



علی هاشمی

نام آزمون: احتمال

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- در کیسه‌ای ۲ مهره‌ی سفید و k مهره‌ی سیاه داریم. دو مهره به تصادف پشت سر هم و با جایگذاری از کیسه انتخاب می‌کنیم. اگر احتمال غیرهمرنگ بودن مهره‌ها ۴۸ درصد باشد، k کدام است؟

۲- کلمه‌ی پنج حرفی با حروف کلمه‌ی "حفاظت" می‌نویسیم. احتمال این که در این کلمه حرف وسط نقطه‌دار باشد، کدام است؟

۳- مطالعات ژنتیکی نشان داده است که ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده‌ی عامل RH خون منفی‌اند. احتمال این که در خانواده‌ای دومین فرزند با RH منفی، فرزند سوم خانواده باشد، تقریباً کدام است؟

۴- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم اعداد ظاهر شده یکسان هستند، احتمال آنکه مجموع آن‌ها ۶ باشد، کدام است؟

۵- تاسی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه اعداد ظاهر شده، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند، کدام است؟



۶- دو تاس متمایز را پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه دقیقاً یکی از اعداد ظاهر شده اول باشد، کدام است؟

۷- سه تاس متمایز را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل یکی از اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۸- از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ، به تصادف سه عدد انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مجموع اعداد انتخاب شده، عددی زوج باشد، کدام است؟

۹- اگر $P(A|B) = \frac{1}{4}$ ، حاصل $P(A'|B)$ چند برابر $P(A|B)$ است؟

۱۰- از بین ۱۸ کارت که روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۱۸ درج شده است، دو کارت را به طور متوالی و با جای‌گذاری برمی‌داریم. احتمال آن که اعداد هر دو کارت فرد باشند، کدام است؟

۱۱- در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی سیاه، ۳ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی زرد موجود است. از این کیسه به تصادف ۳ مهره برمی‌داریم. احتمال آن که هر سه مهره هم‌رنگ باشند، چقدر است؟



۱۲- دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر هستند. اگر $P(B') = \frac{3}{4}$ و $P(A') = \frac{2}{3}$ ، حاصل $P(A \cup B)$ چند برابر $P(A \cap B)$ است؟

۱۳- در آزمایشی، یک تاس را پرتاب می‌کنیم. در صورتی که عدد ۶ بیاید، دو سکه پرتاب می‌کنیم و در غیر این صورت یک سکه پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱۴- از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ، یک زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این زیرمجموعه فاقد عدد ۱ باشد، کدام است؟

۱۵- می‌دانیم ۴۰ درصد زن‌های تعیین‌کننده RH خون، منفی است. با کدام احتمال در خانواده‌ای با ۲ فرزند، RH خون هر دو فرزند، منفی است؟

۱۶- خانواده‌ای دارای ۷ فرزند است. احتمال آن که تعداد فرزندان پسر در این خانواده، عددی فرد باشد، کدام است؟



۱۷- اگر $P(A|B') = \frac{3}{5}$ و $P(B'|A) = \frac{5}{7}$ ، حاصل $\frac{1 - P(A')}{1 - P(B)}$ کدام است؟

۱۸- سکه‌ای را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا ۳ بار "رو" بیاید. احتمال آن که در پرتاب هفتم سومین "رو" ظاهر شود، کدام است؟

۱۹- سه تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم اعداد ظاهر شده متمایز هستند، احتمال آن که هر سه عدد رو شده کمتر از ۵ باشند، کدام است؟

۲۰- از بین ۵ دانشجوی سال اولی، ۴ دانشجوی سال دومی و ۳ دانشجوی سال سومی سه نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که تنها یک دانشجوی سال دومی و حداکثر ۱ دانشجوی سال اولی انتخاب شود، کدام است؟

