‌شوند پس جدول فراوانی جدید به این صورت است:

حدود دسته‌ها	۱۲ − ۱۵	۱۵ − ۱۸	۱۸ − ۲۱	۲۱ − ۲۴
فراوانی مطلق	۱۲	۱۹	۱۷	۹

$\rightarrow N = ۱۲ + ۱۹ + ۱۷ + ۹ = ۵۷$

و می‌دانیم بزرگترین زاویه‌ی مرکزی در نمودار دایره‌ای مربوط به دسته‌ای است که فراوانی مطلق آن بیشتر است. (دسته‌ی دوم)

$$di = \frac{۳۶۰}{N} \times F_i = \frac{۳۶۰}{۵۷} \times ۱۹ = ۱۲۰^\circ$$

۱۳ - گزینه ۴ در جمع‌آوری داده‌ها نباید از پرسش‌های هدایت‌کننده استفاده کنیم.

۱۴ - گزینه ۲ برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۲۰ واحد کم می‌کنیم.

$x_i - ۱۲۰$	-۱۰	-۴	۲	۸	۱۴
F_i	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

$$\bar{x} - ۱۲۰ = \frac{۱}{۵۰}((-۱۰ \times ۵) + (-۴ \times ۸) + (۲ \times ۱۵) + (۸ \times ۱۲) + (۱۴ \times ۱۰))$$

$$= \frac{۱}{۵۰}(-۵۰ - ۳۲ + ۳۰ + ۹۶ + ۱۴۰) = \frac{۱۸۴}{۵۰} = ۳/۶۸ \rightarrow \bar{x} = ۱۲۰ + ۳/۶۸ = ۱۲۳/۶۸$$

۱۵ - گزینه ۳

مجموع تمام زوایا در نمودار دایره‌ای برابر ۳۶۰° می‌باشد. $۷۲^\circ + \alpha + ۱۴۴^\circ + ۳۶^\circ = ۳۶۰^\circ \rightarrow \alpha = ۱۰۸^\circ$

می‌دانیم: $d_i = \frac{۳۶۰}{N}F_i \rightarrow d_i = ۳۶۰ f_i \rightarrow f_i = \frac{d_i}{۳۶۰}$

یعنی با تقسیم زوایا بر ۳۶۰ می‌توانیم فراوانی نسبی هر دسته را بدست آوریم.

حدود دسته‌ها	$[۲,۶)$	$[۶,۱۰)$	$[۱۰,۱۴)$	$[۱۴,۱۸]$
فراوانی نسبی	$\frac{۲}{۱۰}$	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$
مرکز دسته‌ها	۴	۸	۱۲	۱۶

میانگین را می‌توان از مجموع حاصل‌ضرب فراوانی نسبی هر دسته در مرکز آن دسته بدست آورد.

$$\bar{x} = ۴(\frac{۲}{۱۰}) + ۸(\frac{۳}{۱۰}) + ۱۲(\frac{۴}{۱۰}) + ۱۶(\frac{۱}{۱۰}) = \frac{۹۶}{۱۰} = ۹/۶$$

۱۶ - گزینه ۲ چون واریانس ۵ دادهٔ آماری برابر صفر است پس همهٔ آنها با هم برابرند؛ بنابراین می‌توان آنها را به‌صورت a, a, a, a, a نشان داد. با اضافه کردن این سه داده، هشت داده به این صورت خواهند شد: $a, a, a, a, a, ۵, ۸, ۱۰$

$$\bar{x} = \frac{a + a + a + a + a + ۵ + ۸ + ۱۰}{۸} = ۶ \rightarrow ۵a + ۲۳ = ۴۸ \rightarrow ۵a = ۲۵ \rightarrow a = ۵$$

حال، باید واریانس داده‌های $۵, ۵, ۵, ۵, ۵, ۵, ۸, ۱۰$ را حساب کنیم که میانگینشان هم ۶ است.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۸}(۶(۵ - ۶)^۲ + (۸ - ۶)^۲ + (۱۰ - ۶)^۲) = \frac{۲۶}{۸} = \frac{۱۳}{۴} = ۳/۲۵$$

۱۷ - گزینه ۱

$$\bar{x} = \frac{۱۴۰}{۲۰} = ۷ \quad , \quad x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + \cdots + x_{۲۰}^۲ = ۱۶۰۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ = \frac{۱۶۰۰}{۲۰} - (۷)^۲ = ۸۰ - ۴۹ = ۳۱ \rightarrow \sigma = \sqrt{۳۱}$$

بنابراین اختلاف واریانس و انحراف معیار برابر $۳۱ - \sqrt{۳۱}$ است.

