نام آزمون: احتمال

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ – دو سکه را تا زمانی که برای اولین بار هر دو پشت ظاهر شوند، با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه در پرتاب چهارم این نتیجه حاصل شود، چقدر است؟

۲ – دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر هستند. اگر $۲P(B|A) = P(A|B) = \frac{۱}{۳}$ ، احتمال آنکه حداقل یکی از پیشامدهای A و B رخ دهد، کدام است؟

۳ – در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی، می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان پسر است. احتمال آنکه این خانواده دقیقاً ۳ پسر داشته باشد، کدام است؟

۴ – خانواده‌ای دارای ۷ فرزند است. اگر بدانیم ۲ فرزند اول این خانواده پسر هستند، احتمال آنکه این خانواده حداقل ۵ پسر داشته باشد، کدام است؟

۵ – احتمال عدم موفقیت یک عمل برای شخص A برابر ۰٫۲ و برای شخص B برابر ۰٫۲۵ است. با کدام احتمال، این عمل جراحی حداقل برای یکی از این دو نفر موفقیت آمیز است؟

۶ - شش کارت سبز با شماره‌های ۱ تا ۶ و شش کارت زرد با شماره‌های ۱ تا ۶ داریم. به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون می‌کشیم. اگر مجموع شماره‌های دو کارت ۸ باشد، با کدام احتمال دو کارت هم‌رنگ هستند؟

۷ - درون ظرفی ۶ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه وجود دارد. در مرحله‌ی اول ۲ مهره با هم و بدون جایگذاری از ظرف خارج می‌کنیم و در مرحله‌ی دوم ۱ مهره‌ی دیگر از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط در یکی از مرحله‌ها، ۱ مهره‌ی سفید خارج می‌شود؟

۸ - احتمال پیشامد آن که مجموع عددهای رو شده در پرتاب تاس‌ها کم‌تر از پنج باشد، در فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس، چند برابر احتمال این پیشامد در فضای نمونه‌ای پرتاب سه تاس است؟

۹ - تاسی را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه در همه‌ی پرتاب‌ها مقسوم‌علیه ۸ ظاهر شده باشد، کدام است؟

۱۰ - در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی سیاه و تعدادی مهره‌ی سبز موجود است. ۲ مهره با هم از این کیسه بیرون می‌آوریم. اگر احتمال هم‌رنگ بودن مهره‌ها $\frac{۳}{۷}$ باشد، تعداد مهره‌های سبز، کدام است؟

۱۱ - جعبه‌ای شامل ۴مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است. از داخل جعبه، ابتدا یک مهره با جایگذاری بر می‌داریم. سپس دو مهره‌ی دیگر یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دومین مهره‌ی سفید، بلافاصله بعد از اولین مهره‌ی سیاه خارج می‌شود؟

۱۲ - احتمال بهبودی شخص A پس از یک عمل جراحی ۴۰ درصد و احتمال بهبودی شخص B، ۷۰ درصد است. اگر این دو نفر تحت عمل قرار بگیرند، چه قدر احتمال دارد که فقط یک نفر از آن‌ها پس از عمل جراحی بهبود یابد؟

۱۳ - در مطالعات ژنتیکی نشان داده شده است که ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی‌اند. در یک خانواده دو فرزندی، با چه احتمالی RH خون حداقل یکی از فرزندان مثبت است؟

۱۴ - سه تاس را پرتاب کرده‌ایم. عدد رو شده‌ی هر تاس کم‌تر از ۵ است. با چه احتمالی حداقل عدد رو شده دو تاس یکسان است؟

۱۵ - اگر $P(A|B)=\frac{۲}{۵}$ و $P(B|A)=\frac{۱}{۳}$، حاصل $\frac{P(B)}{P(A)}$ کدام است؟

۱۶ - در داخل کیسه‌ای ۶ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی زرد و ۵ مهره‌ی سیاه وجود دارد. سه مهره به تصادف از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال سه مهره خارج شده‌ی فقط از ۲ رنگ مختلف هستند؟

۱۷ - دو تاس را پرتاب کرده و پیشامد A را «فرد بودن حداقل یکی از تاس‌ها» تعریف کرده‌ایم. پیشامد B کدام باشد تا احتمال وقوع A به شرط وقوع B کم‌ترین مقدار را داشته باشد؟