۲۱- در ظرف A ، ۵ مهره‌ی زرد و ۳ مهره‌ی نارنجی و در ظرف B ، ۴ مهره‌ی زرد و ۲ مهره‌ی نارنجی وجود دارد. از هر یک از ظرف‌ها، ۲ مهره خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد که تمام مهره‌های خارج شده هم‌رنگ نباشند؟



۲۲- در یک کلاس ۶۰ درصد به تنیس و ۲۵ درصد به شیمی علاقه‌مند هستند. یک دانش آموز از این کلاس با کدام احتمال به شیمی یا تنیس علاقه‌مند است؟

۲۳- یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم، اگر بدانیم مجموع ارقام ظاهر شده ۸ است، با کدام احتمال هر دو رقم فرد هستند؟

۲۴- از کیسه‌ای شامل ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه، مهره‌ها را به طور متوالی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌ی سوم سیاه است؟

۲۵- در پرتاب ۳ سکه با هم، چقدر احتمال دارد حداقل دو سکه رو بیاید؟

۲۶- در جامعه‌ای ۶۰ درصد افراد، راست دست و ۳۵ درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند. با کدام احتمال یک فرد از این جامعه راست دست یا دارای گروه خونی O است؟

۲۷- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است که در بین آن‌ها هم پسر و هم دختر وجود دارد. با کدام احتمال این خانواده دقیقاً یک دختر دارد؟



۲۸- از کیسه‌ای حاوی ۴ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه، مهره‌ها را یکی یکی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌ی دوم سفید است؟

۲۹- در بین ۴ نفر، با کدام احتمال هیچ دو نفری در یک روز هفته متولد نشده‌اند؟

۳۰- در بین ۳ نفر، با کدام احتمال حداقل ۲ نفر در روز یکسانی از هفته متولد شده‌اند؟



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ احتمال غیرهمرنگ بودن مهره‌ها برابر است با:

اولی سفید، دومی سیاه یا بالعکس

$$P(A) = 2 \times \frac{2k}{(k+2)(k+2)} = \frac{48}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{4k}{(k+2)^2} = \frac{12}{25} \Rightarrow 25k = 3(k+2)^2 \Rightarrow 3k^2 - 13k + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (3k-4)(k-3) = 0 \Rightarrow k = \frac{4}{3} \text{ یا } k = 3 \text{ (می‌توانید از راه } \Delta \text{ هم ریشه‌ها را حساب کنید)}$$

مقدار $k = 3$ قابل قبول است.

۲ - گزینه ۲

$$n(S) = 5! = 120 \text{ تعداد کل کلمات ۵ حرفی}$$

این کلمه دارای سه حرف نقطه دار است که قرار است در وسط کلمه قرار گیرند.

{ق،ظت}

$$\boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} \rightarrow n(A) = 72$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0.6$$

۳ - گزینه ۲ احتمال اینکه RH خون فردی منفی باشد آن است که دو ژن منفی داشته باشد.

$$P(RH^-) = \frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = 0.16, \quad P(RH^+) = 1 - 0.16 = 0.84$$

اگر دومین فرزند با RH خون منفی بخواهد فرزند سوم باشد یعنی در بین دو فرزند اول، RH خون یکی از آن دو منفی است.

$$\text{احتمال مطلوب} = \underbrace{(0.84)(0.16)(0.16)}_{\text{اولی RH مثبت و دومی RH منفی و سومی RH منفی}} + \underbrace{(0.16)(0.84)(0.16)}_{\text{اولی RH منفی و دومی RH مثبت و سومی RH منفی}} = 0.043008$$

۴ - گزینه ۲

$$S_{\text{جدید}} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{(3,3)\} \rightarrow n(A) = 1$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{1}{6} \text{ است.}$$

۵ - گزینه ۳

فضای نمونه برابر $n(S) = 6^5$ است.

