علی هاشمی

نام آزمون: نمودار توابع نمایی و لگاریتمی

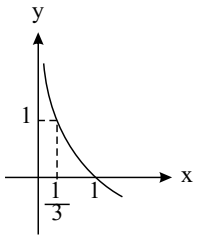
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ - اگر $f(x) = ۲^x$ ، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{x - f^{-۱}(x)}$ کدام است؟

۲ - اگر $f(x) = \log_۳^{(x-۱)}$ ، آن‌گاه دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{۴ - f^{-۱}(x)}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۳ - ضابطهٔ تابع مقابل کدام می‌تواند باشد؟



۴ - نمودار توابع $y = \log_{\frac{۱}{۲}} x$ و $y = ۲^{-x}$ نسبت به ..... قرینه‌اند.

۵ - اگر $x > ۰$ باشد، آن‌گاه کدام یک از روابط زیر همواره صحیح است؟

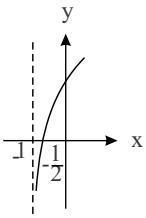
۶- نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۲^{x}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۷- مقدار انرژی آزاد شده توسط زلزلهٔ کرمانشاه در آبان‌ماه ۹۶ که به بزرگی ۷٫۳ ریشتر بود، چقدر بوده است؟

$(\log E = ۱۱٫۸ + ۱٫۵M)$

۸- اگر انرژی آزادشدهٔ زلزله (E) از رابطهٔ $logE = ۱۱٫۸ + ۱٫۵M$ (M در مقیاس ریشتر) به دست آید، انرژی آزادشده در یک زلزلهٔ ۷٫۵ ریشتری چند برابر انرژی آزادشده در یک زلزلهٔ ۵٫۵ ریشتری است؟

۹- نمودار تابع $f(x)=a+\log_{۲}(x+b)$ به‌صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



۱۰- انرژی آزاد شده (به واحد Erg) از زلزله‌ای به بزرگی M ریشتر از رابطهٔ $\log E = ۱۲ + ۱٫۵M$ به دست می‌آید. اگر انرژی آزاد شده $Erg^{۱۸}$ ۱۰ × ۱۰۲۴ باشد، بزرگی این زلزله چند ریشتر بوده است؟$(\log ۲ = ۰٫۳)$

۱۱- اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشدهٔ آن برابر E در واحد اِرگ (Erg) است که از رابطهٔ $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$ به‌دست می‌آید. اگر یک زلزلهٔ ۸ ریشتری رخ دهد، مقدار انرژی آزادشده در آن چند اِرگ است؟

۱۲- نمودار تابع $f(x) = ۱ - \log_{۳}\frac{۹}{x}$ به کدام صورت است؟

۱۳- کدام گزینه در مورد نمودار تابع $y = -\log_{۲}^{(x+۲)}$ درست است؟

۱۴- جواب نامعادلهٔ $x^{۲} \geq ۲^{x}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱۵- اگر به بزرگی زمین‌لرزه‌ای برحسب ریشتر حداقل ۴ واحد اضافه شود، مقدار انرژی آزادشده برحسب ارگ حداقل چند برابر می‌شود؟ ($\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$)

۱۶ - یک دانش‌آموز، بعد از شرکت در n آزمون می‌تواند به درصد $f(x) = ۱۰۰ - ۹۰\left(۲^{-۰/۴n}\right)$ در درس ریاضی برسد. بعد از شرکت در چند آزمون انتظار می‌رود این دانش‌آموز به درصد ۷۰ در درس ریاضی برسد؟ $(\log_۲^۳ \simeq ۱/۶)$

۱۷ - نمودار تابع $y = -\log_{\frac{۱}{۲}}^{(x+۲)}$ شبیه کدام گزینه است؟

۱۸ - برای رسم نمودار تابع $f(x) = \log_۲(۲x+۴)$، به ترتیب باید چه انتقال‌هایی را روی تابع $y = \log_۲(x-۱)$ انجام دهیم؟

