سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - برای نمودار تابع $f(x)=x^2$ به‌ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف xهای منفی، قرینه نسبت به محور xها، دو برابر کردن برد، انتقال ۳ واحد به طرف yهای منفی، معادلهٔ نمودار حاصل کدام است؟

۲ - اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g=\{(-3,5),(-1,4),(0,7)\}$، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار تابع $(g-f)\cdot 2g$ کدام است؟

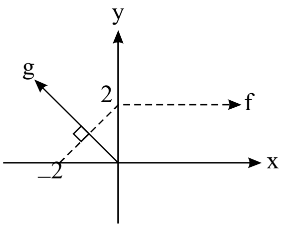
۳ - اگر $f(x)=x^2+|x|$ و $g(x)=\frac{1}{x}$، آنگاه برد تابع $(f\cdot g)(x)$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۴ - نمودار تابع $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ از کدام ناحیه (نواحی) محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

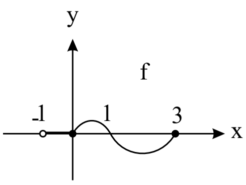
۵ - دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2-x}$ کدام است؟

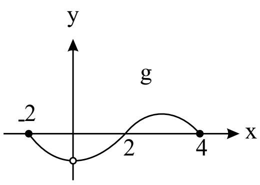
۶- اگر f و g دو تابع خطی باشند به‌طوری‌که $\begin{cases}(f+g)(x)=۲x+۱\\(g-f)(x)=x-۲\end{cases}$، حاصل $f(۱)+g(۳)$ کدام است؟

۷- اگر نمودارهای f و g به‌صورت زیر باشند، برد تابع $f+۲g$ کدام است؟ (تابع f به‌صورت خط‌چین و تابع g با خط پر برای تمایز دو تابع رسم شده است.)



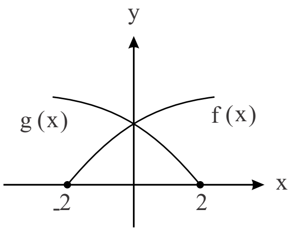
۸ - با توجه به نمودار توابع f و g، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(\frac{f}{g})(x)}$ کدام است؟



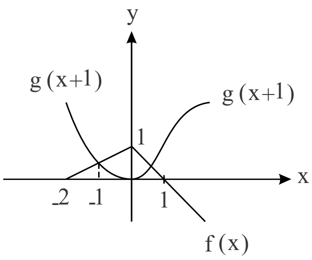


۹- اگر $f(x)=\begin{cases}x & , \quad x<-۳\\ ۲x^۲ & , \quad x>۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x & , \quad |x|<۲\\ \frac{۱}{x} & , \quad x<-۵\end{cases}$ باشد، تابع $f\times g$ کدام است؟

۱۰ - نمودارهای f و g به‌صورت زیر است. در دامنهٔ تابع $\dfrac{(f+g)(x)}{(f-g)(x)}$ چند مقدار صحیح وجود دارد؟



۱۱ - نمودار تابع $y_۱ = f(x)$ و $y_۲ = g(x+۱)$ به شکل زیر است. اگر $h(x) = (f+g)(x)$ باشد، آنگاه حاصل $h(۰)$ کدام است؟



۱۲ - اگر $f(x) = ۲x - ۱$ و $g(x) = x - ۲$، دامنهٔ تابع $(\dfrac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۱۳ - اگر $f = \{(۲,۵), (۳,۴), (۰,-۲)\}$ و $g = \{(-۱,۲), (۰,۳), (۲,۴), (۳,۰)\}$، تابع $f+g$ کدام است؟

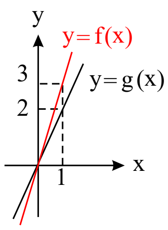
۱۴ - با توجه به نمودار $y = \sqrt{x}$، نمودار $y = ۱ - \sqrt{x-۳}$ کدام است؟

۱۵- اگر $f(x)=\sqrt{x}+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}-۱$، نمودار تابع $y=f(x)\cdot g(x)$ کدام است؟

۱۶- اگر $f=\{(۲,۴),(۴,۶),(۵,۰)\}$ و $g=\{(۵,-۲),(۷,۰),(۶,۱),(۲,۰)\}$، تابع $f\times g$ کدام است؟