۱۸ - ۷ مهره ی یکسان با شماره‌های ۱، ۲، ..... و ۷ در کیسه‌ای وجود دارند. اگر سه مهره را با هم و به تصادف از کیسه خارج کنیم با کدام احتمال مجموع اعداد نوشته شده روی این مهره‌ها عددی زوج است؟

۱۹ - در پرتاب دو تاس با هم، اگر اختلاف ارقام رو شده حداکثر ۳ باشد، با کدام احتمال هر دو رقم ظاهر شده زوج هستند؟

۲۰ - اگر دو پیشامد A و B آن باشند که به ترتیب در پرتاب ۴ و ۸ سکه، تعداد حالت‌های رو، سه برابر تعداد حالت‌های پشت باشد، آن‌گاه نسبت احتمال پیشامد A به احتمال پیشامد B چگونه است؟

۲۱ - یک سکه و یک تاس را با هم می‌اندازیم، احتمال آن‌که تاس عدد ۵ یا سکه پشت بیاید، کدام است؟

۲۲ - اگر برای دو پیشامد مستقل A و B، $P(B)=\frac{۱۲}{۲۵}$ و $P(A\cup B)=\frac{۱۷}{۲۵}$ باشد، $P(A-B)$ کدام است؟

۲۳ - دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو عدد ظاهر شده فرد باشند، چقدر احتمال دارد مجموع آن‌ها کمتر از ۶ باشد؟

۲۴ - خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر بدانیم فرزند اول دختر است، آن‌گاه با کدام احتمال این خانواده حداقل دو دختر دارد ولی همه‌ی فرزندان دختر نیستند؟

۲۵ - اگر $P(A|B')=P(B)=۰/۲$ ، آن‌گاه $P(A-B)$ کدام است؟

۲۶ - احتمال این‌که شخصی گروه خونی A^+ داشته باشد، ۰/۲ و احتمال این‌که ناراحتی قلبی داشته باشد،۰/۳ است. احتمال این‌که این شخص ناراحتی قلبی یا گروه خونی A^+ داشته باشد کدام است؟

۲۷ – در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. از این جعبه سه مهره به تصادف، پی‌درپی و بدون جای‌گذاری انتخاب می کنیم. احتمال این که مهره‌های اوّل و سوم هم رنگ نباشند، کدام است؟

۲۸ – تمام حرف‌های کلمه‌ی «$Completely$» را به طور تصادفی کنار هم می‌چینیم. با چه احتمالی دو حرف e کنار هم قرار می‌گیرند؟

۲۹ – از میان ۷ کشتی‌گیر و ۵ وزنه‌بردار ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال آن که حداقل یک نفر کشتی‌گیر نباشد کدام است؟

۳۰ – در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی اگر خانواده حداقل دو پسر داشته باشد، احتمال آن که تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند، چقدر است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ احتمال آنکه در پرتاب دو سکه، هر دو پشت ظاهر شوند برابر $\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$ است. برای آنکه فقط در پرتاب چهارم هر دو سکه پشت ظاهر شوند باید در هر یک از سه پرتاب اول، دو سکه با هم پشت نیایند و احتمال آنکه در هر پرتاب دو سکه با هم پشت نیایند برابر $\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴} - ۱$ است. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$\text{احتمال مطلوب} = \underbrace{\frac{۳}{۴}}_{\text{پرتاب اول باهم پشت نیایند}} \times \overbrace{\frac{۳}{۴}}^{\text{پرتاب دوم باهم پشت نیایند}} \times \underbrace{\frac{۳}{۴}}_{\text{پرتاب سوم باهم پشت نیایند}} \times \overbrace{\frac{۱}{۴}}^{\text{پرتاب چهارم هر دو پشت بیایند}} = \frac{۲۷}{۲۵۶}$$

۲ - گزینه ۲ اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند $P(A|B) = P(A)$ و $P(B|A) = P(B)$ است.

$$۲P(B|A) = P(A|B) = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{A,B \text{ مستقل}} ۲P(B) = P(A) = \frac{۱}{۳} \to P(A) = \frac{۱}{۳}, \ P(B) = \frac{۱}{۶}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{A,B \text{ مستقل}} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$\to P(A \cup B) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} - \left(\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۶}\right) = \frac{۸}{۱۸} = \frac{۴}{۹}$$

۳ - گزینه ۴ چون حداقل یکی از فرزندان پسر است بنابراین حالتی که هر ۴ فرزند دختر باشند وجود ندارد پس فضای نمونه‌ی جدید $۱۵ = ۱ - ۲^۴$ می‌شود.

$$\text{دقیقاً ۳ پسر} \to PPPD \to n(A) = \frac{۴!}{۳!} = ۴$$

پس $P(A) = \frac{۴}{۱۵}$ است.