۱۹ - نمودار تابع $f(x) = ۱ - ۲^{۱-۲x}$ از کدام نواحی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۲۰ - در یک سال گذشته، زلزله‌ای به قدرت ۶ ریشتر شهر A و زلزله‌ای به قدرت ۴/۷ ریشتر شهر B را لرزاند، مقدار انرژی آزاد شده بر اثر زلزلهٔ اتفاق افتاده در شهر A تقریباً چند برابر شهر B است؟ $(\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M)$

۲۱ - تکثیر گونه‌ای از باکتری‌ها به این صورت است که هر باکتری بعد از مدت زمان یک ربع ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اگر نوع خاصی از یک بیماری با تعداد ۵۰ باکتری شروع شود، پس از گذشت چند ساعت تعداد باکتری‌های تولیدشده به ۱۲۸۰۰ خواهد رسید؟ (با فرض این‌که هیچ‌کدام از باکتری‌ها از بین نرود.)

۲۲ - دو نوع ویروس A و B را کشت می‌دهیم. در این کشت، جمعیت ویروس A پس از ۵ دقیقه و جمعیت ویروس B پس از ۴ دقیقه دوبرابر می‌شود. اگر جمعیت اولیهٔ ویروس A به میزان ۹ برابر جمعیت اولیهٔ ویروس B باشد، پس از ۱۷ دقیقه جمعیت ویروس A چند برابر جمعیت ویروس B خواهد بود؟ $(۲^{۰٫۸۵} \approx ۱٫۸)$

۲۳ - اگر نمودار تابع $f(x) = ۳^{x-a} + b$ از نقاط $(۰,۳)$ و $(۱,۹)$ بگذرد، آنگاه حاصل عبارت $\sqrt{۳}\sin\left(-\frac{a\pi}{۳}\right) + b$ چند برابر ۳ است؟

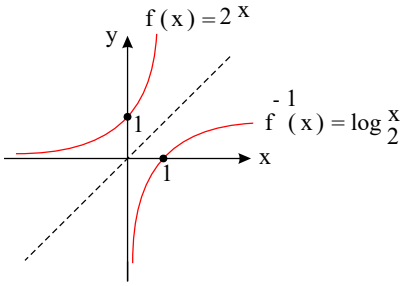
۲۴ - اگر انرژی آزادشده در یک زلزله $۲٫۵ \times ۱۰^{۱۸}$ ارگ باشد، قدرت آن زلزله چند ریشتر بوده است؟ $(\log ۲ \simeq ۰٫۳,\ \log E = ۱۱٫۸ + ۱٫۵M)$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ دامنه‌ی تابع رادیکالی $y=\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ برابر است با:

$$x-f^{-1}(x)\geq 0 \Rightarrow x\geq f^{-1}(x)$$

ابتدا معکوس تابع $f(x)=2^x$ را رسم می‌کنیم. باتوجه به نامعادله‌ی $x\geq f^{-1}(x)$ ، به دنبال محدوده‌ی xهایی هستیم که به ازای آن، نمودار خط $y=x$ بالاتر یا روی نمودار تابع $f^{-1}(x)$ باشد. باتوجه به شکل در تمام نقاط دامنه‌ی $f^{-1}(x)$ ، خط $y=x$ بالاتر از نمودار معکوس f قرار دارد. پس دامنه‌ی تابع مورد نظر $(0,+\infty)$ می‌شود.



$$D_{f^{-1}}=(0,+\infty)$$

۲ - گزینه ۲ ابتدا باید ضابطه‌ی تابع معکوس را پیدا کنیم برای این منظورx را برحسب y به دست می‌آوریم و سپس yها را به x و x را به $f^{-1}(x)$ تبدیل می‌کنیم.

$$y=\log_3^{x-1} \xrightarrow{\text{تعریف}} x-1=3^y \rightarrow x=3^y+1 \rightarrow f^{-1}(x)=3^x+1$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{4-f^{-1}(x)}$ کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

$$4-f^{-1}(x)\geq 0 \rightarrow 4-(3^x+1)\geq 0 \rightarrow 4-3^x-1\geq 0 \rightarrow 3^x\leq 3^1 \rightarrow x\leq 1$$

