نمونه سوال: تابع وارون

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر نمودار تابع خطی f، نمودار وارون خود را فقط در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند و $f(۱) = ۲$ باشد، نمودار تابع $f^{-۱}$، محور xها را در کدام طول قطع می‌کند؟

۲ - تابع $f(x) = |\frac{x}{۲} + a|$ در بازهٔ $(-۲, ۱)$ یک‌به‌یک است. حدود a کدام است؟

۳ - توابع $f(x) = ۲x - |x|$ و $g(x) = x - |۲x|$ از نظر یک‌به‌یک بودن به ترتیب از راست به چپ چگونه‌اند؟

۴ - اگر $f(x) = ۲[x] - ۱$، $g(x) = \frac{x - ۲}{x + ۱}$ و $g^{-۱}(-۵) = a$ باشد، آنگاه حاصل $f(a)$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۵ - به‌ازای کدام مقدار a، وارون تابع $f(x) = \frac{۱ - ۲x}{۳x + ۴}$ از نقطهٔ $(a + ۴, a)$ می‌گذرد؟

۶- اگر $f(x)=x+2\sqrt{x}$ باشد، مقدار $f^{-1}(3)$ کدام است؟

۷- ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=\dfrac{3x+2}{4}$ کدام است؟

۸- اگر $f=\{(-3,k),(\frac{1}{2}a,-2),(2a+1,k),(b-1,1),(-1,4b)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۹- اگر وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-mx+1$ از نقطهٔ $(-m,-1)$ بگذرد، مقدار m کدام است؟ $(D_f=(-\infty,-1])$

۱۰- کم‌ترین مقدار k کدام باشد تا تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+k & , x<0 \\ -2x+3 & , x\geq 0 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد؟

۱۱- اگر $f(x)=\sqrt{x}+2x+1$ باشد، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(1)+f^{-1}(4)$ کدام است؟

۱۲ - دامنهٔ تابع $f(x)=x^2-6x+10$ کدام بازهٔ زیر باشد، تا تابع یک‌به‌یک باشد؟

۱۳ - اگر $f(x)=-2x+b$ تابعی خطی باشد و نمودار تابع $f^{-1}(x)$ از نقطهٔ $(6,8)$ بگذرد و $g(x)=-1.5x+6$ باشد، آنگاه نمودار تابع $g(x)$ و وارون تابع $f(x)$ در نقطه‌ای با کدام طول یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱۴ - کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

۱۵ - اگر $f(x)=3x-a$ و $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{b}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۶ - تابع $f(x)=x|x|$، وارون خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

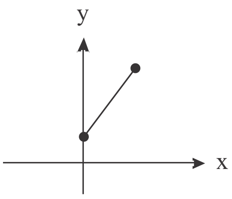
۱۷ - اگر $f(x)=\frac{2x-1}{5}$، مقدار $f(f^{-1}(4))$ کدام است؟

۱۸ - تابع خطی f مفروض است. اگر نمودار دو تابع f و f^{-1} محور xها را در نقطه‌ای به‌طول یک قطع کنند، $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱۹ - در تابع ۲ $f(x)=x^3+x+2$، اگر محل برخورد $f^{-1}(x)$ با محور xها را A' بنامیم و نقطهٔ A قرینهٔ A' نسبت به خط $y=x$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط AA' کدام است؟

۲۰ - ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{-7x+3}{5}$ کدام است؟

۲۱ - نمودار وارون تابع روبه‌رو، کدام است؟



۲۲- تابع $f(x)=(x-۲)(x-۴)+۲x$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر یک‌به‌یک است؟

۲۳- در تابع خطی $f(x)=(a+۵)x+۲b$، اگر $f^{-۱}(۷)=۲$ و $f^{-۱}(۱۱)=۳$، مقدار a کدام است؟

۲۴- اگر $f=\{(۲,a+۱),(\sqrt{b},۳)\}$ و $f^{-۱}=\{(a-۱,c+۱),(d,b-۲)\}$، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۲۵- دامنهٔ تابع $f(x)=۲x^{۲}-۷x+۳$ به‌صورت $D_f=(a,b)$ تعریف شده و وارون f، یک تابع است. (a,b) کدام‌یک از بازه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۲۶- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $f=\{(x,-۲x+۷)|x\in A\}$ باشد، آن‌گاه حاصل $f^{-۱}(۳)+f(۱)$ کدام است؟

