نمونه سوال: اعمال جبری روی تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

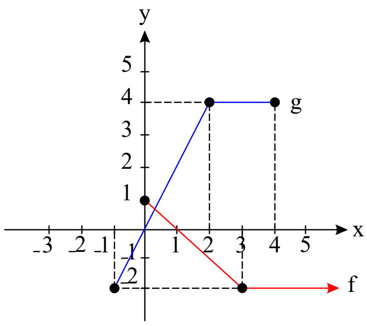
علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

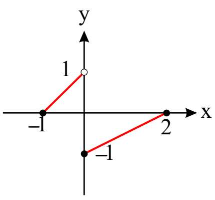
۱ - نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{|x|}\sqrt{x+۲}$ از کدام نواحی مختصات عبور نمی‌کند؟

۲ - اگر $f(x)=\sqrt{۴-x}$ و $g=\{(۱,۲),(۴,۷),(۳,۵),(۰,-۴),(۲,۰)\}$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $\dfrac{f}{g^{-۱}}$ کدام است؟

۳ - هرگاه نمودار دو تابع f و g به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $f+۲g$ کدام است؟



۴ - نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=-f(x+۲)$ کدام است؟



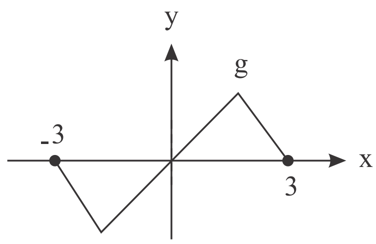
۵- اگر $f(x)=\begin{cases} x & , x\geq ۱ \\ ۱ & , x<۱ \end{cases}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x^۲}$، آنگاه تعداد صفرهای تابع $f+g$ کدام است؟

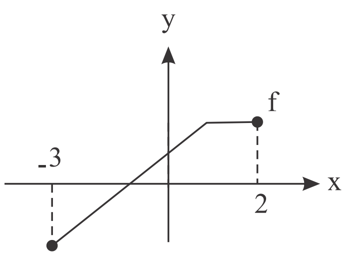
۶- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=۱+\sqrt{x}$ باشد، آنگاه برد تابع $(g-f)(x)$ کدام است؟

۷- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-۲x+۶}$ به‌صورت بازهٔ $(-\infty,a]$ و $g(x)=|۲x-۳|$ باشد، حاصل $(f-g)(a)$ کدام است؟

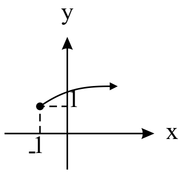
۸- اگر $f=\{(۱,۲),(۰,a^۲),(a,۰)\}$، $g=\{(-۱,۲),(-۲,۱),(۰,۴)\}$ و دامنهٔ $f-g$ برابر $\{۰,-۲\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

۹- با توجه به نمودار تابع‌های f و g دامنهٔ تابع $\frac{۲f^۲}{g}$ کدام است؟





۱۰ - نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ به‌صورت زیر است. $f(\frac{5}{4})$ کدام است؟



۱۱ - نمودار تابع $f(x)=|x|$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g حاصل شود. حاصل $g(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

۱۲ - اگر $f=\{(-1,a),(0,1),(1,b)\}$ و $\frac{4}{f^2}=\{(0,4),(-1,1)\}$ باشد، آنگاه a^2-b^2 کدام است؟

۱۳ - توابع $f(x)=\frac{x+1}{x}$ و $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$ مفروض‌اند، برد تابع $f-g$ کدام است؟

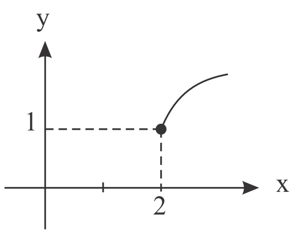
۱۴ - اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$, $g(x)=\sqrt{a-x}+2b$, $D_{f-g}=[-3,10]$ و $(f+g)(6)=6$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۵- اگر f و g دو تابع خطی باشند و $(f+g)(x)=۳x+۱\,,\,(f-g)(x)=۲-x$ باشد، مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(۶)$ کدام است؟

۱۶- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^{۲}-۱}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^{۲}-۱}$ باشد آن‌گاه نمودار $(f\cdot g)(x)$ کدام است؟

۱۷- نمودار تابع $f(x)=-۲+\sqrt{x+۴}$ به‌صورت کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟

۱۸- نمودار زیر مربوط به تابع با کدام ضابطه می‌باشد؟



۱۹- اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $f-g=\{(۱,-۴),(۳,۱)\}$ باشد، آنگاه $g(۱)-۲g(۳)$ کدام است؟

۲۰- اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$، دامنهٔ تابع $h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{g(x)}$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

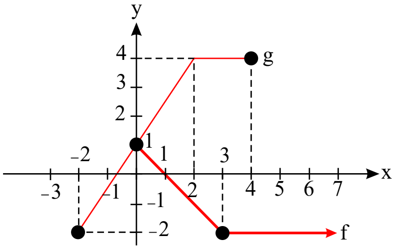
۲۱- اگر $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-۲x}$ باشند، مقدار $(۲f-g)(-۴)$ کدام است؟

۲۲- نمودار تابع $y=|x-۲|$ را دو واحد به راست و یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محور عرض‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۲۳- اگر $f=\{(۲,۷),(۳,۱),(۱,۴),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۳,۴),(۰,۳),(۴,۲),(۱,۲)\}$ برد تابع $f+g$ کدام است؟

۲۴- اگر $f(x)=x-\sqrt{x^۲-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$، دامنه‌ی تعریف تابع $f-g$ کدام است؟

۲۵ - اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورت زیر باشد، بیش‌ترین مقدار تابع $f + ۲g$ کدام است؟

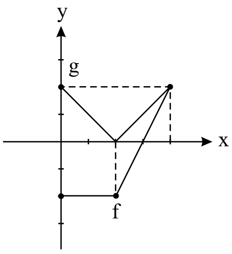


۲۶ - اگر $f^{-۱} = \{(۲,۳),(۱,-۱),(۰,۲),(-۱,۰)\}$ باشد، آنگاه تابع $\dfrac{۲f^{-۱}}{f}$ شامل کدام زوج مرتب است؟

۲۷ - اگر $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-۱}}{x-۳}$ باشد، حاصل $\left(\dfrac{۲}{f}\right)(۵)$ کدام است؟

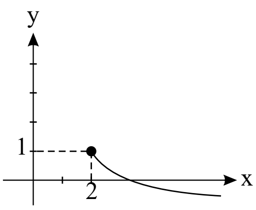
۲۸ - اگر $f = \{(۱,۵),(۲,۰),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g = \{(-۱,۴),(۲,۱),(۰,۳)\}$ باشند، حاصل‌ضرب اعضای برد تابع $\dfrac{۲f}{g^{-۱}}$ کدام است؟

۲۹ - با توجه به نمودار دو تابع f و g، ضابطهٔ تابع $y = (f+g)(x)$ کدام است؟



۳۰- اگر $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{x-۲}{x-۳}$ باشند، دامنهٔ تابع $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟

۳۱- شکل زیر نمودار تابع $y=b-\sqrt{x+a}$ است، مقدار $۲a+b$ کدام است؟



۳۲- نمودار تابع $y=-\cos(\dfrac{۳\pi}{۲}+x)+۲$ در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ شبیه به کدام گزینه است؟

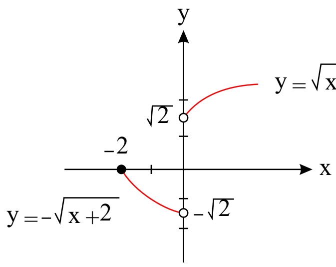
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ برای رسم تابع ابتدا، دامنهٔ تابع را تعیین می‌نماییم:

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt{x+۲}\to x+۲\geq ۰\to x\geq -۲$$
$$D_f=[-۲,+\infty)-\{۰\}$$

با توجه به وجود عامل $|x|$ و دامنهٔ تابع، دامنه باید به دو بخش مختلف تقسیم شود:

$$(I)\quad x\in[-۲,۰)\to y=\frac{x}{-x}\sqrt{x+۲}=-\sqrt{x+۲}$$
$$(II)\quad x\in(۰,+\infty)\to y=\frac{x}{x}\sqrt{x+۲}=\sqrt{x+۲}$$



پس نمودار از نواحی اول و سوم عبور می‌نماید.