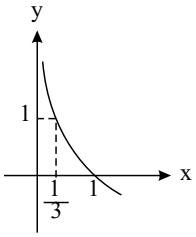
که این جواب شامل یک عدد طبیعی می‌باشد. $(x=1)$

توجه: در بازهٔ $x\leq 1$ این x مربوط به دامنهٔ تابع f^{-1} است و ربطی به دامنهٔ تابع لگاریتمی ندارد.

۳ - گزینه ۴

نکته: $\log_a a=1$ ، $\log_a 1=0$

نمودار تابع از نقطهٔ $(0,1)$ عبور می‌کند، پس گزینه‌های ۱ و ۲ رد می‌شوند. نمودار تابع از نقطهٔ $(1,\frac{1}{3})$ هم عبور می‌کند،پس گزینهٔ ۳ هم رد می‌شود. بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.



۴ - گزینه ۳ نکتهٔ ۱: نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (با فرض $y=x$) قرینه یکدیگرند.

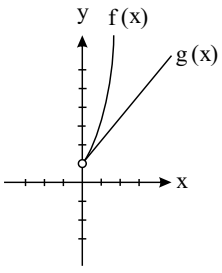
نکتهٔ ۲: توابع $y_1=a^x$ و $y_2=\log_a x$ (با فرض $a>0$ و $a\neq 1$) وارون یکدیگرند.

$$y_1=\log_{\frac{1}{2}} x \quad , \quad y_2=2^{-x}=\frac{1}{2^x}=(\frac{1}{2})^x$$

با توجه به نکتهٔ ۲، این دو تابع وارون یکدیگرند. پس با توجه به نکته ۱، نمودارشان نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند.

۵ - گزینه ۴

با توجه به نمودارهای توابع $f(x)=10^x$ و $g(x)=1+x$ در بازهٔ $(0,+\infty)$، نتیجه می‌شود که:

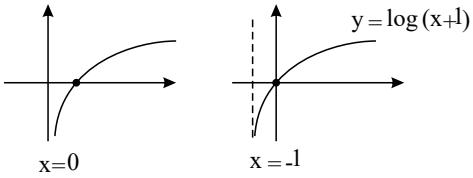


$g(x) < f(x) \Rightarrow ۱ + x < ۱۰^{x}$

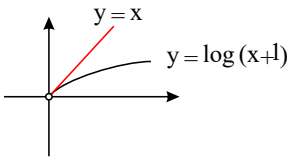
$\Rightarrow \log(x+۱) < \log ۱۰^{x} \Rightarrow \log(۱+x) < x$

راه حل دوم:

برای رسیدن به گزینه هموار صحیح می‌توان از مفهوم حل نامعادله به روش هندسی استفاده کرد. در همه گزینه‌ها نمودار $y = \log^{(x+۱)}$ وجود دارد. برای رسم آن، از انتقال استفاده می‌نماییم

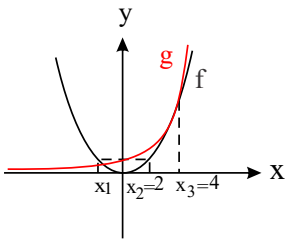


حال اگر خط $y = x$ را رسم نماییم، برای نمودار $x > ۰$ نامعادله $\log^{(x+۱)} < x$ برقرار است.



۶ - گزینه ۳

نمودار دو تابع $f(x) = x^{۲}$ و $g(x) = ۲^{x}$ در شکل زیر رسم شده است. همان طور که ملاحظه می کنید نمودار این دو تابع در ۳ نقطه $(-۱ < x_{۱} < ۰ \ , \ x_{۲} = ۲ \ , \ x_{۳} = ۴)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.