۲۷- اگر $f(x)=\frac{۲}{۳}x+a$ باشد و نمودار $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۲,۶)$ بگذرد، مقدار $f^{-۱}(۰)$ کدام است؟

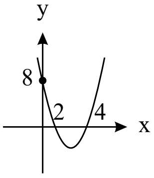
۲۸- اگر $f=\{(a^{۲}+۱,۳),(-۱,۷),(b+۱,۷),(۵,۳),(۳,۰),(۳,a+۲)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۲۹- اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & , \ x\leq ۰ \\ x-۱ & , \ x>۰ \end{cases}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲)+f^{-۱}(-۲)$ کدام است؟

۳۰- اگر f تابعی خطی با شیب m باشد، به‌ازای کدام مقدار m شیب تابع $f^{-۱}$ برابر $۴m$ است؟ $(m\neq ۰)$

۳۱- کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع یک به یک را نمایش می‌دهد؟

۳۲- اگر وارون تابع $g(x)=ax+b$ نمودار سهمی زیر را در نقاطی به طول‌های ۱ و ۳ قطع کند، آن‌گاه جواب معادلهٔ $g^{-۱}(x)=g(x)$ کدام است؟

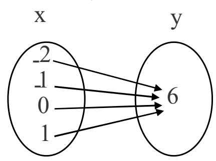


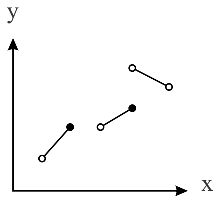
۳۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & , \quad x\geq ۲ \\ x+a & , \quad x<۲ \end{cases}$ وارون‌پذیر باشد، حدود a کدام است؟

۳۴- در چند مورد از روابط زیر، y تابعی یک‌به‌یک از x است؟

الف) $y=\begin{cases} ۲x+۱ & , \quad x>۲ \\ x-۱ & , \quad x<۲ \end{cases}$

ب) $|x|+y=۲$

پ)


ت)


۳۵- وارون تابع $f(x)=\dfrac{۳x-۱}{۲}$، کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ چون تابع f، وارون خود را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده است، پس نقطهٔ $A(3,3)$ روی f و f^{-1} قرار دارد.

$$\begin{matrix}(1,2)\in f \\ (3,3)\in f^{-1}\end{matrix} \to (2,1)\in f^{-1}$$

از طرفی چون f تابعی خطی است وارون آن هم تابعی خطی خواهد بود.

$$f^{-1}(x)=ax+b$$

$$\begin{matrix}f^{-1}(2)=1\to \\ f^{-1}(3)=3\to\end{matrix} \quad - \begin{cases}2a+b=1\\ 3a+b=3\end{cases}$$

$$-a=-2\to \boxed{a=2}\to 2(2)+b=1\to \boxed{b=-3}$$

$$\boxed{f^{-1}(x)=2x-3} \xrightarrow[y=0]{\text{برخورد با محور طول‌ها}} 2x-3=0\to x=\frac{3}{2}$$

۲ - گزینه ۲ ابتدا محدوده‌ای را برای a محاسبه می‌کنیم که تابع در بازهٔ داده شده یک‌به‌یک نباشد سپس مجموع جواب حاصل را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم. می‌دانیم اگر ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق در بازهٔ $(-2,1)$ قرار داشته باشد تابع در آن بازه یک‌به‌یک نخواهد بود. پس:

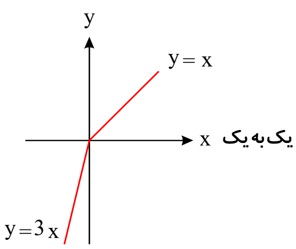
ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق: $\frac{x}{2}+a=0\Rightarrow x=-2a\Rightarrow -2<-2a<1\Rightarrow -\frac{1}{2}<a<1$

بنابراین:

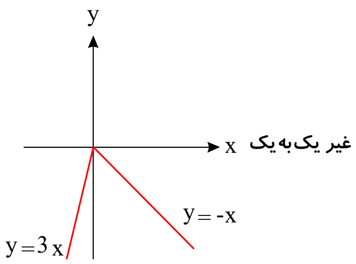
$$\text{محدودهٔ } a=\mathbb{R}-(-\frac{1}{2},1)$$