۲ - گزینه ۲ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و $g^{-۱}$ را جداگانه به‌دست می‌آوریم: داریم:

$$f(x)=\sqrt{۴-x}\Rightarrow ۴-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۴\Rightarrow D_f=(-\infty,۴]$$

حال از روی تابع g که زوج مرتب‌های آن داده شده، $g^{-۱}$ را تشکیل می‌دهیم (دقت می‌کنیم که تابع g یک به یک و وارون‌پذیر بوده و لذا $g^{-۱}$ قابل تعریف است.)

$$g=\{(۱,۲),(۴,۷),(۳,۵),(۰,-۴),(۲,۰)\}$$
$$\Rightarrow g^{-۱}=\{(۲,۱),(۷,۴),(۵,۳),(-۴,۰),(۰,۲)\}$$
$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g^{-۱}}}=(D_f\cap D_{g^{-۱}})-\left\{x|g^{-۱}(x)=۰\right\}=\{۲,۰,-۴\}-\{-۴\}=\{۰,۲\}$$

۳ - گزینه ۳ ابتدا ضابطهٔ توابع f و g را جداگانه با توجه به نمودار هر کدام به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}۱-x & , \quad ۰\leq x<۳\\ -۲ & , \quad x\geq ۳\end{cases}\quad ,\quad g(x)=\begin{cases}۲x & , \quad -۱\leq x<۲\\ ۴ & , \quad ۲\leq x\leq ۴\end{cases}$$

حال دامنهٔ تابع $f+۲g$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f+۲g}=D_f\cap D_g=[۰,+\infty)\cap[-۱,۴]=[۰,۴]$$

حال ضابطهٔ $(f+۲g)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

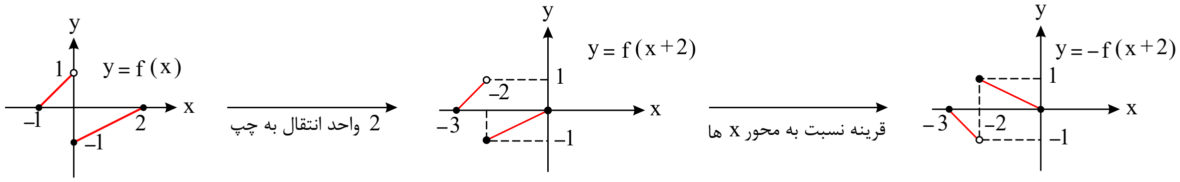
$$\Rightarrow (f+۲g)(x)=\begin{cases}۱-x+۲(۲x)=۳x+۱ & , \quad ۰\leq x<۲\\ (۱-x)+۲(۴)=۹-x & , \quad ۲\leq x<۳\\ -۲+۲(۴)=۶ & , \quad ۳\leq x\leq ۴\end{cases}$$

حال اگر نمودار $f+۲g$ که ضابطهٔ آن در بالا به دست آمد را رسم کنیم، گزینهٔ «۳» جواب صحیح است

۴ - گزینه ۴ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را a واحد در راستای محور xها انتقال دهیم. اگر $a>۰$، انتقال در جهت منفی و اگر $a<۰$، انتقال در جهت مثبت است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.



۵ - گزینه ۱

$$g(x)=\sqrt{۲-x^۲}\to D_g:۲-x^۲\geq ۰\to x^۲\leq ۲\to -\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۲}$$

$D_f=\mathbb{R}$ است پس $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ است.

$$(f+g)(x)=\begin{cases}۱+\sqrt{۲-x^۲} & -\sqrt{۲}\leq x<۱\\ x+\sqrt{۲-x^۲} & ۱\leq x\leq\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$(f+g)(x)=۰\rightarrow\begin{cases}\sqrt{۲-x^{۲}}=-۱ & \text{امکان ندارد.}\\ \sqrt{۲-x^{۲}}=-x\rightarrow ۲-x^{۲}=x^{۲}\rightarrow x^{۲}=۱\rightarrow\begin{cases}x=۱ & \text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند.)}\\ x=-۱ & \text{غ ق ق (باتوجه به بازه)}\end{cases}\end{cases}$$

پس معادلهٔ $(f+g)(x)=۰$ ریشه ندارد.

