نام آزمون: محاسبه حد توابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- اگر $\lim\limits_{x\to -۳} \frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}} = ۲$ آنگاه a کدام است؟

۲- حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{۱-\sqrt{x-۳}}{x^۲-۴x}$ کدام است؟

۳- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{\tan x-۱}$ کدام است؟

۴- حد عبارت $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}}$ کدام است؟

۵- حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۶ - حاصل $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}$ برابر کدام است؟

۷ - هر گاه $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{mx+n}{x-\sqrt{x+۲}} = ۲$ مقدار n کدام است؟

۸ - مقدار $\lim\limits_{x\to ۱} \left(\dfrac{۱}{x-۱} - \dfrac{۱}{\sqrt{۲x-۱}-۱}\right)$ کدام است؟

۹ - حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲}$ کدام است؟

۱۰ - حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(x-۱)^{۲}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)}$ کدام است؟

۱۱ - حاصل $\dfrac{1-\sin x}{\cot^2 x}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}$ کدام است؟

۱۲ - اگر $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos x}=a$، حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{4a\sin x-1}{8a\sin^2 x-1}$ کدام است؟

۱۳ - کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱۴ - اگر $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b$ باشد، آن‌گاه حاصل $a-b$ کدام است؟

۱۵ - اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=-1$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{g(x)}$ کدام است؟

۱۶ - کدام‌یک از گزینه‌های زیر <u>نادرست</u> است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱۷ - تابع $f(x)=\dfrac{(x+a)\,|x-4|}{x-4}$ در نقطهٔ $x=4$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

۱۸ - اگر $f(x)=\dfrac{x^2-a}{x+2}$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=a$ مقدار a کدام است؟

۱۹ - با توجه به تابع $f(x)=\sqrt{x+4}$، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)=0$ ب) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=0$

پ) $f(-4)=0$ ت) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$

۲۰ - اگر $f(x)=x^4-3x^2+2$ و $g(x)=x-1$ باشد، به ترتیب از راست به چپ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۲۱ - اگر $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+ax+b}{x}=3$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۲۲- اگر $\lim\limits_{x\to t} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to t} g(x)=4$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to t}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)$ همواره کدام است؟

۲۳- اگر تابع f در نقطهٔ $x=1$ حدی مخالف صفر داشته باشد، $f(1)$ کدام است؟

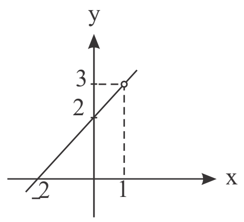
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-3x+a} & ,\quad x>1\\ a+b & ,\quad x=1\\ \dfrac{b(x-1)}{|x-1|} & ,\quad x<1\end{cases}$$

۲۴- اگر $f(x)=[x]+3m$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=7$. حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۲۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{[x]-1}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x^2-x}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۲۶- تابع $f(x)=[x]$ را در نظر بگیرید. کدام‌یک از توابع زیر در $x=5$ حد دارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۲۷ - شکل مقابل، نمودار تابع خطی $y=f(x)$ است. حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{(x+۵)f(x)}{x^۲-۴}$ کدام است؟



۲۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱-\sin^۳ x}{۱-\sin^۲ x}$ کدام است؟

۲۹ - اگر $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\dfrac{۳}{۲}$ و $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{f}{g})(x)=-۴$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to a}(f-۲g)(x)$ کدام است؟ $(g(a)\neq ۰)$

۳۰ - حاصل $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{bx+a}$ به ازای چه مقادیری از c وجود دارد؟ $(b>۰)$

محاسبه حد توابع

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ ابتدا با جایگذاری می‌توان مبهم بودن کسر را شناسائی نمود. حال برای شناسائی عامل صفرشونده باید مخرج را گویا نمود:

$$\lim_{x\to -۳}\frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}\times\frac{۱+\sqrt{۵x+۱۶}}{۱+\sqrt{۵x+۱۶}}=\lim\frac{a\,\cancel{(x+۳)}\,(۱+\sqrt{۵x+۱۶})}{\underbrace{۱-۵x-۱۶}_{-۵\,\cancel{(x+۳)}}}$$

$$=\frac{۲a}{-۵}=۲\to ۲a=-۱۰\to a=-۵$$

۲ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۱-\sqrt{x-۳}}{x^۲-۴x}=\frac{۰}{۰}$$