۳ - گزینه ۲ تابعی یک‌به‌یک است که اگر هر خطی موازی طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

$$f(x)=2x-|x|=\begin{cases}2x-x & ;x\geq 0\\ 2x+x & ;x<0\end{cases}\to f(x)=\begin{cases}x & ;x\geq 0\\ 3x & ;x<0\end{cases}$$



$$g(x)=x-|2x|=\begin{cases}x-2x & ;x\geq 0\\ x+2x & ;x<0\end{cases}\to g(x)=\begin{cases}-x & ;x\geq 0\\ 3x & ;x<0\end{cases}$$



۴ - گزینه ۴

$$g^{-1}(-5)=a\to g(a)=-5\to \frac{a-2}{a+1}=-5\to a-2=-5a-5$$

$$\to a+5a=-5+2\to 6a=-3\to a=-\frac{1}{2}$$

$$\to f(a)\xlongequal{a=-\frac{1}{2}} f(-\frac{1}{2})=2[-\frac{1}{2}]-1=2(-1)-1\to f(a)=-3$$

۵ - گزینه ۱

$$(a+4,a)\in f^{-1}\Rightarrow (a,a+4)\in f\to f(a)=a+4$$

$$\to \frac{1-2a}{3a+4}=a+4\to (1-2a)=(3a+4)(a+4)$$

$\rightarrow 1 - 2a = 3a^2 + 12a + 4a + 16 \rightarrow 3a^2 + 18a + 15 = 0$

$\rightarrow 3(a^2 + 6a + 5) = 0 \rightarrow (a+5)(a+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ a = -1 \end{cases}$

۶ - گزینه ۱

$f(x) = x + 2\sqrt{x} \quad , \quad f^{-1}(3) = a \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix} \in f^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix} \in f$

$\rightarrow f(a) = 3 \rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \rightarrow 2\sqrt{a} = 3 - a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4a = 9 - 6a + a^2$

$\rightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \rightarrow (a-9)(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \checkmark \\ a = 9 \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$

۷ - گزینه ۴

$f(x) = \frac{3x+2}{4} \rightarrow y = \frac{3x+2}{4} \rightarrow 4y = 3x + 2 \rightarrow 4y - 2 = 3x$

$\rightarrow x = \frac{4y-2}{3} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم.}} y = \frac{4x-2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x-2}{3}$

۸ - گزینه ۱ تابعی یک‌به‌یک است که اگر مؤلفه‌های دوم یکسان باشند، مؤلفه‌های اول نیز یکسان باشند.

$f = \{(-3,k), (\frac{a}{2}, -2), (2a+1, k), (b-1, 1), (-1, 4b)\}$

$(-3,k) \in f \ , \ (2a+1, k) \in f \xrightarrow{\text{یک‌به‌یک}} 2a + 1 = -3 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow a = -2$

$\rightarrow f = \{(-3,k), (-1,-2), (-3,k), (b-1,1), (-1,4b)\}$

$(-1, 4b) \in f \ , \ (-1,-2) \in f \xrightarrow{\text{تابع}} 4b = -2 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$

پس: $a - b = -2 - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

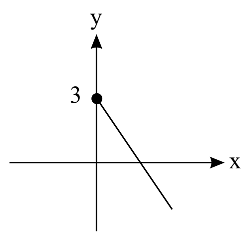
۹ - گزینه ۱

$(-m, -1) \in f^{-1} \rightarrow (-1, -m) \in f \rightarrow f(-1) = -m$

$\rightarrow (-1)^2 - m(-1) + 1 = -m \rightarrow 1 + m + 1 = -m \rightarrow 2m = -2 \rightarrow \boxed{m = -1}$

۱۰ - گزینه ۱

تابع f را برای $x \geq 0$ رسم می‌کنیم، داریم:



نمودار تابع $x^2 - 2x + k$ سهمی رو به بالاست پس باید کم‌ترین مقدار آن بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشد.

$y = x^2 - 2x + k = x^2 - 2x + 1 + k - 1 = (x-1)^2 + (k-1)$

کم‌ترین مقدار این تابع در نقطهٔ مرزی $x = 0$ اتفاق می‌افتد.