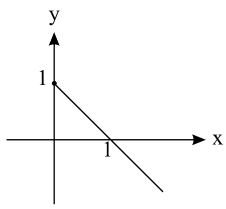
۶ - گزینه ۱

$f(x)=x+\sqrt{x}\rightarrow x\geq ۰\rightarrow D_f=[۰,+\infty)$

$g(x)=۱+\sqrt{x}\rightarrow x\geq ۰\rightarrow D_g=[۰,+\infty)$

$\rightarrow D_{(g-f)}=D_g\cap D_g=[۰,+\infty)$

$(g-f)(x)=۱+\sqrt{x}-(x+\sqrt{x})\rightarrow(g-f)(x)=۱-x$



$\rightarrow R_{(g-f)}=(-\infty,۱]$

۷ - گزینه ۱

$f(x)=\sqrt{-۲x+۶}\rightarrow -۲x+۶\geq ۰\rightarrow ۶\geq ۲x\rightarrow ۳\geq x$

$\rightarrow D_f=(-\infty,۳]=(-\infty,a]\rightarrow \boxed{a=۳}$

$(f-g)(a)\overset{a=۳}{=\!=\!=}(f-g)(۳)=f(۳)-g(۳)=\sqrt{-۲(۳)+۶}-|۲(۳)-۳|$

$=\sqrt{-۶+۶}-|۶-۳|=\sqrt{۰}-|۳|=۰-۳=-۳$

۸ - گزینه ۴

$D_f=\{۱,۰,a\}\ \ ,\ \ D_g=\{-۱,-۲,۰\}\ \ ,\ \ D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{۰,-۲\}$

$\rightarrow \boxed{a=-۲}\rightarrow f=\{(۱,۲),(۰,۴),(-۲,۰)\}$

$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x|f(x)=۰\}=\{۰\}$

$\rightarrow(\frac{g}{f})(x)=\{(۰,\frac{۴}{۴})\}\rightarrow(\frac{g}{f})(x)=\{(۰,۱)\}$

۹ - گزینه ۴ برای تعیین دامنه $\frac{۲f^{۲}}{g}$ ابتدا باید دامنهٔ $۲f^{۲}$ و g را تعیین نماییم. تصویر منحنی روی محور xها دامنه می‌باشد.

با توجه به نمودارها داریم:

$D_f=[-۳,۲]\rightarrow D_{۲f^{۲}}=[-۳,۲]$

$D_g=[-۳,۳]$

حل براساس رابطه داریم: $D_{\frac{۲f^{۲}}{g}}=D_{۲f^{۲}}\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}$

$D_{\frac{۲f^{۲}}{g}}=[-۳,۲]\cap[-۳,۳]-\{۰,+۳,-۳\}=[-۳,۲]-\{-۳,۰,۳\}=(-۳,۰)\cup(۰,۲]$

۱۰ - گزینه ۲ **برای محاسبهٔ پارامتر b می‌توان از دامنه استفاده کرد.**

$D_f=[-۱,+\infty)\rightarrow x\geqslant -۱$

$f(x)=a+\sqrt{x+b}\rightarrow x+b\geq ۰\rightarrow x\geq -b\xrightarrow{x\geq -۱}\begin{matrix}-b=-۱\\ \boxed{b=۱}\end{matrix}$

برای محاسبه پارامتر a مختصات نقطهٔ $(-۱,۱)$ در تابع جایگذاری می‌نماییم

$۱=a+\sqrt{-۱+۱}\rightarrow a=۱\rightarrow f(x)=۱+\sqrt{x+۱}$

$f(\frac{۵}{۴})=۱+\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱}=۱+\sqrt{\frac{۹}{۴}}=۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$

۱۱ - گزینه ۴ تعداد درون تابع منحنی را در راستای محور xها و خلاف جهت جابه‌جا می‌نماید و اعداد بیرون تابع که با تابع جمع جبری شوند نمودار را در راستای محور yها و هم جهت جابه‌جا می‌نماید. ضمناً قرینه شدن نسبت به محور xها به علت وجود منفی پشت تابع می‌باشد.

$$f(x)=|x| \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} f(x+۱)=|x+۱|$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} -f(x+۱)=-|x+۱| \xrightarrow{\text{یک واحد بالا}} -f(a+۱)+۱=-|x+۱|+۱$$

$$g(x)=-|x+۱|+۱ \to g(\sqrt{۲}-۱)=-\left|\sqrt{۲}-۱+۱\right|+۱=-\sqrt{۲}+۱$$

۱۲ - گزینه ۱ چون دامنهٔ تابع $\frac{۴}{f^۲}$ برابر $\{۰,-۱\}$ است، این تابع در نقطه به‌طول ۱ تعریف نمی‌شود (مخرج آن صفر می‌شود). درنتیجه باتوجه به تابع f داریم:

$$f(۱)=۰ \to b=۰$$

$$(\frac{۴}{f^۲})(-۱)=۱ \to \frac{۴}{f^۲(-۱)}=۱ \to f^۲(-۱)=۴ \to a^۲=۴$$

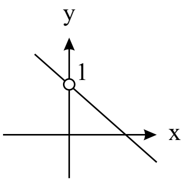
$$\to a^۲-b^۲=۴-۰=۴$$

۱۳ - گزینه ۲ برای محاسبه برد ابتدا تابع $f-g$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l} D_f=\mathbb{R}-\{۰\} \\ D_g=\mathbb{R}-\{۰\} \end{array}\right\} \to D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$f(x)-g(x)=\frac{x+۱}{x}-\frac{x^۲+۱}{x}=\frac{x+۱-x^۲-۱}{x}=\frac{x-x^۲}{x}=\frac{x(۱-x)}{x} \xlongequal{\text{با فرض } x\neq ۰} ۱-x$$

حال خط $y=۱-x$ را با توجه به دامنه $D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۰\}$ رسم می‌نماییم.



$$D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۱\}$$

۱۴ - گزینه ۳ برای حل سوال ابتدا باید دامنهٔ هر دو ضابطه را تعیین نماییم و بین آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$f(x)=\sqrt{x+۳} \to x+۳ \geq ۰ \to x \geq -۳$$

$$g(x)=\sqrt{a-x} \to a-x \geq ۰ \to x \leq a$$

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g=[-۳,a]=[-۳,۱۰] \to \boxed{a=۱۰}$$

حال برای محاسبهٔ پارامتر b باید تابع $f+g$ را بسازیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+۳}+\sqrt{a-x}+۲b$$

$$(f+g)(۶)=f(۶)+g(۶)=\sqrt{۶+۳}+\sqrt{۱۰-۶}+۲b$$

$$۳+۲+۲b=۶ \to ۲b=۱ \to \boxed{b=\frac{۱}{۲}}$$

پس جواب نهائی برابر است با:

$$a+b=۱۰+\frac{۱}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$$

۱۵ - گزینه ۴ برای محاسبه f و g می‌توان یک دستگاه تشکیل داد:

$$\begin{array}{l} (f+g)(x)=۳x+۱ \to \\ (f-g)(x)=۲-x \to \end{array} \left\{\begin{array}{l} f(x)+g(x)=۳x+۱ \\ f(x)-g(x)=۲-x \end{array}\right.$$

$$\boxed{+}\ ۲f(x)=۲x+۳$$

$$\boxed{f(x)=\frac{۲x+۳}{۲}}$$

$$g(x)=(۳x+۱)-f(x)=۳x+۱-\frac{۲x+۳}{۲}$$

$$g(x)=\frac{۴x-۱}{۲} \to \boxed{g(x)=۲x-\frac{۱}{۲}}$$

$$(\frac{f}{g})(۶)=\frac{f(۶)}{g(۶)}=\frac{\frac{۱۵}{۲}}{\frac{۲۳}{۲}}=\frac{۱۵}{۲۳}$$

۱۶ - گزینه ۲

$$y=(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=x^۲-x^۲+۱=۱ \to \text{خط افقی}$$

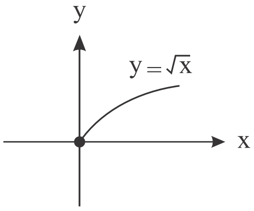
از طرفی: $D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$

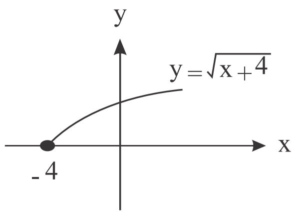
$$\rightarrow \begin{cases} g(x) = x - \sqrt{x^{۲} - ۱} \\ f(x) = x + \sqrt{x^{۲} - ۱} \end{cases} \Rightarrow x^{۲} - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x^{۲} \geq ۱ \Rightarrow |x| \geq ۱ \Rightarrow x \leq -۱ \ \text{یا} \ x \geq ۱$$

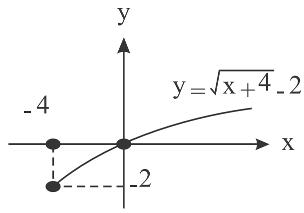
۱۷ - گزینه ۳ روش اول:

ابتدا نمودار پایه موردنظر را شناسایی می‌نماییم و با توجه به جایگاه هر عدد تغییرات نمودار را اعمال می‌نماییم.