صورت کسر را گویا و مخرج را تجزیه می‌نمائیم تا عامل صفرشونده استخراج شود

$$\lim\frac{۱-\sqrt{x-۳}}{x^۲-۴x}\times\frac{۱+\sqrt{x-۳}}{۱+\sqrt{x-۳}}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱-x+۳}{x(x-۴)(۱+\sqrt{x-۳})}$$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{-\cancel{(x-۴)}}{x\,\cancel{(x-۴)}\,(۱+\sqrt{x-۳})}=-\frac{۱}{۸}$$

۳ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{\tan x-۱}=\frac{۰}{۰}$$

می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را شناسائی کرد.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}-۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}$$

$$\lim\frac{\cancel{(\sin x-\cos x)}\;\cos x}{\cancel{(\sin x-\cos x)}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴ - گزینه ۴

$$\lim\frac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}}=\frac{۰}{۰}$$

باتوجه به صورت و مخرج هر دو باید گویا شوند.

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x+\sqrt{۲x+۳}}{۲-\sqrt{۳-x}}\times\frac{x-\sqrt{۲x+۳}}{x-\sqrt{۲x+۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳-x}}{۲+\sqrt{۳-x}}$$

$$\lim\frac{(x^۲-۲x-۳)(۲+\sqrt{۳-x})}{(۴-۳+x)(x-\sqrt{۲x+۳})}=\lim_{x\to -۱}\frac{\cancel{(x+۱)}\,(x-۳)(۲+\sqrt{۳-x})}{\cancel{(x+۱)}\,(x-\sqrt{۳x+۳})}=\frac{-۱۶}{-۲}=۸$$

۵ - گزینه ۳

$$\lim\frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}\times\frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}\times\frac{۲\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(۹-(۲x+۱))\overbrace{(۲+\sqrt{x})}^{(۴)}}{(۴-x)\underbrace{(۳+\sqrt{۲x+۱})}_{۶}}=\lim\frac{(-۲x+۸)(۴)}{(۴-x)(۶)}=\lim\frac{۲(۴-x)(۴)}{(۴-x)(۶)}=\frac{۴}{۳}$$

۶ - گزینه ۱ باید کسر را در مزدوج صورت $\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}=?$ ضرب نمائیم. باید توجه داشت که می‌توان در مخرج کسر عامل صفرشونده وجود دارد:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}-(۲x+۸)}{(x+۲)\underbrace{(x-\sqrt{۲x+۸})}_{-۴}}=\lim\frac{x^{۲}-۲x-۸}{(x+۲)(-۴)}=\lim\frac{\cancel{(x+۲)}\,(x-۴)}{\cancel{(x+۲)}\,(-۴)}=\frac{۳}{۲}$$

۷ – گزینه ۳ باتوجه به اینکه مخرج کسر صفر شده و حاصل حد عدد شده صورت هم الزاماً به ازای $x=۲$ باید برابر صفر باشد:

$$mx+n \overset{x=۲}{=\!=\!=} ۰ \to ۲m+n=۰ \to n=-۲m$$

در مرحله‌ی بعد علاوه بر جایگذاری n کسر را گویا می‌نمائیم

$$\lim_{x\to ۲}\frac{mx-۲m}{x-\sqrt{x+۲}}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}=\lim\frac{m(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^{۲}-x-۲}$$

$$\lim\frac{m(\cancel{x-۲})(x+\sqrt{x+۲})}{(\cancel{x-۲})(x+۱)}=\frac{۴m}{۳}\Rightarrow\frac{۴m}{۳}=۲\to m=\frac{۳}{۲}$$

$$nn=-۲m \xrightarrow{m=\frac{۳}{۲}} n=-۳$$

۸ – گزینه ۲ باید توجه داشت که در قدم اول با حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ روبرو نیستیم. با انجام تغییراتی می‌توان به مبهم مورد نظر رسید:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{\sqrt{۲x-۱}-۱}\times\frac{\sqrt{۲x-۱}+۱}{\sqrt{۲x-۱}+۱}=\lim\frac{۱}{x-۱}-\frac{\sqrt{۲x-۱}+۱}{\underbrace{(۲x-۱-۱)}_{۲(x-۱)}}$$

$$\lim\frac{۲-\sqrt{۲x-۱}-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{۲x-۱}}{۲(x-۱)}=\frac{۰}{۰}$$ مخرج مشترک

حالا می‌توان با گویا کردن صورت مشکل را برطرف نمود

$$\lim\frac{۱-\sqrt{۲x-۱}}{۲(x-۱)}\times\frac{۱+\sqrt{۲x-۱}}{۱+\sqrt{۲x-۱}}=\lim\frac{\overbrace{۱-۲x+۱}^{-۲\,\cancel{(x-۱)}}}{۲\,\cancel{(x-۱)}\,(۱+\sqrt{۲x-۱})}=-\frac{۱}{۲}$$