برای آنکه اعداد ظاهر شده در پرتاب تاس‌ها تشکیل یک دنباله‌ی هندسی بدهند تنها حالت ممکن آن است که هر ۵ عد ظاهر شده یکسان باشند (دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۱) که شش حالت

$$\text{دارد. پس } P(A) = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4}$$

۶ - گزینه ۳

$$n(S) = 6^2 = 36$$

برای آنکه دقیقاً یکی از اعداد ظاهر شده، اول باشد دو حالت داریم:

حالت ۱ $3 \times 3 = 9 \rightarrow$ تاس دوم عدد اول نیاید و تاس اول عددی اول بیاید $\underbrace{\hspace{2cm}}_{2,3,5}$

حالت ۲ $3 \times 3 = 9 \rightarrow$ تاس دوم عددی اول بیاید و تاس اول عددی اول نیاید $\underbrace{\hspace{2cm}}_{1,4,6}$

$$\rightarrow n(A) = 18$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ است.}$$

۷ - گزینه ۲

$$P(\text{هیچ کدام از تاس‌ها مضرب ۳ نباشند}) = 1 - P(\text{حداقل یکی از تاس‌ها مضرب ۳ باشند})$$

$$= 1 - \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

دقت کنید در تاس، ۴ عدد ۵، ۴، ۲، ۱ مضرب ۳ نمی‌باشند.



$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$

برای آنکه مجموع سه عدد، زوج باشد دو حالت وجود دارد:

$$\begin{cases} \text{هر سه عدد زوج باشند} \rightarrow \binom{5}{3} = 10 \\ \text{دو عدد فرد و دیگری زوج باشد} \rightarrow \binom{5}{2} \binom{5}{1} = 50 \end{cases} \rightarrow n(A) = 60$$

پس $P(A) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ است.
۹ - گزینه ۲

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

تفکیک

$$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

پس: $\frac{P(A'|B)}{P(A|B)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$

۱۰ - گزینه ۴

چون دو کارت را با جایگذاری بر می داریم فضای نمونه می شود:

$$n(S) = \binom{18}{1} \times \binom{18}{1} = 18 \times 18$$

$$n(A) = \binom{9}{1} \times \binom{9}{1} = 9 \times 9$$

از ۱ تا ۱۸ نه عدد فرد وجود دارد یعنی:

پس $P(A) = \frac{9 \times 9}{18 \times 18} = \frac{1}{4}$ است.
۱۱ - گزینه ۲

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

هر ۳ مهره هم رنگ باشند یعنی هر ۳ مهره سیاه یا هر ۳ مهره قرمز یا هر ۳ مهره زرد باشند.

$$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{3}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 1 + 10 = 15$$

پس $P(A) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$ است.
۱۲ - گزینه ۳

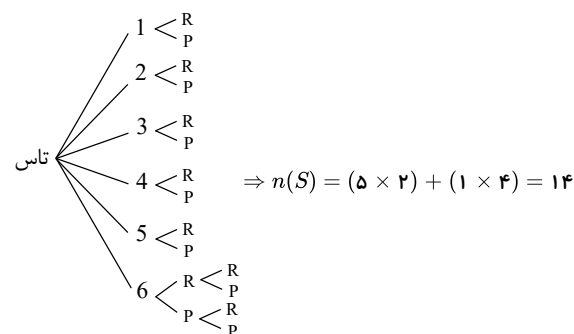
$$P(A') = \frac{2}{3} \rightarrow P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B') = \frac{3}{4} \rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

پس: $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = 6$

۱۳ - گزینه ۲ با استفاده از نمودار درختی داریم:



۱۴ - گزینه ۳ دقت کنید تعداد زیر مجموعه های r عضوی یک مجموعه n عضوی از رابطه ی $\binom{n}{r}$ بدست می آید پس:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$



چون می خواهیم زیرمجموعه فاقد عدد یک باشد عدد یک را کنار گذاشته و از ۹ عدد باقی مانده ۳ عدد را انتخاب می کنیم یعنی:

$$n(A) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$$

پس $P(A) = \frac{84}{120} = \frac{7}{10} = 0.7$ است.