۷ - گزینه ۴

$\log E = ۱۱٫۸ + ۱٫۵M \Rightarrow \log E = ۱۱٫۸ + ۱٫۵ \times (۷٫۳) \Rightarrow \log E = ۱۱٫۸ + ۱۰٫۹۵ = ۲۲٫۷۵$

$\Rightarrow E = ۱۰^{۲۲٫۷۵}$

۸ - گزینه ۴

$\begin{cases} \log E_{۱} = ۱۱٫۸ + ۱٫۵ \times ۷٫۵ \\ \log E_{۲} = ۱۱٫۸ + ۱٫۵ \times ۵٫۵ \end{cases} \Rightarrow \log E_{۱} - \log E_{۲} = ۱٫۵ \times ۲ = ۳$

$\Rightarrow \log \frac{E_{۱}}{E_{۲}} = ۳ \Rightarrow \frac{E_{۱}}{E_{۲}} = ۱۰۰۰$

۹ - گزینه ۱ با توجه به نمودار دامنهٔ تابع $x > -۱$ می‌باشد، از طرفی با توجه به ضابطه داریم:

$\left.\begin{matrix} x + b > ۰ \rightarrow x > -b \\ x > -۱ \end{matrix}\right\} -b = -۱ \Rightarrow b = ۱$

از طرفی منحنی از نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲}, ۰)$ عبور می‌نماید و مختصات آن در ضابطهٔ تابع صدق می‌نماید:

$f(x) = a + \log_{۲}^{(x+۱)} \xrightarrow{(-\frac{۱}{۲}, ۰)} ۰ = \log_{۲}^{(-\frac{۱}{۲}+۱)} + a$

$\rightarrow ۰ = \log_{۲}^{(\frac{۱}{۲})} + a \rightarrow a - ۱ = ۰ \rightarrow a = ۱$

پس داریم: $a + b = ۱ + ۱ = ۲$

۱۰ - گزینه ۴ برای محاسبهٔ بزرگی این زلزله، باید در رابطهٔ مطرح شده انرژی زلزله را جایگذاری نماییم.

$\log^{E} = ۱۲ + ۱٫۵M \xrightarrow{E = ۱۰۲۴ \times ۱۰^{۱۸}}$

$\rightarrow \log^{۱۰۲۴ \times ۱۰^{۱۸}} = ۱۲ + ۱٫۵M \rightarrow \log^{۱۰۲۴} + \log^{۱۰^{۱۸}} = ۱۲ + ۱٫۵M$

$\rightarrow \log ۲^{۱۰} + ۱۸\log^{۱۰} = ۱۲ + ۱٫۵M \rightarrow ۱۰ \times \log^{۲} + ۱۸ = ۱۲ + ۱٫۵M$

$\rightarrow ۱۰ \times ٫۳ + ۱۸ = ۱۲ + ۱٫۵M \rightarrow ۱٫۵M = ۲۱ - ۱۲ \rightarrow M = \frac{۹}{۱٫۵} = ۶$

۱۱ - گزینه ۱ نکته: اگر $\log_{b} a = x$، آن‌گاه: $a = b^{x}$

با جای‌گذاری $M = ۸$ خواهیم داشت:

$$\log E = ۱۱٫۸ + ۱٫۵(۸) \Rightarrow \log E = ۲۳٫۸ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۳٫۸}$$

۱۲ - گزینه ۱

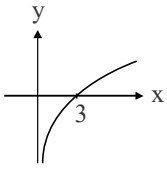
نکته: $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

نکته: $\log_b a^n = n \log_b a \quad , \quad \log_a a = ۱$

ابتدا با استفاده از نکات بالا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