۹ – گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام کافیست صورت و مخرج را گویا نمائیم.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲}\times\frac{\sqrt{۲x+۱}+۳}{\sqrt{۲x+۱}+۳}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}$$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\overbrace{(۲x+۱-۹)}^{(۲x-۸)}(\sqrt{x}+۲)}{(x-۴)(\sqrt{۲x+۱}+۳)}=\lim_{x\to ۴}\frac{۲\,\cancel{(x-۴)}\,(\sqrt{x}+۲)}{\cancel{(x-۴)}\,(\sqrt{۲x+۱}+۳)}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$$

۱۰ – گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^{۲}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام کافی است مخرج کسر دو بار گویا شود هم بوسیله‌ی مزدوج هم بوسیله‌ی مکمل:

$$\lim\frac{(x-۱)^{۲}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)}\times\frac{(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}+۱)}\times\frac{(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}$$

$$\lim\frac{\cancel{(x-۱)}^{۲}(\sqrt{x}+۱)(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}^{۲}}=۶$$

۱۱ – گزینه ۳ نمی‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را استخراج و حذف نمود:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(\sin^{۲}x)}{\cos^{۲}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(\sin^{۲}x)}{(۱-\sin^{۲}x)}$$

$$\lim\frac{(\cancel{۱-\sin x})(\sin^{۲}x)}{(\cancel{۱-\sin x})(۱+\sin x)}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲ - گزینه ۴ ابتدا باید حد عبارت اول را محاسبه نماییم، تا مقدار a را مشخص کنیم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cos^۲ x}{۱+\cos^۲ x} = a \to a = \frac{۱}{۲}$$

حال پارامتر a را جایگذاری می‌نماییم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} \frac{۴\times \frac{۱}{۲}\sin x - ۱}{۸\times \frac{۱}{۲}\sin^۲ x - ۱} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} \frac{۲\sin x - ۱}{۴\sin^۲ x - ۱} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} \frac{(۲\sin x - ۱)}{(۲\sin x - ۱)(۲\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} \frac{۱}{۲\sin x + ۱} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳ - گزینه ۴ نکته: اگر k و $k+۱$ دو عدد صحیح متوالی باشند و $k \le x < k+۱$، آنگاه:

$$[x] = k$$

هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینهٔ ۱} : \lim_{x\to ۴^+} [x] \xlongequal{۴<x<۵} ۴ \qquad \checkmark$$

$$\text{گزینهٔ ۲} : \lim_{x\to ۴^-} [x] \xlongequal{۳<x<۴} ۳ \qquad \checkmark$$

$$\text{گزینهٔ ۳} : \lim_{x\to ۴^-} [-x] \xlongequal[-۴<-x<-۳]{۳<x<۴} -۴ \qquad \checkmark$$

$$\text{گزینهٔ ۴} : \lim_{x\to ۴^+} [-x] \xlongequal[-۵<-x<-۴]{۴<x<۵} -۵ \qquad \times$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۴ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{|x|} = \lim \frac{x}{x} = +۱ \to a = +۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x}{|x|} = \lim \frac{x}{-x} = -۱ \to b = -۱$$

پس داریم: $a - b = ۱ - (-۱) = ۲$

۱۵ - گزینه ۱

نکته: $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

نکته: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad (\lim_{x\to a} g(x) \neq ۰)$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-۱}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to ۲} (f(x)-۱)}{\lim_{x\to ۲} g(x)} = \frac{۳-۱}{-۱} = -۲$$

۱۶ - گزینه ۴ نکته: اگر $f(x) = k$ یک تابع ثابت باشد، آن‌گاه: $\lim_{x\to a} f(x) = k$

نکته: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \ell > ۰$، آن‌گاه: $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$

نکته: اگر a یک عدد غیر صحیح باشد، آن‌گاه: $\lim_{x\to a} [x] = [a]$ با توجه به نکات بالا، گزینه‌های ۱، ۲، ۳ درست‌اند، اما $\lim_{x\to ۲} [x]$ وجود ندارد. زیرا مقادیر حد چپ و حد راست این تابع در $x = ۲$ متفاوت است:

$$\lim_{x\to ۲^+} [x] = ۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۲^-} [x] = ۱$$

۱۷ - گزینه ۱

نکته: $|u| = \begin{cases} u & u \ge ۰ \\ -u & u < ۰ \end{cases}$

نکته: تابع $f(x)$ در $x = a$ حد دارد. هرگاه: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

