نمونه سوال: آشنایی با تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- در تابع خطی $f(x)$ اگر $f(3x-1)+3f(1-x)=4$, $f(5)=2$ باشد $f(14)$ کدام است؟

۲- اگر f یک تابع خطی باشد به‌طوری که $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{x^2-12x+1}{2x}$ مقدار $f(-4)$ کدام است؟

۳- اگر $f(x-\frac{1}{x})=x+\frac{1}{x}+6$، آنگاه $f(\sqrt{2})$ کدام می‌تواند باشد؟ $(x\neq 0)$

۴- اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$ باشد $f(\sqrt{5})$ کدام است؟

۵- اگر $n\in N$ باشد حاصل $\left[\sqrt[3]{8n^3+6n^2+1}\right]$ کدام است؟

۶- اگر n عددی طبیعی بوده و داشته باشیم $[\sqrt{n^2+4n+1}]=9$، حاصل $[\sqrt{2n^2+n+1}]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۷- اگر $5f(x-2)+f(2-x)=4x+1$ باشد، آنگاه $f(3)$ کدام است؟

۸- حاصل $y=2x-2[x]$ در کدام بازه قرار دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

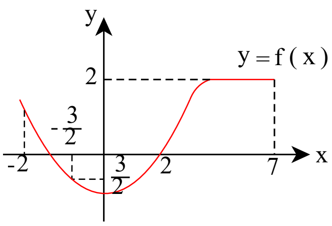
۹- نمودار تابع $y=[\sin x]$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ از چند پاره‌خط و نقطه تشکیل شده است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

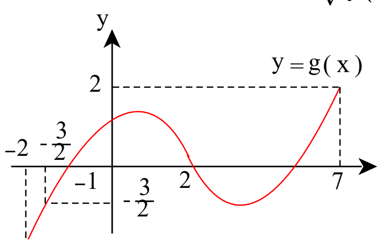
۱۰- اگر $f(x)=x^2-2$ و $f(g(x))=x^2-2x-1$ آن‌گاه $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱۱- اگر $[x]=1$ باشد آن‌گاه حاصل $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$ کدام است؟

۱۲- برد تابع $f(x)=[x+۲]+[-x]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱۳- نمودارهای توابع f و g به صورت زیر هستند. عبارت $y=\dfrac{۱}{\sqrt{f(x)-g(x)}}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟





۱۴- اگر $\left[x+\dfrac{۱}{۲}\right]=-۲$ باشد، حاصل $[۲x]$ کدام می‌تواند باشد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱۵- اگر $f(x)=\dfrac{۳^{-[x]}}{۳^{[-x]}}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{۱})+f(\sqrt{۲})+f(\sqrt{۳})+\cdots+f(\sqrt{۱۰})$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱۶- اگر $|۲x+۱|<۱$ حاصل $[x]+[x^۲]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱۷ - اگر $f(x)=x^{۳}-۳x$ باشد دامنه‌ی تابع $h(x)=\sqrt{x-f(x)}$ کدام است؟

۱۸ - دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(a^{۲}-۴)x^{۲}+ax+۶}$ بازهٔ $(-\infty,b]$ است. $a+b$ کدام است؟

۱۹ - در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو (برحسب هزار تومان) پس از x ساعت، با رابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ۱ & ۰\leq x<۱ \\ ۳ & ۱\leq x<۲ \\ ۵ & ۲\leq x<۳ \end{cases}$ محاسبه می‌شود. ضابطهٔ تابع هزینهٔ پارکینگ به‌ازای $۰\leq x<۳$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۲۰ - اگر $[\frac{۱-x}{x}]=۱$، آن‌گاه تعداد مقادیر ممکن برای عبارت $[-۶x]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۲۱ - فرض کنیم $f(g(x))=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۴$ و $g(x)=x-\frac{۱}{x}$، در این صورت $f(x)$ کدام است؟

۲۲ - دامنهٔ تابع $f(x)=x+\sqrt{-x^2-2x+3}$ بازهٔ $[a,b]$ می‌باشد. $b-a$ کدام است؟

۲۳ - اگر $n\in N$ باشد حاصل $\left[\sqrt{4n^2+3n+1}\right]$ کدام است؟

۲۴ - جواب معادله‌ی $[3x-2]=-4$ کدام است؟ (نماد $[\;]$، جزء صحیح است.)