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f(x \underset{\substack{\downarrow \\ \text{۴ واحد به سمت چپ}}}{+} ۴) = \sqrt{x + ۴} \rightarrow f(x + ۴) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{۲ واحد به سمت پایین}}}{-} ۲ = \sqrt{x + ۴} - ۲$$







روش دوم:

می توانیم با کمک نقطه یابی گزینه های نادرست را مشخص کرده و حذف کنیم و سپس پزینه درست را پیدا کنیم:

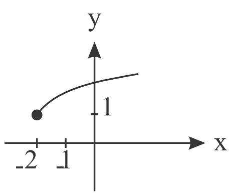
$f(x) = -۲ + \sqrt{x + ۴} \rightarrow x + ۴ \geqslant ۰ \rightarrow x \geqslant -۴ \rightarrow D_f = [-۴, +\infty) \rightarrow$ گزینهٔ یک حذف می شود

$f(-۴) = -۲ + \sqrt{-۴ + ۴} = -۲ + ۰ = -۲ \rightarrow (-۴, -۲) \in f \rightarrow$ گزینهٔ چهار حذف می‌شود

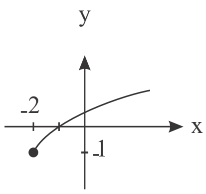
$f(۰) = -۲ + \sqrt{۰ + ۴} = -۲ + ۲ = ۰ \rightarrow (۰, ۰) \in f \rightarrow$ گزینهٔ دو حذف می شود

و گزینهٔ باقی‌مانده، گزینهٔ (۳) است.

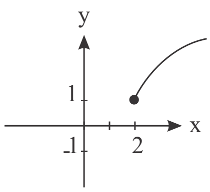
۱۸ - گزینه ۳ گزینهٔ «۱»: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x + ۲} + ۱$، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به چپ و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



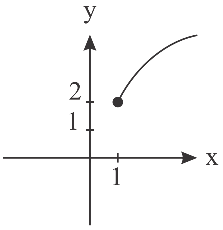
گزینهٔ «۲»: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x + ۲} - ۱$، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به چپ و یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم.



گزینهٔ «۳»: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - ۲} + ۱$، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



گزینهٔ «۴»: برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - ۱} + ۲$، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۱۹ ـ گزینه ۲ چون $D_{f-g}=\{۱,۳\}$ پس ۳ و ۱ حتماً در دامنهٔ g هستند. همچنین ممکن است دامنهٔ g شامل عضوهای دیگری هم باشد.

$$(۱,-۴)\in f-g\Rightarrow (f-g)(۱)=-۴\Rightarrow f(۱)-g(۱)=-۴\Rightarrow ۴-g(۱)=-۴\Rightarrow \boxed{g(۱)=۸}$$

$$(۳,۱)\in f-g\Rightarrow (f-g)(۳)=۱\Rightarrow f(۳)-g(۳)=۱\Rightarrow ۴-g(۳)=۱\Rightarrow \boxed{g(۳)=۳}$$

$$\Rightarrow g(۱)-۲g(۳)=۸-۶=۲$$

۲۰ ـ گزینه ۳

قدم اول محاسبهٔ توابع f و g می‌باشد:

$$f(x)=\sqrt{۳-x}\Rightarrow ۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳\Rightarrow D_f=(-\infty,۳]$$

$$g(x)=\sqrt{x-۱}\Rightarrow x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱\Rightarrow D_g-[۱,+\infty)$$

در تابع h دامنهٔ صورت کسر اشتراک دامنهٔ توابع f و g می‌باشد.

$$\Rightarrow D_f\cap D_g=[۱,۳]$$

اما در رابطه با مخرج کسر تابع h، باید ریشه‌های g را از ان دامنه کم کنیم.

$$g(x)\neq ۰\Rightarrow \sqrt{x-۱}\neq ۰\Rightarrow x\neq ۱$$

در نهایت دامنهٔ تابع h، برابر است با: $D_h=(۱,۳]$

که این بازه شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

۲۱ ـ گزینه ۳ باتوجه به ضابطه‌های توابع f و g داریم:

$$\begin{cases} f(-۴)=-۴+۱=-۳ \\ g(-۴)=\sqrt{۱-۲(-۴)}=\sqrt{۹}=۳ \end{cases}\Rightarrow (۲f-g)(-۴)=۲f(-۴)-g(-۴)=۲(-۳)-۳=-۹$$