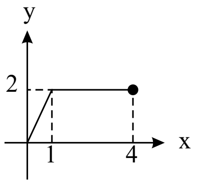
۱۷- نمودار $y=|x|$ را ابتدا دو واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. در پایان، نمودار حاصل را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع به‌وجود آمده کدام است؟

۱۸- دو تابع خطی $f(x)$ و $g(x)$ به‌صورت زیر داده شده‌اند. ضابطهٔ تابع $y=(f+g)(x)$ کدام است؟



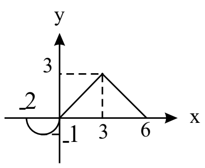
۱۹- اگر $f=\{(۲,۳),(۴,۵),(۳,۱۰)\}$ و $g=\{(۳,۴),(-۲,۱),(۴,۲),(۵,۳)\}$، برد تابع $\dfrac{g}{f}$ چند عضو دارد؟

۲۰ - نمودار مقابل مربوط به تابع $y=-۲f(x)$ است. کدام گزینه نمودار $y=f(x)$ را نشان می‌دهد؟



۲۱ - اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۲}-\frac{۲}{x-۲}$ و $g(x)=۲+\frac{۱}{x-۳}$ و دامنهٔ تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{a,b,c\}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۲۲ - شکل مقابل نمودار تابع $y=۳f(x+۲)$ است. نمودار تابع $y=f(x)$ در چند نقطه نمودار تابع $y=۱$ را قطع می‌کند؟



۲۳ - اگر $f(x)=\begin{cases}۲x & x<۱\\ x & x\geq ۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۴x & x<۲\\ ۳x & x\geq ۲\end{cases}$، ضابطهٔ تابع $y=f(x)-g(x)$ کدام است؟

۲۴- اگر $f=\left\{(1,2),(0,a^2),(a,0)\right\}$, $g=\{(-1,2),(-2,1),(0,4)\}$ و دامنهٔ $f-g$ برابر $\{0,-2\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

۲۵- اگر $f(x)=2\left|x-1\right|$ و $g(x)=-\left|x-3\right|$ و $1<a<3$ و $b<1$ باشد، حاصل $\dfrac{(f+g)(a)}{(f+g)(b)}$ کدام است؟

۲۶- نمودار تابع $f(x)=-2\sqrt{x-1}$ کدام است؟

۲۷- اگر $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{2x^2-2x+1}$ باشند، دامنهٔ تابع $\dfrac{2f+g}{g^2}$ کدام است؟

۲۸- اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=1+\sqrt{x}$ باشد، برد تابع $y=(f+g)(x)$ کدام است؟

۲۹- اگر $f(x)=\sqrt{n-3x}$ و $g(x)=\sqrt{x-3m}$ و تابع $f+g$ به‌صورت $\{(1,a)\}$ باشد، آن‌گاه مقدار $am+n$ کدام است؟

۳۰- f و g دو تابع درجه دوم هستند. اگر $(f+g)(x)=4x^2+1$ و $(f-g)(x)=2x+1$ باشند، $g(2)$ کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳

به‌ترتیب اعمال موردنظر را انجام می‌دهیم:

$$f(x)=x^2 \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به طرف } x \text{ های منفی}} f_1(x)=(x+4)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} f_2(x)=-(x+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن برد}} f_3(x)=-2(x+4)^2 \xrightarrow{\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y \text{ های منفی}} f_4(x)=-2(x+4)^2-3$$

$$f_4(x)=-2(x^2+8x+16)-3 \Rightarrow y=-2x^2-16x-35$$

۲ ـ گزینه ۳

$$D_f: 1-x^2\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2\leq 1 \;\Rightarrow\; -1\leq x\leq 1\;,\; D_g=\{-3,-1,0\}$$

کاملاً مشخص است که دامنه‌ی $(g-f)\cdot 2g$ برابر است با: $D_f\cap D_g$ یعنی $D_f\cap D_g=\{-1\,,\,0\}$

$$\left.\begin{array}{l}((g-f)\cdot 2g)(-1)=(g(-1)-f(-1))\cdot 2g(-1)=(4-0)\times 2(4)=32\\ ((g-f)\cdot 2g)(0)=(g(0)-f(0))\cdot 2g(0)=(7-1)\times 2(7)=84\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (g-f)\cdot 2g=\{(-1\,,\,32)\,,\,(0\,,\,84)\}\Rightarrow$ **بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۸۴ است.**