۲۵ - نمودار تابع $y=x-[x]\ \ ;\ \ x\in[-2,3)$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه‌ی l تشکیل شده است. دو تایی مرتب (n,l) کدام است؟

۲۶ - دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۲۷ - اگر $g(x)=x^2-2x\ \ ,\ \ g(f(x))=x^2+1$، نمودار f و محور عرض‌ها در کدام عرض متقاطع‌اند؟ $(f(x)>1)$

۲۸ - اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $||[x]-2| \le 1$ بازهٔ $[a,b)$ باشد $a+b$ کدام است؟ ($[\;]$، علامت جزء صحیح است.)

۲۹ - در کدام گزینه، توابع f و g مساوی نیستند؟

۳۰ - کدام گزینه درست نیست؟

علی هاشمی

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ تابع خطی به‌صورت $f\,(x)=ax+b$ نشان داده می‌شود.

$$f(۳x-۱)+۳f(۱-x)=۴\ \to a(۳x-۱)+b+۳\,(a(۱-x)+b)=۴$$
$$\to ۳ax-a+b+۳a-۳ax+۳b=۴\to ۲a+۴b=۴\ \to a+۲b=۲$$
$$f(۵)=۲\ \to ۵a+b=۲\Rightarrow \begin{cases} a+۲b=۲\\ ۵a+b=۲\end{cases}\to a=\frac{۲}{۹},b=\frac{۸}{۹}\to f(x)=\frac{۲}{۹}x+\frac{۸}{۹}$$
$$\to f(۱۴)=\frac{۲۸}{۹}+\frac{۸}{۹}=\frac{۳۶}{۹}=۴$$

۲ - گزینه ۴ تابع خطی به‌صورت $f(x)=ax+b$ نشان داده می‌شود.

$$f(x)+\ f(\frac{۱}{x})=\frac{x^۲-۱۲x+۱}{۲x}\to ax+b+\frac{a}{x}+b=\frac{ax^۲+bx+a+bx}{x}$$
$$=\frac{ax^۲+۲bx+a}{x}=\frac{۲ax^۲+۴bx+۲a}{۲x}=\frac{x^۲-۱۲x+۱}{۲x}\xrightarrow{\text{مقایسه}}a=\frac{۱}{۲},\ ۴b=-۱۲\ ,\ b=-۳$$
$$\text{بنابراین} f(x)=\frac{۱}{۲}x-۳\ \to f(-۴)=-۲-۳=-۵$$

۳ - گزینه ۱

$$x-\frac{۱}{x}=t\to x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲=t^۲\to (x+\frac{۱}{x})^۲=t^۲+۴$$

$$f(t)=\pm\sqrt{t^۲+۴}+۶\to f(x)=۶\pm\sqrt{x^۲+۴}\to f(\sqrt{۲})=۶\pm\sqrt{۶}$$

۴ - گزینه ۳ می دانیم: $\boxed{a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)}$

$$f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}\to f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳x(\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x})$$
$$\to f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x})$$
$$\xrightarrow{x+\frac{۱}{x}=t}f(t)=t^۳-۳t\to f(\sqrt{۵})=(\sqrt{۵})^۳-۳\sqrt{۵}=۵\sqrt{۵}-۳\sqrt{۵}=۲\sqrt{۵}$$

۵ - گزینه ۱ روش اول: چون n عددی طبیعی است واضح است که داریم:

$$۸n^۳<۸n^۳+۶n^۲+۱<۸n^۳+۱۲n^۲+۶n+۱$$
$$\to\ (۲n)^۳<۸n^۳+۶n^۲+۱<(۲n+۱)^۳\to\ \sqrt[۳]{(۲n)^۳}<\sqrt[۳]{۸n^۳+۶n^۲+۱}<\sqrt[۳]{(۲n+۱)^۳}$$
$$\to\ ۲n<\sqrt[۳]{۸n^۳+۶n^۲+۱}<۲n+۱\ \to\ \left[\sqrt[۳]{۸n^۳+۶n^۲+۱}\right]=۲n$$