۴ - گزینه ۲ باتوجه به اینکه ۲ فرزند اول این خانواده پسر هستند و می‌خواهیم که این خانواده حداقل ۵ پسر داشته باشد بنابراین در پنج فرزند بعدی باید حداقل ۳ پسر وجود داشته باشد.

$$n(S) = ۲^۵ = ۳۲$$

$$\text{حداقل ۳ پسر} \to PPPDD \text{ یا } PPPPD \text{ یا } PPPPP \to n(A) = \frac{۵!}{۳!\,۲!} + \frac{۵!}{۴!} + ۱ = ۱۰ + ۵ + ۱ = ۱۶$$

پس $P(A) = \frac{۱۶}{۳۲} = \frac{۱}{۲}$ است.

۵ - گزینه ۳ موفقیت‌آمیز بودن عمل جراحی برای افراد A و B دو پیشامد مستقل از هم هستند.

$$P\,(\text{حداقل یکی از دو نفر عمل موفقیت‌آمیز داشته باشد}) = ۱ - P\,(\text{هیچ کدام عمل موفقیت‌آمیز نداشته باشند})$$

$$= ۱ - (۰/۲)(۰/۲۵) = ۱ - ۰/۰۵ = ۰/۹۵$$

۶ - گزینه ۲

$$S_{\text{جدید}} = \left\{ \begin{array}{l} (\overset{\text{سبز}}{۲}, \overset{\text{زرد}}{۶}), (\overset{\text{سبز}}{۳}, \overset{\text{زرد}}{۵}), (\overset{\text{زرد}}{۲}, \overset{\text{سبز}}{۶}), (\overset{\text{زرد}}{۳}, \overset{\text{سبز}}{۵}), (\overset{\text{زرد}}{۴}, \overset{\text{سبز}}{۴}) \\ , (\overset{\text{سبز}}{۲}, \overset{\text{سبز}}{۶}), (\overset{\text{سبز}}{۳}, \overset{\text{سبز}}{۵}), (\overset{\text{زرد}}{۲}, \overset{\text{زرد}}{۶}), (\overset{\text{زرد}}{۳}, \overset{\text{زرد}}{۵}) \end{array} \right\} \to n(S) = ۹$$

$$A = \left\{ (\overset{\text{سبز}}{۲}, \overset{\text{سبز}}{۶}), (\overset{\text{سبز}}{۳}, \overset{\text{سبز}}{۵}), (\overset{\text{زرد}}{۲}, \overset{\text{زرد}}{۶}), (\overset{\text{زرد}}{۳}, \overset{\text{زرد}}{۵}) \right\} \to n(A) = ۴$$

پس $P(A) = \frac{۴}{۹}$ است.

۷ - گزینه ۲ وقتی گفته می‌شود که فقط در یکی از مرحله‌ها، یک مهره‌ی سفید خارج می‌شود یعنی:

۱) فقط در مرحله‌ی اول، یک مهره‌ی سفید خارج می‌شود و در مرحله‌ی دوم، سفید خارج نمی‌شود.

۲) در مرحله‌ی اول، سفید خارج نمی‌شود و در مرحله‌ی دوم، فقط یک مهره‌ی سفید خارج می‌شود.

$$۱)\ \underbrace{\frac{\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}}_{\text{یک سفید خارج شود}} \times \frac{\overbrace{۳}^{\text{۵ سفید و ۳ سیاه}}}{\underbrace{۸}_{\text{سفید خارج نشود}}} = \frac{۲۴}{۴۵} \times \frac{۳}{۸} = \frac{۷۲}{۸ \times ۴۵}$$

$$۲)\ \frac{\binom{۴}{۲}}{\underbrace{\binom{۱۰}{۲}}_{\text{سفید خارج نشود}}} \times \frac{\overbrace{۶}^{\text{۴سفید و ۲ سیاه}}}{\underbrace{۸}_{\text{سفید خارج شود}}} = \frac{۶}{۴۵} \times \frac{۶}{۸} = \frac{۳۶}{۸ \times ۴۵}$$

پس $\frac{۳}{۱۰} = \frac{۳۶}{۸ \times ۱۵} = \frac{۱۰۸}{۸ \times ۴۵} = P(A)$ است.