۱۸ - گزینه ۴ اختلاف فراوانی تجمعی نسبی دو دسته‌ی iاُم و $(i+۱)$اُم، فراوانی نسبی دسته‌ی $(i+۱)$اُم را می‌دهد.

فراوانی نسبی دسته‌ی پنجم $= ۰/۴۰ - ۰/۲۸ = ۰/۱۲$

$d_i = \frac{۳۶۰}{N} \times F_i = ۳۶۰ \times$ فراوانی نسبی $= ۳۶۰ \times ۰/۱۲ = ۴۳/۲$

۱۹ - گزینه ۱ وقتی داده‌های آماری را دو برابر کنیم، انحراف‌معیار و میانگین نیز دو برابر می‌شوند و وقتی از داده‌ها ۷ واحد کم می‌کنیم انحراف‌معیار تغییر نمی‌کند ولی از میانگین ۷ واحد کم می‌شود.

$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$, $CV_{\text{جدید}} = \frac{۲\sigma}{۲\bar{x} - ۷}$

طبق سؤال: $CV_{\text{جدید}} = ۱٫۵ CV_{\text{قدیم}} \to \frac{۲\sigma}{۲\bar{x} - ۷} = ۱٫۵ \times \frac{\sigma}{\bar{x}} \to \frac{۲}{۲\bar{x} - ۷} = \frac{۱٫۵}{\bar{x}}$

$\to ۳\bar{x} - ۱۰٫۵ = ۲\bar{x} \to \bar{x} = ۱۰٫۵$

$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \to ۱۰٫۵ = \frac{x}{۲۰} \to x = ۲۱۰$

۲۰ - گزینه ۴

$\bar{x} = ۱۱ \to \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۸}{۸} = ۱۱ \to x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۸ = ۸۸ \to \sum_{i=۱}^{۸} x_i = ۸۸$

$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \to ۱۰ = \frac{\sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲}{۸} - ۱۲۱ \to \frac{\sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲}{۸} = ۱۳۱ \to \sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲ = ۱۰۴۸$

با اضافه کردن داده‌ی جدید $x = ۲$ داریم:

مجموع داده‌ها در حالت جدید $= ۸۸ + ۲ = ۹۰ \to \sum_{i=۱}^{۹} x_i = ۹۰$

مجموع مربعات داده‌ها در حالت جدید $= ۱۰۴۸ + ۲^۲ = ۱۰۵۲ \to \sum_{i=۱}^{۹} x_i^۲ = ۱۰۵۲$

$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \to \sigma^۲ = \frac{۱۰۵۲}{۹} - (\frac{۹۰}{۹})^۲ = \frac{۱۰۵۲}{۹} - ۱۰۰ = \frac{۱۵۲}{۹} \sim ۱۶٫۹$

۲۱ - گزینه ۱ می‌دانیم $C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ است و توجه کنید که اگر تمام داده‌ها ۳ برابر شوند انحراف معیار و میانگین نیز ۳ برابر می‌شوند و اگر به داده‌ها ۵ واحد اضافه کنیم انحراف معیار تغییری نمی‌کند ولی به میانگین ۵ واحد اضافه می‌شود.

$C_{V_{\text{قدیم}}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$, $C_{V_{\text{جدید}}} = \frac{۳\sigma}{۳\bar{x} + ۵}$

پس: $\frac{C_{V_{\text{جدید}}}}{C_{V_{\text{قدیم}}}} = \frac{\frac{۳\sigma}{۳\bar{x} + ۵}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{۳\bar{x}}{۳\bar{x} + ۵} = \frac{۱۰۸}{۱۱۳}$

۲۲ - گزینه ۲ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$۱۵, ۱۷, \underbrace{۱۷, ۱۸}_{Q=۱۷٫۵}, ۲۰, ۲۰, ۲۰, ۲۱, \underbrace{۲۱, ۲۲}_{Q_۳=۲۱٫۵}, ۲۳, ۲۴$