$\rightarrow (0-1)^2 + k - 1 \geq 3 \rightarrow 1 + k - 1 \geq 3 \rightarrow k \geq 3$

۱۱ - گزینه ۱

$f^{-1}(1) = a \rightarrow f(a) = 1 \rightarrow \sqrt{a} + 2a + 1 = 1 \rightarrow \sqrt{a} + 2a = 0$

$\rightarrow \sqrt{a} = -2a \xrightarrow{\text{توان ۲}} a = 4a^2 \rightarrow 4a^2 - a = 0 \rightarrow a(4a-1) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} \boxed{a = ۰} \rightarrow f^{-۱}(۱) = ۰ \\ a = \frac{۱}{۴} \ (\text{غیر قابل قبول}) \end{cases}$$

$$f^{-۱}(۴) = b \rightarrow f(b) = ۴ \rightarrow \sqrt{b} + ۲b + ۱ = ۴ \rightarrow \sqrt{b} = ۳ - ۲b$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} b = ۹ - ۱۲b + ۴b^۲ \rightarrow ۴b^۲ - ۱۳b + ۹ = ۰$$

$$\xrightarrow{۴-۱۳+۹=۰} \begin{cases} \boxed{b = ۱} \rightarrow f^{-۱}(۴) = ۱ \\ b = \frac{۹}{۴} \ (\text{غیر قابل قبول}) \end{cases}$$

$$\rightarrow f^{-۱}(۱) + f^{-۱}(۴) = ۰ + ۱ = ۱$$

۱۲ - گزینه ۲ تابع $f(x) = x^۲ - ۶x + ۱۰$ سهمی است و برای اینکه یک‌به‌یک باشد دامنهٔ انتخاب‌شده باید دو طرف رأس سهمی نباشد طول رأس سهمی می‌تواند ابتدا یا انتهای بازه باشد، پس داریم:

$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۶}{۲(۱)} = ۳$ (رأس سهمی) $\rightarrow$ به شرط گفته شده در بالا تنها گزینهٔ ۲ یعنی $(-۳, ۳]$ قابل قبول است.

۱۳ - گزینه ۲

می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(b) = a$ است.

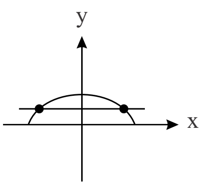
$$\left| \begin{matrix} ۸ \\ ۶ \end{matrix} \right. \xrightarrow{f(x) = -۲x + b} ۶ = -۱۶ + b \rightarrow b = ۲۲ \rightarrow f(x) = -۲x + ۲۲$$

$$y = -۲x + ۲۲ \rightarrow ۲x = -y + ۲۲ \rightarrow x = -\frac{۱}{۲}y + ۱۱ \rightarrow f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۱۱$$

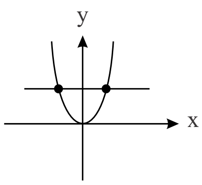
$$f^{-۱}(x) = g(x) \rightarrow -\frac{x}{۲} + ۱۱ = -۱/۵x + ۶ \rightarrow ۱/۵x - ۰/۵x = ۶ - ۱۱ \rightarrow x = -۵$$

۱۴ - گزینه ۲ نکته: تابع یک‌به‌یک، تابعی است که هر خط موازی محور xها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

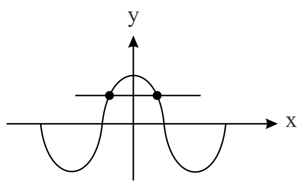
با توجه به نکتهٔ بالا و نمودارهای زیر، گزینهٔ ۲ پاسخ است.



گزینه1



گزینه3



گزینه4

۱۵ - گزینه ۲ برای محاسبهٔ a, b کافیست، وارون تابع f را محاسبه و معادل f قرار می‌دهیم:

$$f(x) = ۳x - a \rightarrow y = ۳x - a \xrightarrow{\text{وارون}}$$

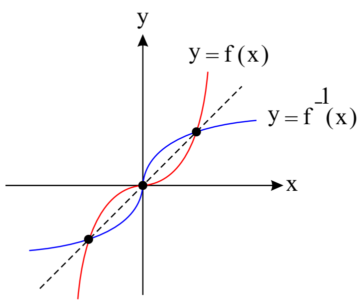
$$x = ۳y - a \rightarrow ۳y = x + a \rightarrow y = \frac{x + a}{۳}$$

$$f^{-۱}(x) = \frac{x + a}{۳} = \frac{x - ۱}{b} \rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۳ \end{cases} \rightarrow a + b = ۲$$

۱۶ - گزینه ۳ یکی از روش‌های حل این سوال رسم می‌باشد:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$$

پس از رسم نمودار را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه می‌نماییم تا منحنی تابع معکوس مشخص شود:



با توجه به منحنی سه نقطهٔ برخورد وجود دارد.