۸ ـ گزینه ۳

$$\text{مجموع دو تاس کمتر از ۵ :} \begin{cases} ۴ \rightarrow (۱,۳)(۳,۱)(۲,۲) \\ ۳ \rightarrow (۱,۲)(۲,۱) \\ ۲ \rightarrow (۱,۱) \end{cases} \rightarrow P_۱ = \frac{۳+۲+۱}{۶^۲} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

$$\text{مجموع سه تاس کمتر از ۵ :} \begin{cases} ۴ \rightarrow (۲,۱,۱)(۱,۲,۱)(۱,۱,۲) \\ ۳ \rightarrow (۱,۱,۱) \end{cases} \rightarrow P_۲ = \frac{۳+۱}{۶^۳} = \frac{۴}{۶^۳}$$

$$\text{پس :} \frac{P_۱}{P_۲} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۴}{۶^۳}} = \frac{۶^۳}{۴ \times ۶} = \frac{۶^۲}{۴} = \frac{۳۶}{۴} = ۹$$

۹ ـ گزینه ۲ فضای نمونه‌ای برابر $n(S) = ۶^۳ = ۲۱۶$ است. مقسوم‌علیه‌های عدد ۸ عبارتند از ۱ و ۲ و ۴ ، پس باید در هر ۳ پرتاب یکی از اعداد ۱ ، ۲ یا ۴ ظاهر شوند بنابراین هر پرتاب ۳ حالت دارد.

$$\boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۳} = ۲۷ \rightarrow n(A) = ۲۷$$

پس $\frac{۱}{۸} = \frac{۲۷}{۲۱۶} = P(A)$ است.

۱۰ ـ گزینه ۲ اگر تعداد مهره‌های سبز را x در نظر بگیریم، در کیسه ۴ مهره‌ی سیاه و x مهره‌ی سبز و در کل $x + ۴$ مهره وجود دارد.

$$n(S) = \binom{x+۴}{۲} = \frac{(x+۴)(x+۳)}{۲}$$

$$\text{هر دو سبز یا هر دو سیاه} \rightarrow n(A) = \binom{۴}{۲} + \binom{x}{۲} = ۶ + \frac{x(x-۱)}{۲}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \rightarrow \frac{۳}{۷} = \frac{۶ + \frac{x(x-۱)}{۲}}{\frac{(x+۴)(x+۳)}{۲}} \rightarrow \frac{۳}{۷} = \frac{۱۲ + x^۲ - x}{x^۲ + ۷x + ۱۲}$$

$$\rightarrow ۸۴ + ۷x^۲ - ۷x = ۳x^۲ + ۲۱x + ۳۶ \rightarrow ۴x^۲ - ۲۸x + ۴۸ = ۰ \rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۲ = ۰$$

$$\rightarrow (x-۴)(x-۳) = ۰ \rightarrow x = ۴, x = ۳$$

توجه کنید که $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$ است.

۱۱ ـ گزینه ۴ برای آنکه دومین مهره‌ی سفید، بلافاصله بعد از اولین مهره‌ی سیاه خارج شود، باید مهره‌ی اول سفید و مهره‌ی دوم سیاه و مهره‌ی سوم سفید خارج شده باشند.

$$\text{احتمال مطلوب} = \underbrace{\frac{۴}{۹}}_{\substack{\text{مهره‌ی اول سفید} \\ \text{(۴سفید و ۵ سیاه)}}} \times \underbrace{\frac{۵}{۹}}_{\substack{\text{مهره‌ی دوم سیاه} \\ \text{(۴سفید و ۵ سیاه)}}} \times \underbrace{\frac{۴}{۸}}_{\substack{\text{مهره‌ی سوم سفید} \\ \text{(۴سفید و ۴ سیاه)}}} = \frac{۱۰}{۸۱}$$