چارک اول برابر ۱۷٫۵، مد برابر ۲۰ و میانه نیز برابر ۲۰ است و میانگین این سه مقدار برابر است با:

$\frac{۱۷٫۵ + ۲۰ + ۲۰}{۳} = \frac{۵۷٫۵}{۳} = ۱۹٫۱۶$

۲۳ - گزینه ۲

$x_۱, x_۲, x_۳ \to \frac{x_۱ + x_۲ + x_۳}{۳} = ۶ \to x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۸$

اگر داده‌ی ۲ به این ۳ داده اضافه شود میانگین این ۴ داده برابر $۵ = \frac{۲۰}{۴}$ می‌شود.

$C_{V_{\text{جدید}}} = ۱٫۲ C_{V_{\text{قدیم}}} \to \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{۵} = ۱٫۲ \frac{\sigma_{\text{قدیم}}}{۶} \to \sigma_{\text{جدید}} = \sigma_{\text{قدیم}} \to \sigma^۲_{\text{جدید}} \to \sigma^۲_{\text{قدیم}}$

$\frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + ۴}{۴} - ۲۵ = \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲}{۳} - ۳۶$

با فرض $x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ = A$ داریم:

$\frac{A + ۴}{۴} - ۲۵ = \frac{A}{۳} - ۳۶ \to \frac{A}{۳} - \frac{A + ۴}{۴} = ۱۱ \xrightarrow{\times ۱۲} ۴A - ۳A - ۱۲ = ۱۳۲$

$\to A = ۱۴۴ \to x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ = ۱۴۴$

توجه کنید که واریانس از رابطه‌ی $\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - \bar{x}^۲$ نیز محاسبه می‌شود.

۲۴ - گزینه ۳

طول دسته‌ها: $۲۱ - ۱۷ = ۴ \Rightarrow R = ۴ \times ۱۲ = ۴۸$ (دامنه‌ی تغییرات)

طول دسته‌های جدید $= \frac{۴۸}{۸} = ۶ \Rightarrow$ دسته‌ی سوم جدید $= [۲۹, ۳۵)$

$\Rightarrow$ مرکز دسته‌ی سوم جدید $= \frac{۳۵ + ۲۹}{۲} = ۳۲$

۲۵ - گزینه ۳ وقتی گفته می‌شود که حداقل میانگین برای پذیرش ۷۵ است یعنی $\bar{x} \geq ۷۵$ است.

$$\bar{x} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} F_i x_i \rightarrow \frac{۱}{۴ + ۲ + ۳ + ۸}(۴x + (۲ \times ۹۰) + (۳ \times ۸۱) + (۸ \times ۷۰)) \geq ۷۵$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۱۷}(۴x + ۱۸۰ + ۲۴۳ + ۵۶۰) \geq ۷۵ \rightarrow \frac{۴x + ۹۸۳}{۱۷} \geq ۷۵$$

$$\rightarrow ۴x + ۹۸۳ \geq ۱۲۷۵ \rightarrow ۴x \geq ۱۲۷۵ - ۹۸۳ \rightarrow ۴x \geq ۲۹۲ \rightarrow x \geq \frac{۲۹۲}{۴} \rightarrow x \geq ۷۳$$

بنابراین حداقل نمرهٔ ادبیات باید ۷۳ باشد.

۲۶ - گزینه ۳ ابتدا CV قدیم را در نظر می‌گیریم:

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow ۰/۰۸ = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \sigma = ۰/۰۸\bar{x}$$

اگر به تمام داده‌ها ۵ واحد اضافه شود انحراف‌معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین، ۵ واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + ۵} \rightarrow ۰/۰۷۵ = \frac{۰/۰۸\bar{x}}{\bar{x} + ۵} \rightarrow \frac{۷۵}{۱۰۰۰} = \frac{\frac{۸}{۱۰۰}\bar{x}}{\bar{x} + ۵} \rightarrow ۸۰\bar{x} = ۷۵\bar{x} + ۳۷۵$$