۱۵ - گزینه ۴ شرط آنکه RH خون فردی منفی باشد آن است که دو زن منفی داشته باشد پس:

$$P(RH^-) = \frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = 0.16$$

$$P(\text{دو فرزند منفی باشد}) = P(RH \text{ خون فرزند اول منفی باشد}) \times P(RH \text{ خون فرزند دوم منفی باشد}) = (0.16)(0.16) = 0.0256$$

۱۶ - گزینه ۱

$$n(S) = 2^7 = 128$$

$$\left. \begin{array}{l} P P P P P P P \rightarrow 1 \\ P P P P P D D \rightarrow \frac{7!}{5!2!} = 21 \\ P P P D D D D \rightarrow \frac{7!}{4!3!} = 35 \\ P D D D D D D \rightarrow \frac{7!}{6!} = 7 \end{array} \right\} \rightarrow n(A) = 1 + 21 + 35 + 7 = 64$$

پس $P(A) = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$ است.

۱۷ - گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} P(A|B') = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{3}{5} \\ P(B'|A) = \frac{5}{7} \rightarrow \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{5}{7} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{دو رابطه را برهم}} \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{P(A)}{P(B')} = \frac{21}{25}$$

پس: $\frac{1 - P(A')}{1 - P(B)} = \frac{P(A)}{P(B')} = \frac{21}{25}$

۱۸ - گزینه ۲ منظور سوال این است که در شش بار پرتاب اول سکه دقیقاً دو بار "رو" ظاهر شود و در پرتاب هفتم نیز "رو" ظاهر شود.

احتمال آنکه در شش پرتاب اول سکه دقیقاً دو بار رو ظاهر شود $\frac{15}{64}$ است.

$$n(S) = 2^6 = 64, R R P P P P \rightarrow n(A) = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$P(A) = \frac{15}{64} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{128}$$

در ضمن احتمال آنکه در پرتاب هفتم "رو" بیاید $\frac{1}{2}$ است پس داریم:

۱۹ - گزینه ۱ چون گفته شده اعداد ظاهر شده متمایز هستند پس فضای نمونه‌ای جدید برابر است با:

$$n(S) = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

اگر سه عدد رو شده کمتر از ۵ باشند این حالت‌ها را خواهیم داشت:

جایگانی
 $1, 2, 3 \rightarrow 3! = 6$

جایگانی
 $1, 2, 4 \rightarrow 3! = 6 \rightarrow n(A) = 24$

جایگانی
 $1, 3, 4 \rightarrow 3! = 6$

جایگانی
 $2, 3, 4 \rightarrow 3! = 6$

پس $P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$ است.

۲۰ - گزینه ۱

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

یک دانشجوی سال دومی و حداکثر یک دانشجوی سال اولی یعنی: (یک دانشجوی سال اولی و یک دانشجوی سال دومی و یک دانشجوی سال سوم) یا (یک دانشجوی سال دومی و دو دانشجوی سال سوم)

$$n(A) = \binom{4}{1} \binom{5}{1} \binom{3}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{2} = 12 + 60 = 72$$

پس $P(A) = \frac{72}{220} = \frac{18}{55}$ است.

۲۱ - گزینه ۱ احتمال آنکه مهره‌های خارج شده هم‌رنگ باشند را حساب می کنیم و حاصل را از عدد یک کم می کنیم.