۱۷ - گزینه ۴ راه حل اول:

نکته: برای محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون $y=f(x)y=f(x)$، ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم، سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم.

ابتدا با استفاده از نکتهٔ بالا، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲x-۱}{۵}\Rightarrow ۲x-۱=۵y\Rightarrow x=\frac{۵y+۱}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۵x+۱}{۲}$$

بنابراین:

$$f(f^{-۱}(۴))=f(\frac{۵(۴)+۱}{۲})=f(\frac{۲۱}{۲})=\frac{۲(\frac{۲۱}{۲})-۱}{۵}=۴$$

راه حل دوم:

نکته: $f(f^{-۱}(x))=x \quad , \quad f^{-۱}(f(x))=x$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم: $f(f^{-۱}(۴))=۴$

۱۸ - گزینه ۱ تابع خطی f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می گیریم و داریم:

$$(۱,۰)\in f\to f(۱)=۰\to a(۱)+b=۰\to a+b=۰$$

$$(۱,۰)\in f^{-۱}\to(۰,۱)\in f\to f(۰)=۱\to a(۰)+b=۱\to b=۱$$

$$\to\begin{cases}a+b=۰\to a=-۱\\ b=۱\end{cases}\to f(x)=-x+۱\to y=-x+۱$$

$$\to x=-y+۱\to f^{-۱}(x)=-x+۱\xrightarrow{x=۲}f^{-۱}(۲)=-۲+۱=-۱$$

۱۹ - گزینه ۲

$$A'(a,۰)\in f^{-۱}\to(۰,a)\in f\to f(۰)=a\to(۰)^۳+۰+۲=a\to a=۲$$

$$\to A'(۲,۰)\xrightarrow{A\text{ قرینه } A'\text{ نسبت به خط } y=x}A(۰,۲)$$

$$\to AA'=\sqrt{(x_A-x_{A'})^۲+(y_A-y_{A'})^۲}=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

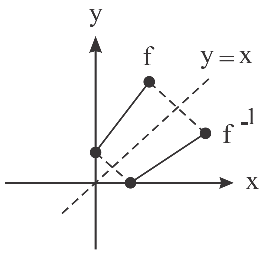
۲۰ - گزینه ۳ برای محاسبهٔ ضابطه وارون ابتدا عبارت را برحسب x بازنویسی می‌نماییم:

$$y=\frac{-۷x+۳}{۵}\to-۷x+۳=۵y\to-۷x=۵y-۳\to x=\frac{۵y-۳}{-۷}$$

در این مرحله x را به y و y را به x تبدیل می‌نماییم.

$$y=\frac{۵x-۳}{-۷}\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{۵}{۷}x+\frac{۳}{۷}$$

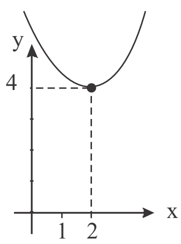
۲۱ - گزینه ۲ کافیست نمودار f را نسبت به نیمساز قرینه کنیم.



۲۲ - گزینه ۲ ابتدا بهتر است تابع را ساده‌تر کنیم.

$$f(x)=(x-۲)(x-۴)+۲x=x^۲-۴x+۸=x^۲-۴x+۴+۴=(x-۲)^۲+۴$$

با توجه به معادله نمودار $f(x)$ به شکل زیر می‌باشد.



با توجه به نمودار تابع فقط در بازهٔ مطرح شده در گزینهٔ ۲ یعنی $[-۱,۲]$ یک‌به‌یک می‌باشد.

۲۳ - گزینه ۱ باید توجه داشت اگر $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ روی تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ روی تابع وارون قرار دارد. پس داریم: $f(x)=(a+۵)x+۲b$

$$\begin{matrix} f^{-۱}(۱۱)=۳\to f(۳)=۱۱\to (a+۵)(۳)+۲b=۱۱\to \\ f^{-۱}(۷)=۲\to f(۲)=۷\to (a+۵)(۲)+۲b=۷\to \end{matrix}\begin{cases}۳a+۲b=-۴\\ ۲a+۲b=-۳\end{cases}$$

$$\ominus\to \boxed{a=-۱}$$

$$\boxed{b=-\frac{۱}{۲}}$$

۲۴ - گزینه ۱ نکته: برای تابع وارون‌پذیر f داریم: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-۱}$