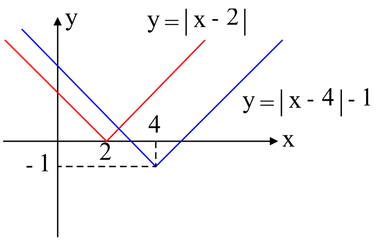
۲۲ ـ گزینه ۳

$$y=|x-۲|\xrightarrow{\text{دو واحد به راست}} y=|x-۲-۲|\xrightarrow{\text{یک واحد پایین}} y=|x-۴|-۱$$

برای به‌دست آوردن محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها، کافی است $x=۰$ را در معادله قرار دهیم:

$$y=|۰-۴|-۱=۳$$

در ضمن برای درک بیش‌تر به شکل روبه‌رو دقت کنید.



۲۳ ـ گزینه ۱

$$\begin{matrix} f=\{(۲,۷)(۳,۱)(۱,۴)(۰,۲)\} \\ g=\{(۳,۴)(۰,۳)(۴,۲)(۱,۲)\} \end{matrix}\rightarrow\ f+g=\{(۳,۵)(۱,۶)(۰,۵)\}$$

برد تابع، مجموعه‌ی $\{۵,۶\}$ است. دقت کنید زوج‌های مرتبی از دو تابع را در نظر بگیرید که دارای xهای برابر باشند. سپس xهای آن‌ها را نوشته و عرض های آن‌ها را باهم جمع می‌کنیم.

۲۴ ـ گزینه ۲ کافی است دامنه‌ی تعریف دو تابع را پیدا کرده و سپس از آن‌ها اشتراک بگیریم (زیرا رادیکال‌ها باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشند.)

$$D_f:\ x^۲-۱\geq ۰\rightarrow x^۲\geq ۱\ \rightarrow x\geq ۱,\ x\leq -۱\quad (I)$$

$$D_g:\ ۴-x^۲\geq ۰\rightarrow x^۲\leq ۴\rightarrow\ -۲\leq x\leq ۲\qquad (II)$$

از اشتراک $I\ ,\ II$ جواب $-۲\leq x\leq -۱\cup ۱\leq x\leq ۲$ حاصل می‌شود یعنی $x\in[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$

۲۵ ـ گزینه ۴ ابتدا ضابطهٔ f و g را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=\begin{cases} -x+۱ & ,\ ۰\leq x\leq ۳ \\ -۲ & ,\ ۳<x \end{cases}\quad ,\quad g(x)=\begin{cases} \frac{۳}{۲}x+۱ & ,\ -۲\leq x\leq ۲ \\ ۴ & ,\ ۲<x\leq ۴ \end{cases}$$

سپس دامنهٔ $f+۲g$ را محاسبه می‌کنیم.

$$D_{f+۲g}=D_f\cap D_g=[۰,+\infty)\cap[-۲,۴]=[۰,۴]$$

$$\rightarrow (f+2g)(x)=\begin{cases} -x+1+2(\frac{3x}{2}+1)=2x+3 & , 0\le x\le 2 \\ -x+1+2(4)=-x+9 & , 2<x\le 3 \\ -2+2(4)=6 & , 3<x\le 4 \end{cases}$$

چون ضابطه‌ها به‌صورت خطی هستند پس مقدار $\max$ تابع در یکی از نقاط مرزی رخ می‌دهد:

$$(f+2g)(0)=3\ ,\ (f+2g)(2)=7\ ,\ (f+2g)(3)=6\ ,\ (f+2g)(4)=6$$

$$\rightarrow y_{\max}=7$$

۲۶ - گزینه ۴

روش اول:

ابتدا تابع f را می‌یابیم:

$$f=\{(3,2),(-1,1),(2,0),(0,-1)\}$$

دامنهٔ تابع $\frac{2f^{-1}}{f}$ برابر است با:

$$D_{\frac{2f^{-1}}{f}}=D_{f^{-1}}\cap D_f-\{x|f(x)=0\}=\{2,1,0,-1\}\cap\{3,-1,2,0\}-\{2\}=\{-1,0\}$$

