

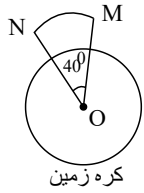


علی هاشمی

نام آزمون: واحدهای اندازه گیری زاویه

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

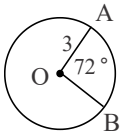


۱ - مطابق شکل، ماهواره‌ای در فاصله ۸۰۰ کیلومتری از سطح زمین در حال گردش روی یک مسیر دایره‌ای است. اگر این ماهواره از نقطه M به نقطه N برسد، چند کیلومتر مسافت طی کرده است؟ (شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)

۲ - چه مدت زمان طول می‌کشد تا عقربه دقیقه‌شمار ساعت، به اندازه $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران می‌کند؟

۳ - ماهواره‌ای روی مداری دایره‌ای شکل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در هر شبانه‌روز یک دور مسیر دایره‌ای را طی می‌کند. زاویه‌ای که این ماهواره نسبت به مرکز مسیر دایره‌ای در مدت ۵ ساعت طی می‌کند، تقریباً چند رادیان است؟ ($\pi = ۳,۱۴$)

۴ - مجموع دو زاویه ۷۲° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان می‌باشد. اگر اندازه زاویه بزرگتر برابر x درجه باشد، زاویه $(۵x - ۱۰^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی کدام است؟

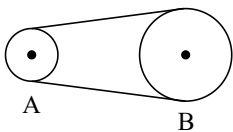


۵- در شکل زیر طول کمان روبه‌رو به زاویه ۷۲ درجه کدام است؟ (O مرکز دایره است.)

۶- در مثلثی اندازه یک زاویه ۳۰ درجه و تفاضل دو زاویه دیگر بر حسب رادیان $\frac{\pi}{10}$ است. اندازه زاویه بزرگتر چند رادیان است؟

۷- اگر $1 - \cos \alpha = \frac{5}{3}$ و $\tan \alpha \cdot \cos \alpha > 0$ باشد، آنگاه کمان α در کدام ربع دایره مثلثاتی است؟

۸- در شکل زیر چرخ‌دنده‌های A و B توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده A ، ۲۰ سانتی متر و شعاع چرخ‌دنده B برابر ۱ متر



است. اگر چرخ‌دنده B به اندازه $\frac{3\pi}{2}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده A چند دور می‌زند؟

۹- تقریباً چند ساعت طول می‌کشد تا عقربه ساعت‌شمار به اندازه ۱٫۵۷ رادیان دوران کند؟ ($\pi \approx 3,14$)



۱۰ - متمم و مکمل زاویه 20° برحسب رادیان، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱۱ - طول مسیری که نوک برف‌پاک‌کنی به طول $\frac{3}{\pi}$ متر پس از طی زاویه مرکزی 40° طی می‌کند، تقریباً چند سانتی‌متر است؟

۱۲ - چندتا از عبارتهای زیر درست است؟

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقین ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث بزرگ‌تر از اندازه هر ساق آن است.

ب) اگر دو زاویه از مثلثی $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{2\pi}{5}$ رادیان باشند، اندازه زاویه سوم 72° درجه است.

پ) انتهای کمان $\frac{5\pi}{6}$ در ربع دوم دایره مثلثاتی است.

ت) $\frac{\pi}{2}$ - رادیان برابر 9° درجه است.

۱۳ - اندازه یک زاویه برحسب رادیان برابر با $\frac{20\pi}{3}$ است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

۱۴ - دایره‌ای به شعاع 20 سانتی‌متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان به طول 2π سانتی‌متر از این دایره، چند رادیان است؟

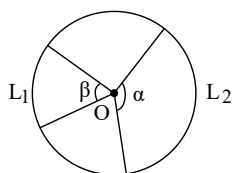


۱۵- مکمل زاویه $\frac{5\pi}{12}$ رادیان چند درجه است؟

۱۶- مجموع دو زاویه برحسب درجه 120° و اختلاف آن‌ها برحسب رادیان $\frac{\pi}{3}$ است. زاویه کوچک‌تر چند برابر زاویه بزرگ‌تر است؟

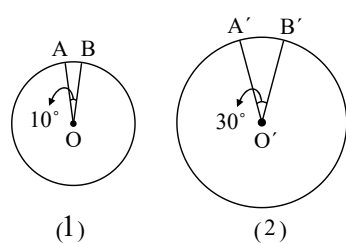
۱۷- اگر در شکل زیر حاصل ضرب طول کمان‌های L_1 و L_2 برابر $\frac{\pi}{9}$ مساحت دایره باشد و $\alpha = 4\beta$ ، آنگاه مثلثی با دو زاویه α و β از کدام نوع است؟

(O مرکز دایره است.)