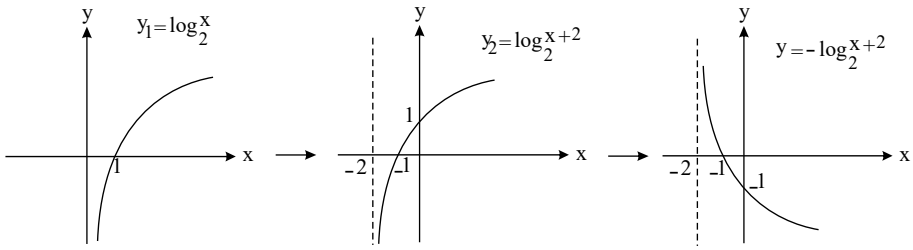
$$f(x) = ۱ - \log_۳ \frac{۹}{x} = ۱ - (\log_۳ ۹ - \log_۳ x) = ۱ - (۲ - \log_۳ x) = \log_۳ x - ۱$$

بنابراین نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت روبه‌رو است:



پس گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۱۳ - گزینه ۴ نمودار تابع $y = -\log_۲^{(x+۲)}$ را رسم می‌کنیم و داریم:

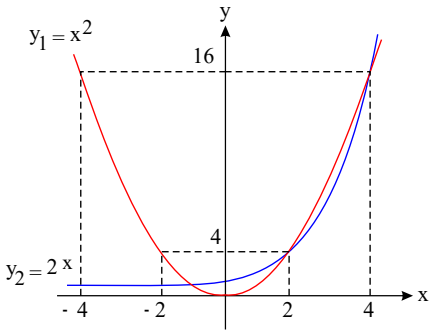


با توجه به شکل گزینهٔ «۴» درست است.

۱۴ - گزینه ۲

نمودار دو تابع $y_۱ = x^۲$ و $y_۲ = ۲^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

نامعادلهٔ $x^۲ \geq ۲^x$ تنها در بازهٔ $[۲, ۴]$ رخ می‌دهد که $x^۲$ بالاتر از ۲^x رسم شده است و این بازه شامل ۳ عدد طبیعی ۲، ۳ و ۴ است.



۱۵ - گزینه ۴

می‌دانیم $\log_b^a = c \to b^c = a$ و $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$ است.

$$\begin{cases} \log E_۱ = ۱۱٫۸ + ۱٫۵M_۱ \\ \log E_۲ = ۱۱٫۸ + ۱٫۵M_۲ \end{cases} \to \log E_۲ - \log E_۱ = ۱٫۵M_۲ - ۱٫۵M_۱$$

$$\to \log \frac{E_۲}{E_۱} = ۱٫۵(M_۲ - M_۱)$$

$$M_۲ - M_۱ \geq ۴ \to \log \frac{E_۲}{E_۱} \geq ۱٫۵ \times ۴ \to \log \frac{E_۲}{E_۱} \geq ۶ \to \frac{E_۲}{E_۱} \geq ۱۰^۶$$

۱۶ - گزینه ۱

می‌دانیم $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$ است.

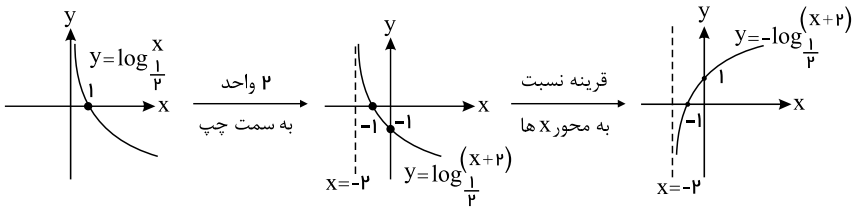
$$f(n) = ۱۰۰ - ۹۰ \left(۲^{-۰٫۴n}\right) = ۷۰ \to ۱۰۰ - ۷۰ = ۹۰ \left(۲^{-۰٫۴n}\right)$$

$$\to ۳۰ = ۹۰ \left(۲^{-۰٫۴n}\right) \to ۲^{-۰٫۴n} = \frac{۱}{۳} \to ۲^{-۰٫۴n} = ۳^{-۱}$$

$\xrightarrow{\text{لگاریتم در مبنای ۲}} \log_{۲}^{۲^{-۰/۴n}} = \log_{۲}^{۳^{-۱}} \rightarrow -۰/۴n = -۱\log_{۲}^{۳}$

$\rightarrow -۰/۴n = -۱ \times ۱/۶ \rightarrow -۰/۴n = -۱/۶ \rightarrow n = ۴$

۱۷ - گزینه ۴ برای رسم نمودار $y = -\log_{\frac{۱}{۲}}^{(x+۲)}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.