ابتدا با کمک بازه‌بندی، قدرمطلق را حذف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & x > ۴ \\ -(x+a) & x < ۴ \end{cases}$$

اکنون باید حد چپ و حد راست در $x = ۴$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} \lim_{x\to ۴^+} f(x) = \lim_{x\to ۴^+} (x+a) = ۴ + a \\ \lim_{x\to ۴^-} f(x) = \lim_{x\to ۴^-} (-x-a) = -۴ - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴ + a = -۴ - a \Rightarrow ۲a = -۸ \Rightarrow a = -۴$$

۱۸ - گزینه ۳

نکته: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$

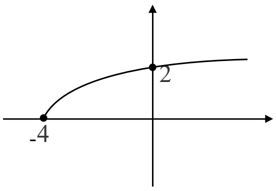
نکته: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\qquad(\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq ۰)$

$$a=\lim_{x\to ۲}f(x)\Rightarrow a=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-a}{x+۲}$$

$$\Rightarrow a=\frac{۴-a}{۲+۲}\Rightarrow ۴a=۴-a\Rightarrow ۵a=۴\Rightarrow a=\frac{۴}{۵}$$

۱۹ - گزینه ۲ می‌توان برای یافتن تعداد گزاره‌های صحیح می‌توان نمودار تابع را رسم نمود.

با توجه به نمودار تابع در $x=-۴$ حد چپ و ندارد پس $\lim\limits_{x\to -۴}f(x)=۰$ صحیح نمی‌باشد. ولی سایر موارد صحیح است.



۲۰ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=۱-۳+۲=۰$$

$$\lim_{x\to ۱}g(x)=۱-۱=۰$$

$$\Rightarrow \lim(f+g)(x)=\lim_{x\to ۱}f(x)+\lim_{x\to ۱}g(x)=۰+۰=۰$$

$$\lim_{x\to ۱}(\frac{f}{g})(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴-۳x^۲+۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۱)(x^۲-۲)}{x-۱}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)(x^۲-۲)}{\cancel{x-۱}}=\lim_{x\to ۱}(x+۱)(x^۲-۲)=۲\times(-۱)=-۲$$

۲۱ - گزینه ۳ وقتی $x\to ۰$ مخرج کسر صفر می‌شود ولی حاصل حد عدد ۳ شده است پس حد صورت کسر هم باید در این نقطه صفر شود تا حد صورت و مخرج عامل مشترک x داشته باشد تا حاصل حد پس از ساده کردن کسر برابر ۳ شود:

$$\lim_{x\to ۰}x^۲+ax+b=۰\Rightarrow ۰+۰+b\Rightarrow b=۰$$

پس حد به صورت زیر در می‌آید:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+ax}{x}=۳\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{x(x+a)}{x}=۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}x+a=۳\Rightarrow a=۳\Rightarrow a+b=۳+۰=۳$$

۲۲ - گزینه ۴ می‌دانیم اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=I$ و $I>۰$، آن‌گاه طبق قضایای حد $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{I}$. پس در مورد $\lim\limits_{x\to t}\sqrt{f(x)}$ نمی‌توانیم با قطعیت نظر دهیم. ممکن است صفر باشد یا اینکه وجود نداشته باشد. برای مثال $f(x)=x$ را در نظر بگیرید.

داریم: $\lim\limits_{x\to ۰}x=۰$، در حالی که $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x}$ وجود ندارد.

۲۳ - گزینه ۳ چون $f(x)$ در نقطهٔ $x=۱$ حدی مخالف صفر دارد، باید حد چپ و راست مخالف صفر باشد و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{x^۲-۳x+a}=\frac{۰}{۱-۳+a}=\frac{۰}{-۲+a=۰}\Rightarrow a=۲$$

حد مخرج باید در $x=۱$ صفر شود. چون اگر مخرج صفر نشود با توجه به اینکه حد صورت صفر است، حاصل حد راست صفر می‌شود که خلاف فرض مسئله است.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{x^۲-۳x+۲}\\&=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{x-۱}}{\cancel{(x-۱)}(x-۲)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱}{x-۲}=-۱\\&\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{b(x-۱)}{|x-۱|}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{b\cancel{(x-۱)}}{-\cancel{(x-۱)}}=-b\end{aligned}\right\}\Rightarrow -b=-۱\Rightarrow b=۱$$

$$\Rightarrow f(۱)=a+b=۲+۱=۳$$

۲۴ - گزینه ۲ ابتدا می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۲^+}([x]+۳m)=۲+۳m\quad,\quad \lim_{x\to ۵^-}([x]+۳m)=۴+۳m$$

اکنون با جای‌گذاری این مقادیر داریم:

$$(4+3m)+(2+3m)=7\Rightarrow 6+6m=7\Rightarrow m=\frac{1}{6}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}([x]+3m)\overset{m=\frac{1}{6}}{=}0+3(\frac{1}{6})=\frac{1}{2}$$

۲۵ - گزینهٔ ۱ نکته: برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ در صورتی که حد صورت و مخرج برابر صفر باشد ابتدا عامل صفرکننده را از صورت و مخرج حذف می کنیم. سپس حاصل حد را به دست می‌آوریم.