$$\rightarrow ۵\bar{x} = ۳۷۵ \rightarrow \bar{x} = \frac{۳۷۵}{۵} = ۷۵$$

۲۷ - گزینه ۳ برای حل سوال با کمی دقت می‌توان فهمید که داده‌های دسته دوم، همان داده‌های دسته‌های اول می‌باشد که دو برابر شده است. باید توجه داشت، هرگاه همه داده‌ها را k برابر کنیم، واریانس $k^۲$ برابر و انحراف معیار $|k|$ برابر خواهد شد. بنابراین انحراف معیار داده‌های دسته دوم ۲σ می‌باشد و داریم:

$$\frac{\sigma}{۲\sigma} = \frac{۱}{۲}$$

۲۸ - گزینه ۱ قبل حل سوال توجه داشته باشید، اگر میانگین، انحراف معیار و واریانس $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ برابر $\bar{x}$ و $\sigma^۲$ باشد، میانگین، انحراف معیار و واریانس $ax_۱ + b, ax_۲ + b, \cdots, ax_n + b$ برابر است با $a\bar{x} + b$، $|a|\sigma$ و $\sigma^۲$.

لذا می‌توان میانگین، انحراف معیار و واریانس $۳x_i + ۲$ به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\bar{x'} = ۳\bar{x} + ۲ = ۳(۵) + ۲ = ۱۷$$

$$\sigma' = |۳|\sigma = ۳ \times \sqrt{۴} = ۶$$

پس ضریب تغییرات داده‌های $۳x_i + ۲$ برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{۶}{۱۷}$$

۲۹ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{ll} n = ۱۵ & \text{تعداد دسته ها} \\ C = ۷۷ - ۷۴ = ۳ & \text{طول دسته} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{دامنه‌ی تغییرات} = R = n \cdot C = ۳ \times ۱۵ = ۴۵$$

از طرفی داریم:

ماکسیم داده‌ها $=$ کران بالای دسته‌ی آخر (۱۵اُم) $=$ کران بالای دسته‌ی چهارم $+ (۱۵ - ۴)C = ۷۷ + ۱۱ \times ۳ = ۱۱۰$

باید دانست که با تغییر طول دسته یا تعداد دسته‌ها، دامنه‌ی تغییرات تغییر نمی‌کند.

حال با تغییر تعداد طبقات داریم:

طول دسته‌ی جدید $C' = \frac{R}{n'} = \frac{۴۵}{۹} = ۵$

کران پایین دسته‌ی آخر $=$ ماکسیمم داده‌ها $- C' = ۱۱۰ - ۵ = ۱۰۵$

۳۰ - گزینه ۲ اولاً چون کران بالای دسته‌ها مشخص شده است، پس گروه سنی بین ۲۰ و ۳۰ سال (دارای کران بالای ۳۰ است) همان دسته‌ی سوم می‌باشد. بنابراین به دنبال زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی سوم داده‌ها در نمودار دایره‌ای می‌باشیم.

از طرفی می‌توان درصد فراوانی هر دسته را از تفاضل درصد فراوانی تجمعی آن دسته و دسته‌ی ماقبل آن به دست آورد، بنابراین:

درصد فراوانی دسته‌ی سوم $= ۵۱ - ۳۶ = ۱۵ \Rightarrow$ فراوانی نسبی دسته‌ی سوم $= \frac{۱۵}{۱۰۰} = ۰/۱۵$

زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی سوم : $d_۳ = \underbrace{\frac{F_۳}{N}}_{\text{فراوانی نسبی}} \times ۳۶۰^\circ = ۰/۱۵ \times ۳۶۰^\circ = ۵۴^\circ$

پاسخنامه کلیدی

(۱) - ۱	(۶) - ۲	(۱۱) - ۱	(۱۶) - ۲	(۲۱) - ۱	(۲۶) - ۳
(۲) - ۱	(۷) - ۴	(۱۲) - ۳	(۱۷) - ۱	(۲۲) - ۲	(۲۷) - ۳
(۳) - ۲	(۸) - ۲	(۱۳) - ۴	(۱۸) - ۴	(۲۳) - ۲	(۲۸) - ۱
(۴) - ۴	(۹) - ۳	(۱۴) - ۲	(۱۹) - ۱	(۲۴) - ۳	(۲۹) - ۴
(۵) - ۲	(۱۰) - ۳	(۱۵) - ۳	(۲۰) - ۴	(۲۵) - ۳	(۳۰) - ۲