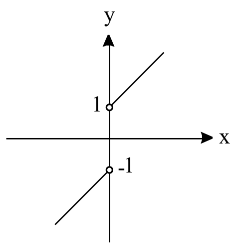
۳ ـ گزینه ۳

$$f(x)=x^2+|x|\to D_f=\mathbb{R}\quad,\quad ,g(x)=\frac{1}{x}\to D_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}-\{0\})=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$\to (f\cdot g)(x)=\frac{x^2+|x|}{x}\;,D_{f\cdot g}=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$\to (f\cdot g)(x)=x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases}x+1 & ;x>0\\ x-1 & ;x<0\end{cases}$$



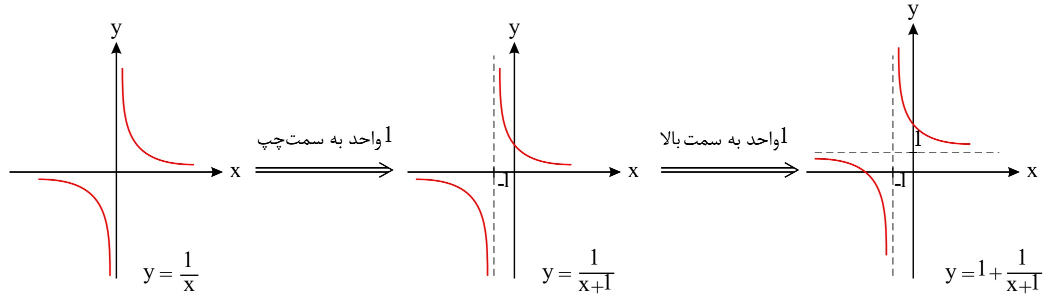
$\to$ برد: $R_{(f\cdot g)}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

برد تابع $(f\cdot g)(x)$ شامل ۳ عدد صحیح $\{1,0,-1\}$ نمی‌باشد.

۴ ـ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\to f(x)=\frac{1}{x+1}+1$$

اکنون نمودار $f(x)=\frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت چپ و پس از آن یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



۵ ـ گزینه ۴ زیر هر دو رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$$x^{۲}-x-۲\geq ۰ \to (x-۲)(x+۱)\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\leq -۱ \; x\geq ۲ (I)$$

$$۲-x\geq ۰ \to x\leq ۲ \quad (II)$$

از اشتراک I ، II نتیجه می‌شود $x \leq -۱$ یا $x=۲$ یعنی $x\in(-\infty,-۱]\cup\{۲\}$.

۶ ـ گزینه ۴

$$\begin{cases}(f+g)(x)=۲x+۱\\(g-f)(x)=x-۲\end{cases}\to\begin{cases}f(x)+g(x)=۲x+۱\\g(x)-f(x)=x-۲\end{cases}\to ۲g(x)=۳x-۱\to g(x)=\frac{۳}{۲}x-\frac{۱}{۲}$$

$$f(x)+g(x)=۲x+۱\to f(x)+\frac{۳}{۲}x-\frac{۱}{۲}=۲x+۱\to f(x)=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$$

پس: $f(۱)+g(۳)=\frac{۱}{۲}(۱)+\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲}(۳)-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}+\frac{۹}{۲}-\frac{۱}{۲}=۶$

۷ ـ گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & ,\ -۲\leq x\leq ۰\\ ۲ & ,\ ۰<x\end{cases} \quad , \quad g(x)=-x\ ,\ x\leq ۰$$

($g(x)$ یک تابع خطی است که از مبدأ می‌گذرد و بر خط $y=x+۲$ عمود است، یعنی شیبش -۱ است.)

دامنه : $D_{f+۲g}=D_f\cap D_g=[-۲,+\infty)\cap(-\infty,۰]\to D_{f+۲g}=[-۲,۰]$

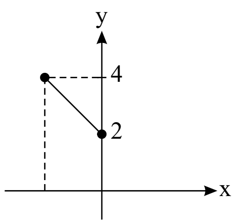
برای محاسبهٔ برد داریم:

$$(f+۲g)(x)=(x+۲)+۲(-x)=x+۲-۲x\Rightarrow(f+۲g)(x)=-x+۲$$

اکنون برد تابع را به ازای ابتدا و انتهای دامنه محاسبه می‌کنیم:

$$(f+۲g)(-۲)=۴ \quad , \quad (f+۲g)(۰)=۲\to R_{f+۲g}=[۲,۴]$$

و شکل آن بدین صورت است:



۸ ـ گزینه ۱ باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

$$(\frac{f}{g})(x)\geq ۰$$

از تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

x	-2		-1		0		1		2		3		4
f			صفرت ن		○	+	○	−		−	○		
g	○	−		−	ت ن	−		−	○	+		+	○
$\frac{f}{g}$			ت ن		ت ن صفر	−	○	+	ت ن	−	○		

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)\geq ۰ \Rightarrow \text{مجموعه جواب}=(-۱,۰)\cup[۱,۲)\cup\{۳\}$$

۹ ـ گزینه ۳ برای تشکیل $f\times g$ ابتدا باید دامنهٔ مشترک f و g را مشخص نماییم سپس در هر بخش ضابطه‌ها را در هم ضرب نماییم.

$$\left.\begin{array}{l}D_f=(-\infty,-۳)\cup(۱,+\infty)\\D_g=(-\infty,-۵)\cup(-۲,۲)\end{array}\right\} D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(-\infty,-۵)\cup(۱,۲)$$

حال در هر بخش از دامنهٔ مشترک ضابطه‌های مرتبط را در هم ضرب می‌نماییم:

$$(f\times g)(x)\begin{cases}(x)(2x^2) & 1<x<2\\ x\cdot(\frac{1}{x}) & x<-5\end{cases}\rightarrow (f\times g)(x)\begin{cases}2x^3 & 1<x<2\\ 1 & x<-5\end{cases}$$

۱۰ ـ گزینه ۴

$$\begin{cases}D_f: x\geq -2\\ D_g: x\leq 2\end{cases}\Rightarrow D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-2,2]$$

همچنین $D_{f-g}=[-2,2]$.

از طرفی $(f-g)(x)=0$ نتیجه می‌دهد: $f(x)=g(x)$، بنابراین $x=0$ است. در نتیجه:

$$D_{\frac{f+g}{f-g}}=[-2,2]-\{0\}$$

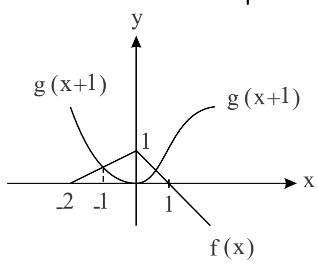
دامنهٔ تابع مورد نظر شامل ۴ عدد صحیح است.

۱۱ ـ گزینه ۳

$$h(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow h(0)=f(0)+g(0)$$

با توجه به نمودار $f(0)=1$ است. با توجه به اینکه نمودار $g(x+1)$ را داریم، برای پیدا کردن $g(0)$ باید x را برابر -1 بگذاریم. ضابطهٔ پاره‌خطی که $g(0)$ روی آن است را پیدا می‌کنیم. شیب خط برابر $m=\frac{1}{2}$ و عرض از مبدأ آن ۱ است.

$$y=\frac{1}{2}x+1\xrightarrow{x=-1}y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}=g(0)$$



پس: $h(0)=f(0)+g(0)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

۱۲ ـ گزینه ۳

نکته: $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$

$f(x)$ و $g(x)$ هر دو چندجمله‌ای هستند، پس $D_f=D_g=\mathbb{R}$. اکنون با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{x|x-2=0\}=\mathbb{R}-\{x|x=2\}=\mathbb{R}-\{2\}$$

۱۳ ـ گزینه ۴

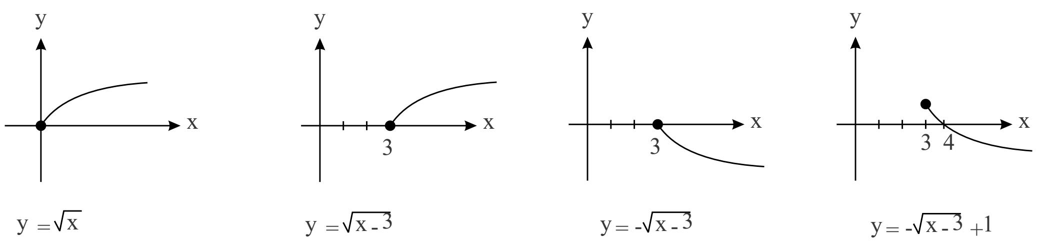
نکته: $D_{f+g}=D_f\cap D_g \quad , \quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$$\begin{cases}f=\{(2,5),(3,4),(0,-2)\}\Rightarrow D_f=\{2,3,0\}\\ g=\{(-1,2),(0,3),(2,4),(3,0)\}\Rightarrow D_g=\{-1,0,2,3\}\end{cases}\Rightarrow D_{f+g}=\{2,3,0\}$$