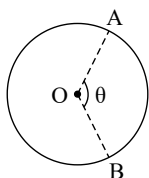


۱۸- اگر $\alpha = \beta - \gamma$ ، $\beta = 60^\circ$ و $\gamma = -3\pi$ رادیان باشند، آنگاه انتهای کمان زاویه α در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

۱۹- انتهای کمان‌های ۳ و $4,5$ رادیان به ترتیب در کدام نواحی قرار دارند؟

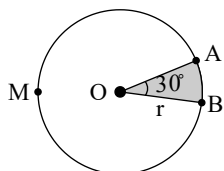


۲۰- مطابق شکل، اگر مساحت دایره (۲) سه برابر مساحت دایره (۱) باشد، حاصل $\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}$ کدام است؟



۲۱- در شکل زیر، اگر شعاع دایره ۴ cm و طول کمان AB برابر ۱۲ cm باشد، θ چند درجه است؟

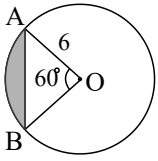
۲۲- چه مدت بر حسب دقیقه طول می کشد تا در یک ساعت عقربه ای، عقربه دقیقه شمار به اندازه $۲,۵\pi$ رادیان دوران کند؟



۲۳- در شکل مقابل، محیط ناحیه هاشورخورده $\pi + ۱۲$ است. در این صورت طول کمان \widehat{AMB} کدام است؟



۲۴- در شکل زیر محیط قسمت هاشورخورده کدام است؟





پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ برای محاسبه مسافت طی شده، باید در قدم اول زاویه برحسب rad باشد.

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{40^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{9}$$

برای محاسبه طول کمان پس از تبدیل واحد زاویه به رادیان می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned} \text{شعاع چرخش} &= 6400 + 800 = 7200 \text{ km} \\ \ell &= R \cdot \theta = 7200 \times \frac{2\pi}{9} = 1600\pi \end{aligned}$$

۲ - گزینه ۳ با گذشت هر ۶۰ دقیقه، عقربه دقیقه‌شمار، 36° دوران می‌کند، بنابراین:

$$\text{زاویه طی شده در هر دقیقه} = \frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$$

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\frac{8\pi}{3}}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow D = \frac{180^\circ \times 8}{3} = 480^\circ$$

یعنی عقربه دقیقه‌شمار، 480° دوران می‌کند و هر 6° معادل یک دقیقه است، بنابراین:

$$\frac{480^\circ}{6^\circ} = 80 \text{ دقیقه}$$

یعنی ۸۰ دقیقه طول می‌کشد تا عقربه دقیقه‌شمار، $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند، مدت زمانی معادل یک ساعت و ۲۰ دقیقه.

۳ - گزینه ۳ می‌دانیم هر شبانه‌روز ۲۴ ساعت است:

$$\text{زاویه طی شده در هر ساعت} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$$

$$\text{زاویه طی شده در ۵ ساعت} = 15^\circ \times 5 = 75^\circ$$

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{75^\circ}{180^\circ}$$

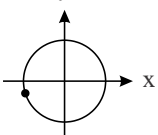
$$\Rightarrow R = \frac{75\pi}{180} \xrightarrow{\pi=3,14} R = \frac{75 \times 3,14}{180} \approx 1,3$$

۴ - گزینه ۴

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{15} = \frac{D}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow D = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ \Rightarrow \begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = 12^\circ \end{cases} \Rightarrow 2x = 84^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 42^\circ \text{ زاویه بزرگتر} \\ y = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow (5x - 10^\circ) = 200^\circ$$



۵ - گزینه ۵

$$\frac{72^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{72^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{221}{5}$$

اگر L طول کمان، r شعاع دایره و α برحسب رادیان باشد، آنگاه:

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} = \frac{L}{3} \Rightarrow L = \frac{6\pi}{5}$$

۶ - گزینه ۱

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6}$$

مجموع زوایای داخلی مثلث 180° درجه یا π رادیان است، پس:

$$x + y = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$



تفاضل دو زاویه دیگر: $x - y = \frac{\pi}{10}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6} \\ x - y = \frac{\pi}{10} \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{10} = \frac{25\pi + 3\pi}{30} = \frac{28\pi}{30} \Rightarrow x = \frac{14\pi}{30} = \frac{7\pi}{15}$$

۷ - گزینه ۲ راه حل اول:

$$1 - \cos \alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 - \frac{5}{3} = \cos \alpha$$