روش دوم: یک عدد طبیعی دلخواه انتخاب می‌کنیم.

$$n=۱\ \to\ \left[\sqrt[۳]{۸+۶+۱}\right]=\left[\sqrt[۳]{۱۵}\right]=[۲/\cdots]=۲$$

گزینه‌ای که به‌جای n آن عدد یک قرار دهیم و حاصل ۲ شود جواب تست است (گزینه‌ی اول)

۶ - گزینه ۱ به ازای هر عدد طبیعی n به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\underbrace{n^۲+۲n+۱}_{(n+۱)^۲}<n^۲+۴n+۱<\underbrace{n^۲+۴n+۴}_{(n+۲)^۲}\Rightarrow n+۱<\sqrt{n^۲+۴n+۱}<n+۲$$
$$\Rightarrow\ n\in N:[\sqrt{n^۲+۴n+۱}]=n+۱\ \xrightarrow{\text{طبق فرض}}\ n+۱=۹\ \Rightarrow\ n=۸$$

پس داریم:
$$[\sqrt{۲n^۲+n+۱}]=[\sqrt{۱۲۸+۸+۱}]=[\sqrt{۱۳۷}]=[۱۱/\cdots]=۱۱$$

۷ - گزینه ۲ چون در صورت سؤال $f(۳)$ را خواسته، ابتدا هر یک از عبارت‌های $x-۲$ و $۲-x$ را مساوی ۳ قرار می‌دهیم:

$$x-۲=۳\to x=۵\ ,\ ۲-x=۳\to x=-۱$$

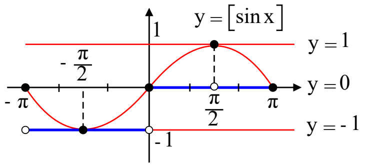
$$\left.\begin{array}{l} x=۵\to ۵f(۳)+f(-۳)=۲۱\\ x=-۱\to ۵f(-۳)+f(۳)=-۳\end{array}\right\}\times(-۵)\ \to -۲۴f(۳)=-۱۰۸\to f(۳)=۴/۵$$

۸ - گزینه ۲

می‌دانیم $۰\le f(x)-[f(x)]<۱$ است.

$$۰\le x-[x]<۱\xrightarrow{\times ۲}۰\le ۲(x-[x])<۲\Rightarrow ۰\le ۲x-۲[x]<۲\Rightarrow ۰\le y<۲\Rightarrow y\in[۰,۲)$$

۹ - گزینه ۴



واضح است که شکل از سه پاره‌خط و دو نقطه تشکیل شده است.

۱۰ - گزینه ۴

$f(g(x)) = x^2 - 2x - 1 \to (g(x))^2 - 2 = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow g^2(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$\Rightarrow g(x) = \pm(x-1) \Rightarrow g(x) = x - 1$ یا $g(x) = 1 - x$

۱۱ - گزینه ۱ اگر $[x] = 1$ باشد آن‌گاه $1 \le x < 2$ است.

$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = \underbrace{|x-1|}_{+} + \underbrace{|x-2|}_{-} = x - 1 + 2 - x = 1$

۱۲ - گزینه ۴

می‌دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & , x \in Z \\ -1 & , x \notin Z \end{cases}$

با توجه به $[x+2] = [x] + 2$ داریم:

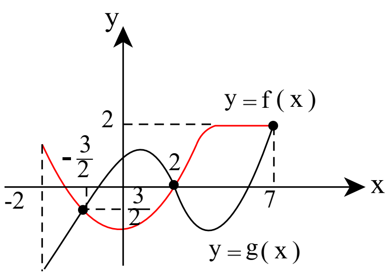
$f(x) = [x] + [-x] + 2 \begin{cases} \xrightarrow{x \in Z} f(x) = 0 + 2 = 2 \\ \xrightarrow{x \notin Z} f(x) = -1 + 2 = 1 \end{cases}$

پس برد تابع $\{1, 2\}$ است.

۱۳ - گزینه ۴ برای یافتن دامنه‌ی $y = \dfrac{1}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$، باید x هایی را بیابیم که برای آن‌ها حاصل $f(x) - g(x)$ مثبت است، یعنی باید داشته باشیم $f(x) - g(x) > 0$ یا $f(x) > g(x)$.