بنابراین:

$$f+g=\{(2,f(2)+g(2)),(3,f(3)+g(3)),(0,f(0)+g(0))\}=\{(2,9),(3,4),(0,1)\}$$

۱۴ ـ گزینه ۲ برای رسم نمودار $y=\sqrt{x}$ را سه واحد به سمت راست منتقل می‌نماییم. سپس نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌نماییم و در آخر یک واحد به بالا حرکت می‌دهیم.



۱۵ ـ گزینه ۳

نکته: $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g \quad , \quad (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

$$f(x)=\sqrt{x}+1\Rightarrow D_f=[0,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{x}-1\Rightarrow D_g=[0,+\infty)$$

بنابراین $D_{f\cdot g}=[0,+\infty)$ و داریم:

$$f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=x-1$$

پس نمودار تابع $y=x-1$ با شرط $x\geq 0$ موردنظر است، بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۱۶ - گزینه ۳ **نکته:** اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنهٔ D_f و D_g باشند، آنگاه حاصل‌ضرب آن‌ها که با نماد $(f\times g)(x)$ نمایش داده می‌شود، تابعی با دامنهٔ $D_{f\times g}=D_f\cap D_g$ و ضابطهٔ $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$ است.

طبق فرض داریم:

$$f=\{(۲,۴),(۴,۶),(۵,۰)\}\Rightarrow D_f=\{۲,۴,۵\}$$
$$g=\{(۵,-۲),(۷,۰),(۶,۱),(۲,۰)\}\Rightarrow D_g=\{۵,۷,۶,۲\}$$

اکنون با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\{۲,۴,۵\}\cap\{۵,۷,۶,۲\}=\{۲,۵\}$$
$$f\times g=\{(۲,f(۲)\times g(۲)),(۵,f(۵)\times g(۵))\}=\{(۲,۰),(۵,۰)\}$$

۱۷ - گزینه ۱ **نکته:** با فرض $a>۰$، اگر نمودار $y=f(x)$ را a واحد به سمت راست (چپ) انتقال دهیم، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=f(x-a)$ $(y=f(x+a))$ درمی‌آید.

نکته: با فرض $a>۰$، اگر نمودار $y=f(x)$ را a واحد به سمت بالا (پایین) انتقال دهیم، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=f(x)+a$ $(y=f(x)-a)$ درمی‌آید.

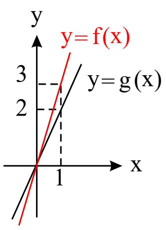
نکته: اگر نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=-f(x)$ درمی‌آید.

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$y=|x|\xrightarrow[\text{به راست}]{\text{دو واحد}}y=|x-۲|\xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{یک واحد}}y=|x-۲|-۱\xrightarrow[\text{محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}}y=-(|x-۲|-۱)=۱-|x-۲|$$

۱۸ - گزینه ۳

روش اول:



نکته: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنهٔ D_f و D_g باشند، آنگاه حاصل جمع آن‌ها که با نماد $(f+g)(x)$ نمایش داده می‌شود، تابعی با دامنهٔ $D_{f+g}=D_f\cap D_g$ و ضابطهٔ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ است.

نکته: نمودار تابع خطی در حالت کلی به‌صورت $y=ax+b$ است.

در صورتی که نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد، ضابطهٔ آن به‌صورت $y=ax$ درمی‌آید.نمودار $f(x)$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس ضابطه‌اش به‌صورت $f(x)=ax$ است.