نکته: دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) برابرند، اگر و تنها اگر: $a=c\ ,\ \ b=d$

$$f=\{(۲,a+۱),(\sqrt{b},۳)\}\Rightarrow f^{-۱}=\{(a+۱,۲),(۳,\sqrt{b})\}$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$f^{-۱}=\{(a-۱,c+۱),(d,b-۲)\}$$

بنابراین: $\{(a+۱,۲),(۳,\sqrt{b})\}=\{(a-۱,c+۱),(d,b-۲)\}$

واضح است که $a+۱\neq a-۱$، پس:

$$\begin{cases}(a+۱,۲)=(d,b-۲)\\ (۳,\sqrt{b})=(a-۱,c+۱)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲=b-۲\Rightarrow \boxed{b=۴}\\ ۳=a-۱\Rightarrow\boxed{a=۴}\\ a+۱=d\xrightarrow{a=۴}\boxed{d=۵}\\ \sqrt{b}=c+۱\xrightarrow{b=۴}\boxed{c=۱}\end{cases}$$

بنابراین: $a+b+c+d=۴+۴+۱+۵=۱۴$

۲۵ - گزینه ۳ اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آنگاه تابع یک‌به‌یک است، پس f باید یک‌به‌یک باشد.

از آنجا که نمودار تابع f یک سهمی است، برای یک به یک بودن، بازهٔ (a,b) نباید شامل رأس سهمی باشد.

$$x_{\text{راس سهمی}}=\frac{-b}{۲a}=-\frac{(-۷)}{۲\times(۲)}=\frac{۷}{۴}=۱/۷۵$$

از بین گزینه‌ها، تنها گزینهٔ (۳) شامل رأس سهمی نمی‌باشد.

۲۶ - گزینه ۱ با قرار دادن اعضای مجموعهٔ A به جای x، تابع f را می‌نویسیم:

$$f=\{(۱,۵),(۲,۳),(۳,۱),(۴,-۱)\}\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۲\ ,\ \ f(۱)=۵\Rightarrow f^{-۱}(۳)+f(۱)=۲+۵=۷$$

۲۷ - گزینه ۲

$$(۲,۶)\in f^{-۱}\Rightarrow(۶,۲)\in f\Rightarrow f(۶)=۲\Rightarrow ۲=\frac{۲}{۳}\times(۶)+a\Rightarrow ۲=۴+a\Rightarrow\boxed{a=-۲}$$

ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲}{۳}x-۲\Rightarrow\frac{۲}{۳}x=y+۲\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}(y+۲)$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}y+۳\xrightarrow[x,y\ \text{جای}]{\text{عوض کردن}}y=\frac{۳}{۲}x+۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳}{۲}x+۳\Rightarrow f^{-۱}(۰)=۳$$

۲۸ - گزینه ۴

$$\begin{cases}(a^۲+۱,۳)\in f\\ (۵,۳)\in f\end{cases}\xrightarrow{f\ \text{یک‌به‌یک}}a^۲+۱=۵\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ a=-۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}(-۱,۷)\in f\\ (b+۱,۷)\in f\end{cases}\xrightarrow{f\ \text{یک‌به‌یک}}b+۱=-۱\Rightarrow b=-۲$$

اگر $a=۲$ باشد دو زوج‌مرتب $(۳,۴)$ و $(۳,۰)$ را داریم که شرط تابع بودن را نقض می‌کند.

اگر $a=-۲$ باشد تابع f به‌صورت $f=\{(-۱,۷),(۵,۳),(۳,۰)\}$ می‌شود و یک‌به‌یک است، پس:

$$a+b=-۲-۲=-۴$$

۲۹ - گزینه ۱

$$f^{-۱}(۲)=a\Rightarrow f(a)=۲$$

$$f^{-۱}(-۲)=b\Rightarrow f(b)=-۲$$

اگر $a\leq ۰$ باشد: $f(a)=۲a-۱=۲\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$ غ‌ق‌ق

اگر $a>۰$ باشد: $f(a)=a-۱=۲\Rightarrow\boxed{a=۳}$

اگر $b \le ۰$ باشد: $f(b)=۲b-۱=-۲ \Rightarrow ۲b=-۱ \Rightarrow \boxed{b=-\frac{۱}{۲}}$

اگر $b > ۰$ باشد: $f(b)=b-۱=-۲ \Rightarrow b=-۱$ غقق

$$\Rightarrow f^{-۱}(۲)+f^{-۱}(-۲)=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۳۰ - گزینه ۴ هرگاه دو خط نسبت به نیمساز قرینه باشند. شیب یکی معکوس دیگری است یا حاصل‌ضرب شیب آن‌ها یک خواهد بود.

$$m_f \times m_{f^{-۱}}=۱ \rightarrow (m)(۴m)=۱ \rightarrow m^۲=\frac{۱}{۴} \rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

۳۱ - گزینه ۴ تنها در نمودار گزینهٔ «۴» هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (شرط تابع بودن) و هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (شرط یک به یک بودن).