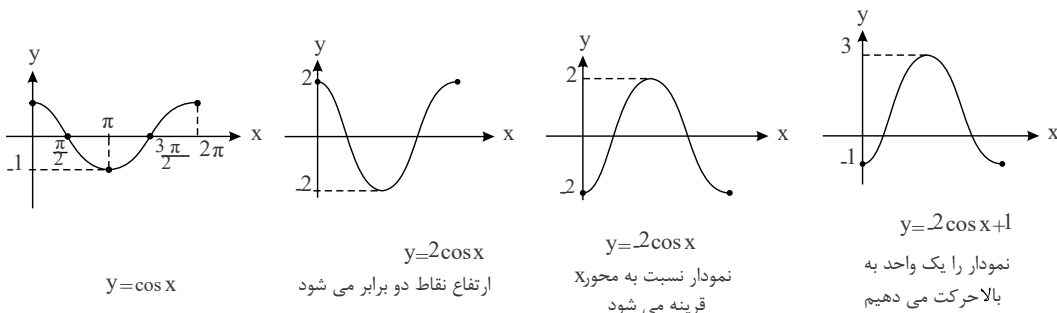
$$\Rightarrow -\frac{2}{3} = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیه ۲ یا ۳}$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha > 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیه ۲ یا ۴}$$

ناحیه ۲ = اشتراک نواحی

راه حل دوم:

برای رسم ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌نمایم.



۸ - گزینه ۳ برای فهم بهتر، چرخ‌دنده‌ها را مانند چرخ‌های عقب و جلوی یک وسیله نقلیه در نظر بگیرید. مسیری که هر دو چرخ طی می‌نمایند یکسان است یعنی طول کمان که هر دو چرخ‌دنده طی می‌نمایند برابر است. پس داریم:

$$l_A = l_B \Rightarrow R_A \cdot \theta_A = R_B \theta_B$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{R_B \theta_B}{R_A} = \frac{100 \times \frac{3\pi}{2}}{20} = \frac{15\pi}{2} = 7,5\pi = 3,75 (2\pi)$$

↓
یک دور کامل

۹ - گزینه ۱ برای محاسبه می‌توان از یک نسبت تناسب ساده بهره برد. برای دوران عقربه ساعت شمار به اندازه π رادیان ۶ ساعت مورد نیاز است، پس:

$$\frac{\text{ساعت}}{t} = \frac{3,14 \text{ رادیان}}{1,57} \rightarrow t = \frac{6 \times 1,57}{3,14} = 3 \text{ ساعت}$$

۱۰ - گزینه ۴ ابتدا متمم و مکمل 20° را محاسبه می‌نمایم:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ متمم} \rightarrow 20^\circ + \beta = 90^\circ \rightarrow \beta = 70^\circ \text{ متمم}$$

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \text{ مکمل} \rightarrow 20^\circ + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 160^\circ \text{ مکمل}$$

در این مرحله هر دو زاویه را بر حسب rad می‌نویسیم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{70^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{7\pi}{18} \text{ متمم}$$

$$\frac{160^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{16\pi}{18} = \frac{8\pi}{9} \text{ مکمل}$$

۱۱ - گزینه ۲ ابتدا زاویه 40° را بر حسب رادیان می‌نویسیم:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{40^\circ}{180^\circ} \Rightarrow R = \frac{2}{9}\pi$$

مسیری که برف پاک‌کن طی می‌کند به صورت قسمتی از یک کمان با شعاعی به طول برف پاک‌کن است. طول کمان را به دست می‌آوریم:

$$\theta = \frac{2\pi}{9} \rightarrow L = r\theta \rightarrow L = \frac{2}{3}m \Rightarrow L \sim 67cm$$

۱۲ - گزینه ۳ به بررسی عبارتهای داده شده می‌پردازیم:

(الف) یک رادیان تقریباً برابر با 57° است، پس دو زاویه دیگر بزرگ‌تر از 57° خواهند بود، پس قاعده کوچکتر از ساقها است.

$$(ب) \text{ درست است. زیرا } \frac{2\pi}{5} = 72^\circ \text{ و } \frac{\pi}{5} = 36^\circ$$

$$(پ) \text{ درست است. } 180^\circ - (72^\circ + 36^\circ) = 72^\circ$$

(پ) درست است.



(ت) درست است.