توجه کنید که $f(x) - g(x)$ نمی‌تواند برابر صفر باشد چون باعث صفر شدن مخرج کسر می‌شود.

اگر نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم خواهیم داشت:



باتوجه به شکل به ازای مقادیری از x که به $(2, 7) \cup [-2, -\frac{3}{2})$ تعلق دارد $f(x)$ بزرگ‌تر از $g(x)$ است.

۱۴ - گزینه ۲

$\left[x + \frac{1}{2}\right] = -2 \Rightarrow -2 \le x + \frac{1}{2} < -1 \Rightarrow -2 - \frac{1}{2} \le x < -1 - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{5}{2} \le x < -\frac{3}{2} \Rightarrow -5 \le 2x < -3 \Rightarrow [2x] = -5 \, , \, -4$

۱۵ - گزینه ۲

$f(x) = \dfrac{3^{-[x]}}{3^{[-x]}} = 3^{-[x]-[-x]} = 3^{-([x]+[-x])} = (\frac{1}{3})^{[x]+[-x]}$

از طرفی می‌دانیم $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; \; x \in Z \\ -1 & ; \; x \notin Z \end{cases}$، لذا برای مجموعه‌ی $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \cdots, \sqrt{10}\}$ اعداد $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ اعداد صحیح هستند، پس داریم:

$x \in Z \Rightarrow (\frac{1}{3})^{[x]+[-x]} = (\frac{1}{3})^{0} = 1$

و برای بقیه‌ی اعداد که صحیح نیستند، داریم:

$x \notin Z \Rightarrow (\frac{1}{3})^{[x]+[-x]} = (\frac{1}{3})^{-1} = 3$

$f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{10}) = (f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{4}) + f(\sqrt{9})) + (f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5})$

$+ f(\sqrt{6}) + f(\sqrt{7}) + f(\sqrt{8}) + f(\sqrt{10})) = 3 \times 1 + 7 \times 3 = 24$

۱۶ - گزینه ۴ ابتدا نامعادله‌ی معادله‌ی قدرمطلق را حل می‌کنیم:

$|2x + 1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x + 1 < 1 \Rightarrow -2 < 2x < 0$

$\Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \end{cases} \Rightarrow [x] + [x^2] = -1$

۱۷ - گزینه ۱

تابع $\sqrt{x-f(x)}=\sqrt{۴x-x^۳}$ وقتی با معنی است که $۴x-x^۳\geq ۰$ باشد

$۴x-x^۳\geq \longrightarrow x(۴-x^۲)\geq ۰ \longrightarrow$

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
عبارت ≥ ۰		+	۰	−	۰	+	۰	−	

بنابراین دامنه‌ی تعریف تابع به‌صورت $(-\infty,-۲]\cup[۰,۲]$ است.

۱۸ - گزینه ۴

زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$f(x)=\sqrt{(a^۲-۴)x^۲+ax+۶}\rightarrow (a^۲-۴)x^۲+ax+۶\geq ۰$$

جواب یک نامعادلهٔ درجهٔ دوم هیچ گاه نمی تواند کوچکتر مساوی یک ریشه اش باشد (می تواند $\mathbb{R}$ یا یک تک عدد یا تهی یا بین دو ریشه یا اجتماع خارج دو ریشه باشد) پس عبارت زیر رادیکال نمی تواند درجهٔ دوم باشد و ضریب $x^۲$ باید صفر باشد، داریم:

$$a^۲-۴=۰\rightarrow a=\pm ۲$$

$$۱)\ a=۲\rightarrow f(x)=\sqrt{۲x+۶}\rightarrow ۲x+۶\geq ۰\rightarrow ۲x\geq -۶\rightarrow x\geq -۳$$

$\rightarrow D_f=[-۳,+\infty)$ (غیر قابل قبول)

$$۲)\ a=-۲\rightarrow f(x)=\sqrt{-۲x+۶}\rightarrow -۲x+۶\geq ۰\rightarrow ۶\geq ۲x\rightarrow ۳\geq x$$

$$\rightarrow D_f=(-\infty,۳]$$

پس $a=-۲$، $b=۳$ و در نتیجه $a+b=۱$ است.