۱۲ ـ گزینه ۱

احتمال مطلوب $= P$(شخص A بهبود یابد و شخص B بهبود نیابد)$+P$(شخص B بهبود یابد و شخص A بهبود نیابد)

$$= (\frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۳۰}{۱۰۰}) + (\frac{۷۰}{۱۰۰} \times \frac{۶۰}{۱۰۰}) = ۰/۱۲ + ۰/۴۲ = ۰/۵۴$$

۱۳ ـ گزینه ۳ برای آنکه RHخون فردی منفی باشد باید دو ژن منفی داشته باشد.

$$P(RH^-) = \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۰/۱۶$$

P(حداقل RH خون یکی از فرزندان مثبت باشد)$= ۱ - P$(RH خون هر دو فرزند منفی باشد)

$$= ۱ - (۰/۱۶)(۰/۱۶) = ۰/۹۷۴۴$$

۱۴ ـ گزینه ۴

چون عدد رو شده‌ی هر تاس کمتر از ۵ است فضای نمونه‌ی جدید به صورت $n(S) = ۴ \times ۴ \times ۴$ در می‌آید.

P(حداقل عدد رو شده دو تاس یکسان باشد) $= ۱ - P$(عددهای رو شده هر سه تاس متمایز باشند)

$$= ۱ - \frac{۴ \times ۳ \times ۲}{۴ \times ۴ \times ۴} = ۱ - \frac{۳}{۸} = \frac{۵}{۸}$$

۱۵ - گزینه ۱

$$P(A|B) = \frac{۲}{۵} \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۲}{۵}$$
$$P(B|A) = \frac{۱}{۳} \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم}} \frac{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}{\frac{P(A\cap B)}{P(A)}} = \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۱}{۳}} \rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{۶}{۵} \rightarrow \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{۵}{۶}$$

۱۶ - گزینه ۳ حالاتی که مطلوب مسأله نمی‌باشند این دو حالت هستند: ۱) سه مهره از سه رنگ مختلف باشند. ۲) هر سه مهره از یک رنگ باشند. احتمال این دو حالت را حساب کرده و از یک کم می‌کنیم.

$$n(S) = \binom{۱۵}{۳} = \frac{۱۵ \times ۱۴ \times ۱۳}{۶} = ۴۵۵$$

سه مهره از سه رنگ مختلف: $\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱} = ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$

هر سه مهره از یک رنگ: $\binom{۶}{۳} + \binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۲۰ + ۴ + ۱۰ = ۳۴$

$$\rightarrow n(A) = ۱۵۴$$

پس $P(A) = ۱ - \frac{۱۵۴}{۴۵۵} = \frac{۳۰۱}{۴۵۵} = \frac{۴۳}{۶۵}$ است.

۱۷ - گزینه ۴ باید در هر گزینه $P(A|B)$ را بدست آوریم (A: فرد بودن حداقل یکی از تاس‌ها و B: در هر گزینه مشخص شده است)

گزینه‌ی اول: $B = \{(۱,۱), (۱,۲), (۲,۱)\} \rightarrow P(A|B) = \frac{۳}{۳} = ۱$

گزینه‌ی دوم: $B = \{(۱,۳), (۳,۱), (۲,۲)\} \rightarrow P(A|B) = \frac{۲}{۳}$

گزینه‌ی سوم: $B = \{(۵,۶), (۶,۵), (۶,۶)\} \rightarrow P(A|B) = \frac{۲}{۳}$

گزینه‌ی چهارم: $B = \{(۴,۶), (۶,۴), (۵,۵)\} \rightarrow P(A|B) = \frac{۱}{۳}$

پس در گزینه‌ی چهارم، $P(A|B)$ کمترین مقدار را دارد.

۱۸ - گزینه ۴ فضای نمونه‌ی آزمایش $n(S) = \binom{۷}{۳} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} = ۳۵$ است. دقت کنید مجموع سه عدد، وقتی زوج است که هر سه زوج باشند یا دو تای آنها فرد و یکی از آنها زوج باشد. (از ۱ تا ۷ چهار عدد فرد و سه عدد زوج وجود دارد).

$$n(A) = \binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱} = ۱ + ۱۸ = ۱۹$$

پس $P(A) = \frac{۱۹}{۳۵}$ است.