۱۳ - گزینه ۲ اندازه زاویه برحسب رادیان را فرض می کنیم. لذا اندازه این زاویه برحسب درجه $\alpha \times \frac{180^\circ}{\pi}$ خواهد بود.

$$\Rightarrow D = \frac{20\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 20 \times 60^\circ = 1200^\circ$$

۱۴ - گزینه ۲ نکته: در دایره‌ای به شعاع R ، طول کمان روبه روی زاویه مرکزی θ رادیان، برابر $L = R\theta$ است. با توجه به نکته بالا می توان نوشت:

$$L = R\theta \Rightarrow 2\pi = 20\theta \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$$

۱۵ - گزینه ۲

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{12}}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{5}{12} \rightarrow \boxed{D = 75^\circ}$$

α را مکمل زاویه $\frac{5\pi}{12}$ در نظر می گیریم؛ داریم:

$$\rightarrow \alpha + 75^\circ = 180^\circ \rightarrow \boxed{\alpha = 105^\circ}$$

۱۶ - گزینه ۲

$$\frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{D}{180^\circ} \rightarrow D = 60^\circ$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y = 120^\circ \\ x - y = 60^\circ \end{cases} \rightarrow 2x = 180^\circ \rightarrow x = 90^\circ, y = 30^\circ \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{3}$$

۱۷ - گزینه ۱

$$\begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = R\alpha \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = 4R\beta \end{cases}$$

$$L_1 \times L_r = \frac{\pi}{9} \times \pi R^2 \rightarrow R\beta \times 4R\beta = \frac{\pi^2 R^2}{9} \rightarrow 4\beta^2 = \frac{\pi^2}{9}$$

$$\rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \rightarrow \beta = 30^\circ \text{ و } \alpha = 4\beta \xrightarrow{\beta=30^\circ} \alpha = 120^\circ$$

مثلث متساوی الساقین $\alpha = \beta \rightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ \rightarrow \gamma = 120^\circ$

پس مثلث متساوی الساقین است و زاویه قائمه ندارد.

۱۸ - گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} \beta = 60^\circ \\ \gamma = -3\pi = -3 \times 180^\circ = -540^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = \beta - \gamma \rightarrow \alpha = 60^\circ - (-540^\circ) = 600^\circ$$

$$\alpha = (3 \times 360^\circ) + 60^\circ = 1080^\circ + 60^\circ = 1140^\circ$$

بنابراین α در ربع اول قرار دارد.

۱۹ - گزینه ۲

$$\rightarrow \begin{cases} \text{ناحیه دوم} \quad 3 \approx 3 \times 57,3^\circ \approx 171,9^\circ \\ \text{ناحیه سوم} \quad 4,5 \approx 4,5 \times 57,3^\circ \approx 257,85^\circ \end{cases}$$

۲۰ - گزینه ۲

مساحت و شعاع دایره (۲) را به ترتیب با S' و R' و مساحت و شعاع دایره (۱) را به ترتیب با S و R نمایش می دهیم، داریم:

$$\text{فرض سؤال: } \frac{S'}{S} = 3 \rightarrow \frac{\pi R'^2}{\pi R^2} = 3 \rightarrow \frac{R'}{R} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} = \frac{R'(\frac{\pi}{6})}{R(\frac{\pi}{18})} = \frac{R'}{R} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$$

۲۱ - گزینه ۲

$$\widehat{AB} = r \cdot \theta \rightarrow 12 = 4\theta \rightarrow \theta = 3 \text{ رادیان}$$



$$\frac{3}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \rightarrow D = \frac{540^\circ}{\pi}$$

۲۲ - گزینه ۳ عقربه دقیقه شمار هر ۶۰ دقیقه یک دور دایره یا 2π رادیان را طی می کند، پس داریم:

$$\frac{2,5\pi}{2\pi} = \frac{x}{60} \rightarrow x = \frac{60 \times 2,5}{2} \rightarrow x = 75 \text{ دقیقه}$$

۲۳ - گزینه ۴

$$AB \text{ طول کمان } \widehat{AB} = r\alpha = r \times \frac{\pi}{6} = \frac{r\pi}{6}$$

$$\text{محیط ناحیه هاشور خورده} = 2r + \frac{r\pi}{6} = 12 + \pi \rightarrow r(2 + \frac{\pi}{6}) = 6(2 + \frac{\pi}{6}) \rightarrow r = 6$$

$$\rightarrow \widehat{AMB} = r \times (2\pi - \frac{\pi}{6}) = 6 \times \frac{11\pi}{6} \rightarrow \widehat{AMB} = 11\pi$$

۲۴ - گزینه ۲

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{3} \text{ رادیان} \rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{3} \times 6 = 2\pi$$

$$\triangle OAB = \text{متساوی الاضلاع} \rightarrow AB = 6 \rightarrow \text{محیط هاشور خورده} = 6 + 2\pi$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۵ - ۴

۹ - ۱

۱۳ - ۲

۱۷ - ۱

۲۱ - ۲

۲ - ۳

۶ - ۱

۱۰ - ۴

۱۴ - ۲

۱۸ - ۱

۲۲ - ۳

۳ - ۳

۷ - ۲

۱۱ - ۲

۱۵ - ۲

۱۹ - ۲

۲۳ - ۴

۴ - ۲

۸ - ۳

۱۲ - ۳

۱۶ - ۲

۲۰ - ۲

۲۴ - ۲