بنابراین:

$$x=0:\left(\frac{2f^{-1}}{f}\right)(0)=\frac{2f^{-1}(0)}{f(0)}=\frac{2(2)}{-1}=-4\Rightarrow(0,-4)\in\frac{2f^{-1}}{f}$$

روش دوم:

$$f^{-1}=\{(2,3),(1,-1),(0,2),(-1,0)\}\rightarrow\begin{cases} 2f^{-1}=\{(2,6),(1,-2),(0,4),(-1,0)\} \\ f=\{(3,2),(-1,1),(2,0),(0,-1)\} \end{cases}$$

$$\rightarrow\frac{2f^{-1}}{f}=\{(2,\frac{6}{0}),(0,\frac{4}{-1}),(-1,\frac{0}{1})\}=\{(0,-4),(-1,0)\}$$

۲۷ - گزینه ۲

$$\left(\frac{2}{f}\right)(5)=\frac{2}{f(5)}=\frac{2}{\frac{\sqrt{5-1}}{5-3}}=\frac{2}{\frac{2}{2}}=\frac{2}{1}=2$$

۲۸ - گزینه ۲

$$2f=\{(1,10),(2,0),(3,8),(4,12)\}\quad ،\quad g^{-1}=\{(4,-1),(1,2),(3,0)\}$$

$$D_{2f}\cap D_{g^{-1}}=\{1,3,4\}$$

$$\frac{2f}{g^{-1}}=\{(1,\frac{10}{2}),(3,\frac{8}{0}),(4,\frac{12}{-1})\}\rightarrow\frac{2f}{g^{-1}}=\{(1,5),(4,-12)\}$$

حاصلضرب اعضای برد $\frac{2f}{g^{-1}}$ $=5\times(-12)=-60$

۲۹ - گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases} -2 & , 0\le x\le 2 \\ 2x-6 & , 2<x\le 4 \end{cases}\quad ,\quad g(x)=\begin{cases} -x+2 & , 0\le x\le 2 \\ x-2 & , 2<x\le 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow(f+g)(x)=\begin{cases} -x & , 0\le x\le 2 \\ 3x-8 & , 2<x\le 4 \end{cases}$$

۳۰ - گزینه ۳

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}\rightarrow x+1\neq 0\rightarrow x\neq -1\rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$$

$$g(x)=\frac{x-2}{x-3}\rightarrow x-3\neq 0\rightarrow x\neq 3\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{3\}$$

$$g(x)=0\rightarrow x-2=0\rightarrow x=2$$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{-۱,۳\}-\{۲\}\rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۱,۲,۳\}$

۳۱ - گزینه ۱

مطابق شکل $D_f=[۲,+\infty)$, $x+a\geq ۰\rightarrow x\geq -a\rightarrow D_f=[-a,+\infty)$

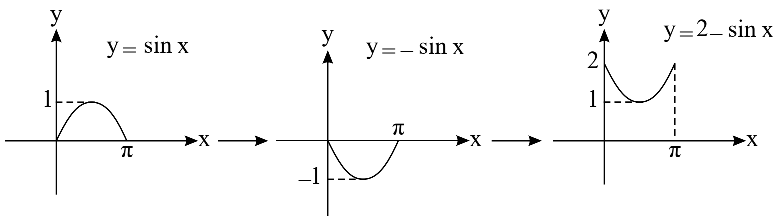
$[۲,+\infty)=[-a,+\infty)\rightarrow ۲=-a\rightarrow \boxed{a=-۲}\rightarrow y=b-\sqrt{x-۲}$

$f(۲)=۱\rightarrow ۱=b-\sqrt{۲-۲}\rightarrow \boxed{b=۱}\rightarrow \boxed{۲a+b=-۳}$

۳۲ - گزینه ۱

$y=-\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)+۲=-\sin x+۲$

حال به کمک انتقال نمودار $y=\sin x$، نمودار تابع $y=۲-\sin x$ را در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ رسم می‌کنیم.



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۱	۱۱ - ۴	۱۶ - ۲	۲۱ - ۳	۲۶ - ۴	۳۱ - ۱
۲ - ۲	۷ - ۱	۱۲ - ۱	۱۷ - ۳	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲	۳۲ - ۱
۳ - ۳	۸ - ۴	۱۳ - ۲	۱۸ - ۳	۲۳ - ۱	۲۸ - ۲	
۴ - ۴	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۲	۲۴ - ۲	۲۹ - ۱	
۵ - ۱	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۴	۳۰ - ۳	