5 زرد
3 نارنجی

4 زرد
2 نارنجی

A

B

(دو مهره‌ی نارنجی از ظرف A و دو مهره‌ی زرد از ظرف B) یا (دو مهره‌ی زرد از ظرف A و دو مهره‌ی زرد از ظرف B)

$$\text{احتمال مطلوب} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{2}{2}} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{10}{28} \times \frac{6}{15} + \frac{3}{28} \times \frac{1}{15} = \frac{60+3}{28 \times 15} = \frac{63}{28 \times 15} = \frac{3}{20} = 0,15$$

$$P(\text{تمام مهره‌های خارج شده هم‌رنگ نباشند}) = 1 - 0,15 = 0,85$$

۲۲ - گزینه ۳

علاقه‌مند به تنیس: A

مستقل می‌باشند: B
علاقه‌مند به شیمی: B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \frac{P(A \cap B)}{P(A) \times P(B)} = \frac{60}{100} + \frac{25}{100} - \frac{60 \times 25}{100 \times 100} = \frac{60 + 25 - 15}{100} = \frac{70}{100}$$

۲۳ - گزینه ۳ حالت هایی که در آن‌ها مجموع ارقام ظاهر شده، ۸ هستند عبارتند از:

$$S_{\text{چین}} = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \rightarrow n(S) = 5$$

$$A = \{(3, 5), (5, 3)\} \rightarrow n(A) = 2$$

پس $P(A) = \frac{2}{5}$ است.

۲۴ - گزینه ۳ صحبتی از مهره‌های اول و دوم نشده است، پس فرض می‌کنیم بیرون نیامده‌اند، یعنی کافی است احتمال این که مهره‌ی اول سیاه باشد را بیابیم.

پس $P(\text{سیاه}) = \frac{6}{11}$ است.

۲۵ - گزینه ۳

$$\Rightarrow n(S) = 2^3 = 8$$

حداقل دو سکه رو بیاید، یعنی دو سکه رو بیاید یا هر سه سکه رو بیاید.

$$A = \{(ررر), (ررپ), (رپر), (پرر), (ررپ), (رپپ)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

پس $P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ است.

۲۶ - گزینه ۲ اگر پیشامد راست دست بودن را با A و پیشامد داشتن گروه خونی O را با B نشان دهیم، منظور سوال محاسبه‌ی $P(A \cup B)$ است. طبق قاعده‌ی جمع احتمالات داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \frac{P(A \cap B)}{P(A) \times P(B)} = 0,60 + 0,35 - 0,60 \times 0,35 = 0,74$$

۲۷ - گزینه ۳ چون در این خانواده هم دختر و هم پسر وجود دارد، پس از کل مجموعه‌ی S دو حالت (پپپ) و (ددد) را نداریم. بنابراین:

$$n(S) = 2^3 - 2 = 6$$

$$n(A) = \frac{4!}{3!} = 4 \quad (\text{پ پ پ د})$$

پیشامد وجود دقیقاً یک دختر در این خانواده عبارت است از:

پس $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ است.

۲۸ - گزینه ۴

چون در مورد مهره‌ی اول صحبتی نکرده، فرض می‌کنیم خارج نشده است:

$$P(\text{اولی سفید}) = P(\text{دومی سفید}) = \frac{4}{10}$$

۲۹ - گزینه ۲

فضای نمونه $n(S) = 7^4$ است.

نفر اول ۷ روز، نفر دوم ۶ روز، نفر سوم ۵ روز و نفر چهارم ۴ روز برای انتخاب دارند.

$$\text{پس } P(A) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{7 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{120}{7^3} \text{ است.}$$

۳۰ - گزینه ۳ اگر پیشامد «یکسان بودن روز تولد حداقل دو نفر» را با A نشان دهیم، آن‌گاه A' پیشامد «متفاوت بودن روز تولد هر ۳ نفر» است.

$$P(A') = \frac{7 \times 6 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{30}{49} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۳	۱۱ - ۲	۱۶ - ۱	۲۱ - ۱	۲۶ - ۲
۲ - ۲	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۴	۱۳ - ۲	۱۸ - ۲	۲۳ - ۳	۲۸ - ۴
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۳	۲۹ - ۲
۵ - ۳	۱۰ - ۴	۱۵ - ۴	۲۰ - ۱	۲۵ - ۳	۳۰ - ۳