۱۸ - گزینه ۲

$f(x) = \log_{۲}(۲x+۴) = \log_{۲} ۲(x+۲) = \log_{۲}^{۲} + \log_{۲}(x+۲) = ۱ + \log_{۲}(x+۲)$

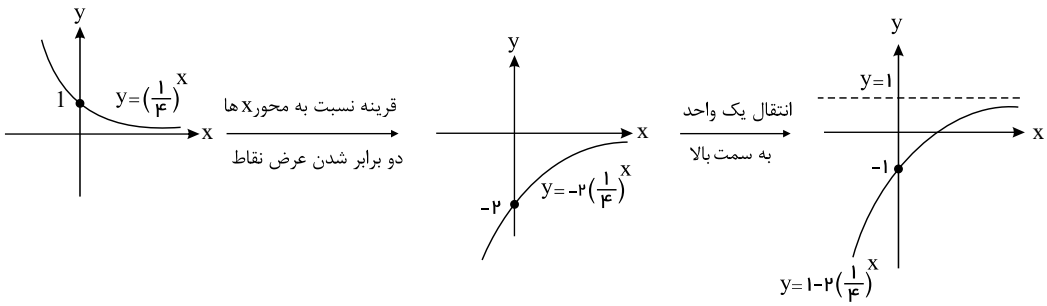
اکنون بررسی می کنیم که نمودار $y = \log_{۲}(x-۱)$ را چگونه به نمودار $y = ۱ + \log_{۲}(x+۲)$ تبدیل کنیم:

$y = ۱ + \log(x-۱) \xrightarrow[\text{۳ واحد به چپ}]{x \to x+۳} y = \log_{۲}(x+۲)$

$\xrightarrow[\text{۱ واحد به سمت بالا}]{y \to y+۱} y = ۱ + \log_{۲}(x+۲)$

۱۹ - گزینه ۱

$f(x) = ۱ - ۲^{۱-۲x} = ۱ - (۲^{۱} \times ۲^{-۲x}) = ۱ - ۲(\frac{۱}{۲^{۲}})^{x} \rightarrow f(x) = ۱ - ۲(\frac{۱}{۴})^{x}$



نمودار تابع از ناحیهٔ دوّم عبور نمی‌کند.

۲۰ - گزینه ۳ می‌دانیم $\log_{k}^{a} - \log_{k}^{b} = \log_{k}^{\frac{a}{b}}$ و $\log_{b}^{a} = c \rightarrow b^{c} = a$ است.

$$\begin{cases} \text{شهر } A : \log E_A = ۱۱/۸ + ۱/۵M_۱, \rightarrow \log E_A = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶) \rightarrow \log E_A = ۲۰/۸ \\ \text{شهر } B : \log E_B = ۱۱/۸ + ۱/۵M_۲ \rightarrow \log E_B = ۱۱/۸ + ۱/۵(۴/۷) \rightarrow \log E_B = ۱۸/۸۵ \end{cases}$$

$\rightarrow \log E_A - \log E_B = ۲۰/۸ - ۱۸/۸۵ \rightarrow \log \frac{E_A}{E_B} = ۱/۹۵ \rightarrow \frac{E_A}{E_B} = ۱۰^{۱/۹۵} \simeq ۹۰$

۲۱ - گزینه ۲ اندازهٔ تودهٔ باکتری پس از t ساعت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$P(t) = ۵۰ \times ۲^{\frac{t}{۱}} \rightarrow P(t) = ۵۰ \times ۲^{۴t}$