با توجه به نمودار، نقطهٔ $(۱,۳)$ روی این تابع قرار دارد، پس: $f(۱)=۳\Rightarrow a=۳\Rightarrow f(x)=۳x$

نمودار $g(x)$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس ضابطه‌اش به‌صورت $g(x)=a'x$ است. با توجه به نمودار، نقطهٔ $(۱,۲)$ روی این تابع قرار دارد، پس:

$$g(۱)=۲\Rightarrow a'=۲\Rightarrow g(x)=۲x$$

بنابراین: $y=(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۳x+۲x=۵x$

دقت کنید که دامنهٔ این تابع برابر است با: $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

روش دوم:

تابع خطی $y=f(x)$ از نقاط $(۰,۰),(۱,۳)$ و تابع خطی $y=۶(x)$ از نقاط $(۰,۰),(۱,۲)$ می گذرد پس تابع $y=(f+y)(x)$ از نقاط $(۰,۰),(۱,۵)$ می گذرد، داریم:

$$a=\frac{۵-۰}{۱-۰}=\frac{۵}{۱}=۵\rightarrow\boxed{y=(f+g)(x)=۵x}$$

۱۹ - گزینه ۱ **نکته:** اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنهٔ D_f و D_g باشند، آنگاه حاصل تقسیم $g(x)$ بر D_f که با نماد $(\frac{g}{f})(x)$ نمایش داده می‌شود، تابعی با دامنهٔ $D_{\frac{g}{f}}=D_g\cap D_f-\{x|f(x)=۰\}$ و ضابطهٔ $(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ است.

طبق فرض داریم:

$$f=\{(۲,۳),(۴,۵),(۳,۱۰)\}\Rightarrow D_f=\{۲,۴,۳\}$$
$$g=\{(۳,۴),(-۲,۱),(۴,۲),(۵,۳)\}\Rightarrow D_g=\{۳,-۲,۴,۵\}$$

اکنون با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$D_{\frac{g}{f}}=D_g\cap D_f-\{x|f(x)=۰\}=\{۳,-۲,۴,۵\}\cap\{۲,۴,۳\}-\{\}=\{۳,۴\}$$
$$\frac{g}{f}=\left\{(۳,\frac{g(۳)}{f(۳)}),(۴,\frac{g(۴)}{f(۴)})\right\}=\left\{(۳,\frac{۴}{۱۰}),(۴,\frac{۲}{۵})\right\}$$

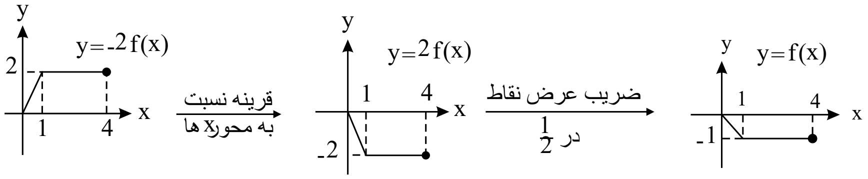
بنابراین برد این تابع عبارت است از: $R_{\frac{g}{f}}=\left\{\frac{۲}{۵}\right\}$

۲۰ - گزینه ۴ روش اول:

نکته: با فرض $k>۰$، برای رسم نمودار $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

نکته: برای رسم نمودار $y=-f(x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

با استفاده از نکات بالا، داریم:



بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

روش دوم:

$(0,0) \in -2f(x) \to -2f(0) = 0 \to f(0) = 0$

$(1,2) \in -2f(x) \to -2f(1) = 2 \to f(1) = -1$

$(4,2) \in -2f(x) \to -2f(4) = 2 \to f(4) = -1$

جواب فقط گزینهٔ ۴ است.

۲۱ - گزینه ۳ برای تعیین دامنه $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ابتدا باید دامنهٔ f و g را محاسبه نماییم:

$$f(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-2} \to D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$g(x) = 2 + \frac{2}{x-3} \to D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

قبل از محاسبهٔ دامنهٔ نهایی باید ریشهٔ تابع g که در مخرج قرار گرفته محاسبه شود:

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x-3} = 0 \to \frac{1}{x-3} = -2 \to -2x + 6 = 1 \to -2x = -5 \to x = \frac{5}{2}$$

حال با توجه به فرمول داریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$D_f \cap D_g = (\mathbb{R} - \{2\}) \cap (\mathbb{R} - \{3\}) = \mathbb{R} - \{2,3\}$$

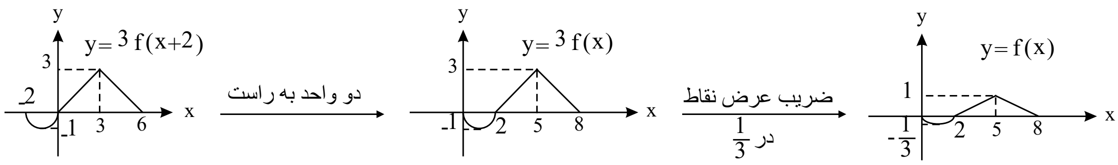
و نهایتاً ریشه‌های مخرج را از اشتراک کم می‌نماییم.