۱۹ - گزینه ۲ از ۳۶ حالت دو تاس، حالت‌های (۵,۱)، (۶,۱)، (۶,۲)، (۱,۵)، (۲,۶) و (۱,۶) را نداریم، چون اختلاف از ۳ بیشتر است پس $n(S) = ۳۰$ است.

$$A = \{(۲,۲), (۲,۴)(۶,۶), (۴,۲), (۴,۴), (۴,۶), (۶,۴)\} \rightarrow n(A) = ۷$$

پس $P(A) = \frac{۷}{۳۰}$ است.

۲۰ - گزینه ۴ احتمال آن‌که در پرتاب یک سکه‌ی سالم، n بار رو (یا k بار پشت) داشته باشیم از دستور $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ حاصل می‌شود.

پیشامد A معادل آن است که در پرتاب ۴ سکه، ۳ بار رو بیاید داریم: $P(A) = \frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴} = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$

پیشامد B معادل آن است که در پرتاب ۸ سکه، ۶ بار رو بیاید، داریم: $P(B) = \frac{\binom{۸}{۶}}{۲^۸} = \frac{۲۸}{۲۵۶} = \frac{۷}{۶۴}$

پس : $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۷}{۶۴}} = \frac{۶۴}{۲۸} = \frac{۱۶}{۷} > ۲$

۲۱ - گزینه ۲ اگر پیشامد A، آن باشد که سکه پشت بیاید و پیشامد B آن باشد که تاس، عدد ۵ بیاید، آن‌گاه پیشامدهای A و B مستقل‌اند پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} - (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶}) = \frac{۶ + ۲ - ۱}{۱۲} = \frac{۷}{۱۲}$$

۲۲ - گزینه ۱

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \to P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$
$$\to \frac{۱۷}{۲۵} = P(A) + \frac{۱۲}{۲۵} - \frac{۱۲}{۲۵}P(A) \to \frac{۱}{۵} = \frac{۱۳}{۲۵}P(A) \to P(A) = \frac{۵}{۱۳}$$

از طرفی: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \to P(A \cap B) = \frac{۵}{۱۳} \times \frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۱۲}{۶۵}$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۵}{۱۳} - \frac{۱۲}{۶۵} = \frac{۱۳}{۶۵} = \frac{۱}{۵}$$

۲۳ - گزینه ۱

$$S_{\text{جدید}} = \{(۱,۱)\ ,\ (۱,۳)\ ,\ (۱,۵)\ ,\ (۳,۱)\ ,\ (۳,۳)\ ,\ (۳,۵)\ ,\ (۵,۱)\ ,\ (۵,۳)\ ,\ (۵,۵)\} \to n(S) = ۹$$
$$A = \{(۱,۱)\ ,\ (۱,۳)\ ,\ (۳,۱)\} \to n(A) = ۳$$

پس $P(A) = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$ است.

۲۴ - گزینه ۲ وقتی گفته می‌شود این خانواده، حداقل دارای دو دختر باشد یعنی این خانواده دارای ۲ یا ۳ یا ۴ دختر باشد و چون فرزند اول، دختر است و گفته شده که همه فرزندان، دختر نباشند یعنی احتمال اینکه از سه فرزند (فرزندان دوم و سوم و چهارم) یک یا دو فرزند دختر باشد را باید حساب کنید.

$$n(S) = ۲^۳ = ۸$$
$$\left.\begin{array}{l} DPP \to \frac{۳!}{۲!} = ۳ \\ DDP \to \frac{۳!}{۲!} = ۳ \end{array}\right\} \to n(A) = ۶$$

پس $P(A) = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$ است.

۲۵ - گزینه ۱

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} \to ۰٫۲ = \frac{P(A - B)}{۱ - P(B)} \to ۰٫۲ = \frac{P(A - B)}{۱ - ۰٫۲} \to P(A - B) = ۰٫۱۶$$

۲۶ - گزینه ۱

A : داشتن A^+ گروه خونی $\to P(A) = ۰٫۲$

B: داشتن ناراحتی قلبی $\to P(B) = ۰٫۳$

احتمال اینکه شخصی ناراحتی قلبی یا گروه خونی A^+ داشته باشد برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\xrightarrow{\text{مستقل هستند } A , B} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = ۰٫۲ + ۰٫۳ - (۰٫۲)(۰٫۳) = ۰٫۴۴$$

۲۷ - گزینه ۲ چون حرفی از رنگ مهره‌ی دوم زده نشده است آن را در نظر نمی گیریم یعنی باید احتمال آنکه مهره‌های اول و دوم هم رنگ نباشند را حساب کنید.