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: تابع نیست.

گزینه‌های ۲ و ۳: یک به یک نیستند.

۳۲ - گزینه ۱ ابتدا معادلهٔ سهمی را به دست می‌آوریم. $x=۲$ و $x=۴$ ریشه‌های تابع درجه دوم هستند:

$$f(x)=a'(x-۲)(x-۴)$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } (۰,۸) \text{ در معادله صدق می‌کند.}} ۸=a'(۰-۲)(۰-۴) \Rightarrow ۸a'=۸ \Rightarrow a'=۱ \Rightarrow f(x)=(x-۲)(x-۴)$$

وارون g، نمودار را در نقاط ۱ و ۳ قطع می‌کند، پس:

$$x=۱ \Rightarrow f(۱)=(۱-۲)(۱-۴)=(-۱)(-۳)=۳ \Rightarrow (۱,۳)\in g^{-۱}$$

$$x=۳ \Rightarrow f(۳)=(۳-۲)(۳-۴)=۱(-۱)=-۱ \Rightarrow (۳,-۱)\in g^{-۱}$$

حال معادلهٔ خط $g^{-۱}$ را می‌یابیم:

$$m=\frac{۳-(-۱)}{۱-۳}=\frac{۴}{-۲}=-۲ \Rightarrow y-۳=-۲(x-۱)$$

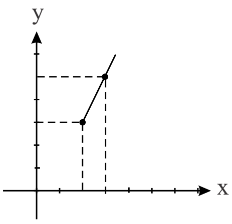
$$\Rightarrow y=-۲x+۵ \Rightarrow g^{-۱}(x)=-۲x+۵$$

حال وارون $g^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=-۲x+۵ \Rightarrow ۲x=۵-y$$

$$\Rightarrow x=\frac{۵-y}{۲} \Rightarrow g(x)=\frac{۵-x}{۲}, g^{-۱}(x)=g(x) \Rightarrow -۲x+۵=\frac{۵-x}{۲} \Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

۳۳ - گزینه ۳ با رسم تابع f به‌ازای $x \ge ۲$ داریم:



برای یک‌به‌یک بودن می‌بایست، هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، این ویژگی زمانی برقرار است که در ضابطهٔ دوم به‌ازای $x<۲$ مقادیر $x+a$ کوچکتر از ۳ باشد، پس باید $a \le ۱$ باشد.

۳۴ - گزینه ۲ در مورد (الف) با رسم تابع می‌توان مشخص کرد، که تابع یک‌به‌یک است هم‌چنین در مورد (ت) تابع یک‌به‌یک است.

در نمودار مختصاتی تابع اگر هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، تابع یک‌به‌یک است.

۳۵ - گزینه ۳

$$f(x)=\frac{۳x-۱}{۲} \Rightarrow y=\frac{۳x-۱}{۲}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$x=\frac{۳y-۱}{۲} \Rightarrow ۲x=۳y-۱ \Rightarrow ۳y=۲x+۱ \Rightarrow y=\frac{۲x+۱}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۱}{۳}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۱	۱۱ - ۱	۱۶ - ۳	۲۱ - ۲	۲۶ - ۱	۳۱ - ۴
۲ - ۲	۷ - ۴	۱۲ - ۲	۱۷ - ۴	۲۲ - ۲	۲۷ - ۲	۳۲ - ۱
۳ - ۲	۸ - ۱	۱۳ - ۲	۱۸ - ۱	۲۳ - ۱	۲۸ - ۴	۳۳ - ۳
۴ - ۴	۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۱	۲۹ - ۱	۳۴ - ۲
۵ - ۱	۱۰ - ۱	۱۵ - ۲	۲۰ - ۳	۲۵ - ۳	۳۰ - ۴	۳۵ - ۳