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{2,3\} - \left\{\frac{5}{2}\right\} = \mathbb{R} - \left\{2,3,\frac{5}{2}\right\} \to a + b + c = 2 + 3 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

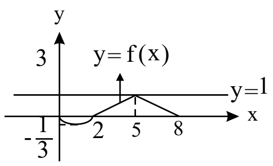
۲۲ - گزینه ۱ نکته: با فرض $k > 0$، برای رسم نمودار $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

نکته: با فرض $a > 0$، اگر نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت راست (چپ) انتقال دهیم، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y = f(x-a)$ $(y = f(x+a))$ درمی‌آید.

ابتدا با استفاده از نکات بالا، نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار تابع $f(x)$، نمودار $y = 1$ را در یک نقطه قطع می‌کند.



۲۳ - گزینه ۴ ابتدا توابع داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ x & 1 \le x < 2 \\ x & x \ge 2 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 4x & x < 1 \\ 4x & 1 \le x < 2 \\ 3x & x \ge 2 \end{cases}$$

اکنون داریم:

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x - 4x & x < 1 \\ x - 4x & 1 \le x < 2 \\ x - 3x & x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -2x & x < 1 \\ -3x & 1 \le x < 2 \\ -2x & x \ge 2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x)-g(x)=\begin{cases}-2x & x<1 \ \text{یا}\ x\geq 2\\ -3x & 1\leq x<2\end{cases}$$

۲۴ - گزینه ۴ ابتدا باید دامنه تابع $f-g$ را محاسبه نماییم و کافیست بین دامنه اشتراک بگیریم

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{1,0,a\}\cap\{-1,-2,0\}=\{0,-2\}\to a=-2$$

$$f=\{(1,2),(0,4),(-2,0)\}\qquad g=\{(-1,2),(-2,1),(0,4)\}$$

حال باید $x=0$, $x=-2$ را در تابع جایگذاری نماییم:

$$x=0\to y=\frac{g(0)}{f(0)}=\frac{4}{4}=1$$

$$x=-2\to y=\frac{g(-2)}{f(-2)}=\frac{1}{0}\quad \text{تعریف نشده}\quad \to\frac{g}{f}=\{(0,1)\}$$

۲۵ - گزینه ۱ با توجه به محدودهٔ پارامترهای a و b ابتدا قدر مطلق‌ها را برمی‌داریم.

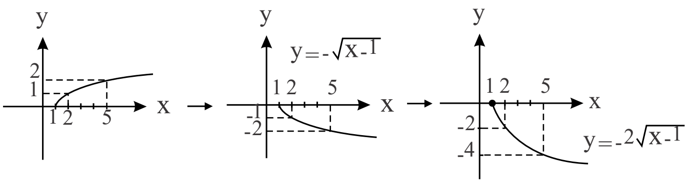
$$|x-1|=\begin{cases}x-1 & x\geq 1\\ -(x-1) & x<1\end{cases}\qquad |x-3|=\begin{cases}x-3 & x\geq 3\\ -(x-3) & x<3\end{cases}$$

حال می‌توان تابع $f+g$ را بسازیم.

$$(f+g)(x)=\begin{cases}-2(x-1)+(x-3) & x<1\\ 2(x-1)+(x-3) & 1\leq x<3\\ 2(x-1)-(x-3) & x\geq 3\end{cases}\Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}-x-1 & x<1\\ 3x-5 & 1\leq x<3\\ x+1 & x\geq 3\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(f+g)(a)\xlongequal{1<a<3}3a-5\\ (f+g)(b)\xlongequal{b<1}-b-1\end{array}\right.\to\frac{(f+g)(a)}{(f+g)(b)}=\frac{3a-5}{-b-1}$$

۲۶ - گزینه ۴ نمودار تابع $y=\sqrt{x-1}$ را رسم کرده، سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم.