ابتدا مقادیر هر یک از حدها را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(2x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x-2}{[x]-1}=\frac{3-2}{3-1}=\frac{1}{2}$$

بنابراین حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

۲۶ - گزینهٔ ۲ نکته: تابع $f(x)$ در $x=a$ حد دارد. هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$

با توجه به نکتهٔ بالا، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $\lim\limits_{x\to 5}xf(x)=\lim\limits_{x\to 5}x[x]=\begin{cases}\lim_{x\to 5^+}x[x]=5(5)=25\\ \lim_{x\to 5^-}x[x]=5(4)=20\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 5}xf(x)$ وجود ندارد.

گزینهٔ ۲: $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)f(x)=\lim\limits_{x\to 5}(x-5)[x]=\begin{cases}\lim_{x\to 5^+}(x-5)[x]=0\times 5=0\\ \lim_{x\to 5^-}(x-5)[x]=0\times 4=0\end{cases}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 5}(x-5)f(x)=0$

گزینهٔ ۳: $\lim\limits_{x\to 5}(f(x)-5)=\lim\limits_{x\to 5}[x]-5=\begin{cases}\lim_{x\to 5^+}[x]-5=5-5=0\\ \lim_{x\to 5^-}[x]-5=4-5=-1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 5}(f(x)-5)$ وجود ندارد.

گزینهٔ ۴: $\lim\limits_{x\to 5}f(x-1)=\lim\limits_{x\to 5}[x-1]=\begin{cases}\lim_{x\to 5^+}[x-1]=[4^+]=4\\ \lim_{x\to 5^-}[x-1]=[4^-]=3\end{cases}\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 5}f(x-1)$ وجود ندارد.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

تذکر: تابع $f(x)=(x-a)[x]$ در $x=a$ حد دارد.

۲۷ - گزینهٔ ۳ معادلهٔ تابع خطی f به‌صورت $f(x)=x+2$ (با شرط $x\neq 1$) است. با جای‌گذاری ضابطهٔ f در عبارت داده‌شده داریم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+5)f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+5)(x+2)}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+5)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+5}{x-2}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$$

۲۸ - گزینهٔ ۲ نکته: برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، در صورتی که حد صورت و مخرج برابر صفر باشد ابتدا عامل صفرکننده را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم. سپس حاصل حد را به‌دست می‌آوریم.

نکته: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

نکته: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

با استفاده از نکات بالا، عبارت‌های صورت و مخرج را ساده‌تر می‌کنیم و بعد از حذف عامل صفرکننده از صورت و مخرج، حاصل حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3x}{1-\sin^2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x+\sin^2x)}{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x+\sin^2x}{1+\sin x}=\frac{3}{2}$$

۲۹ - گزینهٔ ۳ اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_2$ باشند؛ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_۱+L_۲=\dfrac{۳}{۲}\\ \lim\limits_{x\to a}(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{L_۱}{L_۲}=-۴\to L_۱=-۴L_۲\end{array}\right\}L_۱=۲, L_۲=-\dfrac{۱}{۲}$$

پس: $\lim\limits_{x\to a}(f-۲g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-۲\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_۱-۲L_۲=۲-۲(-\dfrac{۱}{۲})=۳$

۳۰ - گزینه ۳ حد تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج هنگامی وجود دارد که عبارت زیر رادیکال مثبت باشد یعنی:

$$bx+a>۰\to bx>-a\xrightarrow{b>۰}x>-\dfrac{a}{b}\Rightarrow\boxed{c>-\dfrac{a}{b}}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۱	۱۱ - ۳	۱۶ - ۴	۲۱ - ۳	۲۶ - ۲
۲ - ۱	۷ - ۳	۱۲ - ۴	۱۷ - ۱	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۲	۱۳ - ۴	۱۸ - ۳	۲۳ - ۳	۲۸ - ۲
۴ - ۴	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۲	۲۴ - ۲	۲۹ - ۳
۵ - ۳	۱۰ - ۱	۱۵ - ۱	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۳