P (مهره‌های اول و دوم همرنگ نباشند)

$= ۱ - P$ (مهره‌های اول و دوم همرنگ باشند) $= ۱ - (P$ (هر دو سفید) $+ P$ (هر دو سبز) $+ P$ (هر دو قرمز) $)$

$$= ۱ - ((\frac{۴}{۹} \times \frac{۳}{۸}) + (\frac{۳}{۹} \times \frac{۲}{۸}) + (\frac{۲}{۹} \times \frac{۱}{۸})) = ۱ - (\frac{۱۲}{۷۲} + \frac{۶}{۷۲} + \frac{۲}{۷۲}) = ۱ - \frac{۲۰}{۷۲} = \frac{۵۲}{۷۲} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

۲۸ - گزینه ۳ ده حرف کلمه‌ی «$completely$» که دو حرف l و دو حرف e در آن یکسانند ، به تعداد حالت‌های مقابل جایگشت دارند:

$$n(S) = \frac{۱۰!}{۲!\,۲!}$$

دو حرف e را در کنار هم، یک شیء در نظر می‌گیریم که در این صورت، ۹ شیء خواهیم داشت که دو تای آن‌ها یکسانند (دو حرف l)، پس اگر پیشامد مطلوب را A بنامیم، داریم:

$$n(A) = \frac{۹!}{۲!} \quad (\boxed{ee}\ compltly)$$

پس $P(A) = \frac{\frac{۹!}{۲!}}{\frac{۱۰!}{۲!\,۲!}} = \frac{۹!\,۲!}{۱۰!} = \frac{۱}{۵}$ است.

۲۹ - گزینه ۱ از روش متمم استفاده می‌کنیم. اگر A پیشامدی باشد که در آن حداقل یک نفر کشتی‌گیر نمی‌باشد، متمم آن یعنی A' پیشامدی است که همه‌ی آن ۳ نفر کشتی‌گیر هستند. پس داریم:

$$n(A') = \binom{۷}{۳} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} = ۳۵ \Rightarrow P(A') = \frac{۳۵}{\binom{۱۲}{۳}} = \frac{۳۵}{۲۲۰} = \frac{۷}{۴۴} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۷}{۴۴} = \frac{۳۷}{۴۴}$$

۳۰ - گزینه ۳

$(PPDD)$ $\frac{۴!}{۲!\,۲!}$ یا $\binom{۴}{۲}$ حالت: خانواده دارای دو پسر است.

$(PPPD)$ $\frac{۴!}{۳!}$ یا $\binom{۴}{۳}$ حالت: خانواده دارای سه پسر است.

$(PPPP)$ ۱ یا $\binom{۴}{۴}$ حالت: خانواده دارای چهار پسر است.

تعداد کل حالات فضای نمونه‌ای جدید برابر مجموع سه حالت فوق است:

$$n(S) = \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴} = ۶ + ۴ + ۱ = ۱۱$$

اگر بخواهیم تعداد پسرها و دخترها در خانواده برابر باشند، خانواده باید ۲ فرزند پسر داشته باشد یعنی $۶ = \binom{۴}{۲}$.

پس $P(A) = \frac{۶}{۱۱}$ است.

پاسخنامه کلیدی

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۳	۶	۲	۱۱	۴	۱۶	۳	۲۱	۲	۲۶	۱
۲	۲	۷	۲	۱۲	۱	۱۷	۴	۲۲	۱	۲۷	۲
۳	۴	۸	۳	۱۳	۳	۱۸	۴	۲۳	۱	۲۸	۳
۴	۲	۹	۲	۱۴	۴	۱۹	۲	۲۴	۲	۲۹	۱
۵	۳	۱۰	۲	۱۵	۱	۲۰	۴	۲۵	۱	۳۰	۳