روش دوم:

با کمک نقطه یابی می توانیم گزینه‌ها را حذف کنیم و به گزینهٔ درست برسیم:

$$f(1)=-2\sqrt{1-1}=0\to \text{گزینهٔ سه حذف می‌شود}$$

$$f(2)=-2\sqrt{2-1}=-2\to \text{گزینهٔ یک و دوحذف می‌شود}$$

$$f(5)=-2\sqrt{5-1}=-4\to \text{گزینهٔ چهار تأیید می‌شود}$$

۲۷ - گزینه ۳ قدم اول محاسبهٔ دامنه توابع f و g می‌باشد.

$$f(x)=\frac{1}{x-2}\to D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$g(x)=\sqrt{2x^2-2x+1}\to 2x^2-2x+1\geq 0\xrightarrow{\Delta<0}\begin{array}{c|ccc}x & -\infty & & +\infty\\ \hline p & + & + & +\end{array}$$

$$\Rightarrow Dg=\mathbb{R}$$

باتوجه به متن سوال تابع $\frac{2f+g}{g^2}$ تابعی کسری می‌باشد و می توان گفت:

$$D_{\frac{2f+g}{g^2}}=D_{2f+g}\cap D_{g^2}-\{x|g(x)=0\}$$

حال دامنهٔ $2f+g$ برابر است با:

$$D_{2f+g}=D_{2f}\cap D_g\to\mathbb{R}-\{2\}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$D_{g^2}=D_g=\mathbb{R}$$

مرحلهٔ آخر محاسبه طبق تعریف ریشه‌های $g(x)=0$ می‌باشد که چون Δ معادله منفی، معادله ریشه ندارد:

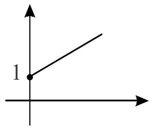
$$2x^2-2x+1=0\to\Delta=-4<0$$

$$D_{\frac{2f+g}{g^2}}=((\mathbb{R}-\{2\})\cap\mathbb{R})-\{\}=\mathbb{R}-\{2\}$$

۲۸ - گزینه ۴ قبل محاسبه برد ابتدای باید دامنه تابع $f+g$ را بیابیم

$$f(x) = x - \sqrt{x} \to D_f = [0, +\infty)$$
$$g(x) = 1 + \sqrt{x} \to D_g = [0, +\infty)$$
$$\to D_{f+g} = [0, +\infty)$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x - \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} = x + 1$$

باید توجه داشت دامنهٔ تابع $[0, +\infty)$ می‌باشد. کافیست تابع را رسم کنیم.

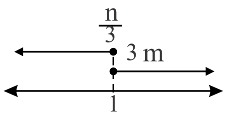


$$R_{f+g} = [1, +\infty)$$

۲۹ – گزینه ۲ ابتدا باید دامنهٔ $f+g$ را محاسبه کرده و برابر عدد ۱ قرار دهیم.

$$f(x) = \sqrt{n - 3x} \to n - 3x \geq 0 \to x \leq \frac{n}{3}$$
$$g(x) = \sqrt{x - 3m} \to x - 3m \geq 0 \to x \geq 3m$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1\} \to$$



$$\frac{n}{3} = 3m = 1 \to \begin{cases} n = 3 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

حال توابع f و g را مشخص می‌نماییم.

$$f(x) + g(x) = \sqrt{3 - 3x} + \sqrt{x - 3(\frac{1}{3})} = \sqrt{3 - 3x} + \sqrt{x - 1}$$
$$\xrightarrow{x=1} f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0 \to a = 0$$

پس: $am + n = 0 \times \frac{1}{3} + 3 = 3$

۳۰ – گزینه ۲ برای حل سؤال ابتدا $x = 2$ را در هر دو تابع جایگذاری می‌نماییم و سپس به صورت یک دستگاه $g(2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = 4x^2 + 1 \xrightarrow{x=2} \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = 2x + 1 \xrightarrow{x=2} \end{aligned} - \begin{cases} f(2) + g(2) = 17 \\ f(2) - g(2) = 5 \end{cases} \to 2g(2) = 12 \to g(2) = 6$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۴	۱۱ - ۳	۱۶ - ۳	۲۱ - ۳	۲۶ - ۴
۲ - ۳	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۱	۲۲ - ۱	۲۷ - ۳
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۴	۱۸ - ۳	۲۳ - ۴	۲۸ - ۴
۴ - ۳	۹ - ۳	۱۴ - ۲	۱۹ - ۱	۲۴ - ۴	۲۹ - ۲
۵ - ۴	۱۰ - ۴	۱۵ - ۳	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