$۱۲۸۰۰ = ۵۰ \times ۲^{۴t} \rightarrow ۲^{۴t} = \frac{۱۲۸۰۰}{۵۰} \rightarrow ۲^{۴t} = ۲۵۶ \rightarrow ۲^{۴t} = ۲^{۸} \rightarrow ۴t = ۸ \rightarrow t = ۲$ ساعت

۲۲ - گزینه ۴ جمعیت ویروس B پس از ۴ دقیقه دو برابر می‌شود، پس اگر جمعیت اولیهٔ آن k باشد، جمعیت آن پس از t دقیقه برابر است با:

$M_B = k(۲)^{\frac{t}{۴}}$

چون جمعیت اولیهٔ A، ۹ برابر جمعیت اولیهٔ B است، پس جمعیت اولیهٔ A برابر $۹k$ خواهد بود و نیز با گذشت ۵ دقیقه دو برابر می‌شود. پس جمعیت A پس از t دقیقه به‌صورت زیر خواهد بود:

$M_A = ۹k(۲)^{\frac{t}{۵}}$

$$\Rightarrow \frac{M_A}{M_B} = \frac{۹k(۲)^{\frac{t}{۵}}}{k(۲)^{\frac{t}{۴}}} = ۹ \times (۲)^{(\frac{t}{۵}-\frac{t}{۴})} = ۹ \times (۲)^{-\frac{t}{۲۰}}$$

$$t = ۱۷ \Rightarrow \frac{M_A}{M_B} = ۹ \times (۲)^{-\frac{۱۷}{۲۰}} = ۹ \times (۲)^{-۰/۸۵} = \frac{۹}{۲^{۰/۸۵}} \simeq \frac{۹}{۱/۸} = ۵$$

۲۳ - گزینه ۳

$$f(x) = ۳^{x-a} + b$$

$$\begin{cases} (۰,۳) \xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند.}} f(۰) = ۳ \to ۳^{۰-a} + b = ۳ \to \frac{۱}{۳^a} = ۳ - b \\ (۱,۹) \xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند.}} f(۱) = ۹ \to ۳^{۱-a} + b = ۹ \to \frac{۳}{۳^a} = ۹ - b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div} \frac{۹-b}{۳-b} = ۳ \to ۹ - b = ۹ - ۳b \to -b = -۳b \to b = ۰$$

$$\to \frac{۱}{۳^a} = ۳ - ۰ \to ۳^{-a} = ۳ \to a = -۱$$

$$\Rightarrow \sin\left(-\frac{a\pi}{۳}\right) + b \overset{a=-۱}{=\!=} \sin\left(-\frac{(-۱)\pi}{۳}\right) + ۰ = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} \times \frac{۱}{۲}$$

۲۴ - گزینه ۲ می دانیم $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$ و $\log^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b$ و $\log_k^{a^n} = n\log_k^a$ است.

$$E = ۲/۵ \times ۱۰^{۱۸} \to \log(۲/۵ \times ۱۰^{۱۸}) = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

$$\to \log ۲/۵ + \log ۱۰^{۱۸} = ۱۱/۸ + ۱/۵M \to \log(\frac{۱۰}{۴}) + ۱۸ = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

$$\to (\log ۱۰ - ۲\log ۲) + ۱۸ = ۱/۸ + ۱/۵M \to ۱ - ۲(۰/۳) + ۱۸ = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

$$\to ۱۸/۴ - ۱۱/۸ = ۱/۵M \to ۶/۶ = ۱/۵M \to M = ۴/۴$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۵ - ۴	۹ - ۱	۱۳ - ۴	۱۷ - ۴	۲۱ - ۲
۲ - ۲	۶ - ۳	۱۰ - ۴	۱۴ - ۲	۱۸ - ۲	۲۲ - ۴
۳ - ۴	۷ - ۴	۱۱ - ۱	۱۵ - ۴	۱۹ - ۱	۲۳ - ۳
۴ - ۳	۸ - ۴	۱۲ - ۱	۱۶ - ۱	۲۰ - ۳	۲۴ - ۲