۱۹ - گزینه ۲ روش اول:

برای حل سوال کافیست، از تعریف جزء صحیح استفاده کرد.

$$n\leq x<n+۱\rightarrow [x]=n$$

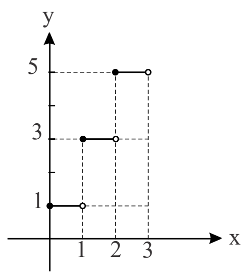
حال تک تک بازه‌های مطرح شده را می‌توان در ضابطه‌ها جایگذاری کنیم:

$$\begin{cases} ۰\leq x<۱\rightarrow [x]=۰\xrightarrow{f(x)=۱} f(x)=۲[x]+۱\\ ۱\leq x<۲\rightarrow [x]=۱\xrightarrow{f(x)=۳} f(x)=۲[x]+۱\\ ۲\leq x<۳\rightarrow [x]=۲\xrightarrow{f(x)=۵} f(x)=۲[x]+۱\end{cases}$$

روش دوم:

ابتدا نمودار تابع را رسم می کنیم.

با توجه به اینکه فاصلهٔ قائم پله ۲ واحد و طول پله‌ها یک واحد است، تابع به صورت $y=۲[x]+b$ می باشد که تنها گزینهٔ ۲ صحیح می‌باشد.



۲۰ - گزینه ۱

$$[\frac{۱-x}{x}]=۱\ \Rightarrow\ ۱\leq \frac{۱-x}{x}<۲\ \Rightarrow\ ۱\leq \frac{۱}{x}-۱<۲\ \rightarrow ۲\leq \frac{۱}{x}<۳$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}}\ \frac{۱}{۲}\geq \frac{۱}{\frac{۱}{x}}>\frac{۱}{۳}\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۳}<x\leq \frac{۱}{۲}\ \xrightarrow{\times(-۶)}\ -۲>-۶x\geq -۳\ \Rightarrow\ [-۶x]=-۳$$

توجه کنید اگر طرفین یک نامعادله که هم‌علامت باشند را معکوس کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود.

۲۱ - گزینه ۱

$$f(g(x))=x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۴\rightarrow f(x-\frac{۱}{x})=(x-\frac{۱}{x})^۲+۲-۴$$

$$\xrightarrow{x-\frac{۱}{x}=t} f(t)=t^۲-۲\rightarrow f(x)=x^۲-۲$$

توجه کنید که $a^۲+b^۲=(a-b)^۲+۲ab$ می‌باشد.

۲۲ - گزینه ۱

$$f(x)=x+\sqrt{-x^۲-۲x+۳}$$

دامنهٔ تابع رادیکالی با فرج زوج برابر است با: $-x^{۲}-۲x+۳\geq ۰ \xrightarrow{x(-)}$

$x^{۲}+۲x-۳\leq ۰\to (x-۱)(x+۳)\leq ۰$

x	-∞		-3		1		+∞
P		+	ج	- ج	ج	+	

$\to D_f=[-۳,۱]=[a,b]\to b-a=۱-(-۳)=۴$

۲۳ ـ گزینه ۲ روش اول: چون n عددی طبیعی است واضح است که:

$$۴n^{۲}<۴n^{۲}+۳n+۱<۴n^{۲}+۴n+۱\to (۲n)^{۲}<۴n^{۲}+۳n+۱<(۲n+۱)^{۲}$$
$$\to \sqrt{(۲n)^{۲}}<\sqrt{۴n^{۲}+۳n+۱}<\sqrt{(۲n+۱)^{۲}}$$
$$\to ۲n<\sqrt{۴n^{۲}+۳n+۱}<۲n+۱\to [\sqrt{۴n^{۲}+۳n+۱}]=۲n$$

روش دوم: یک عدد طبیعی دلخواه انتخاب می‌کنیم. $n=۱\to [\sqrt{۴+۳+۱}]=[\sqrt{۸}]=[۲/\cdots]=۲$

گزینه‌ای درست است که اگرچه جای n آن عدد یک قراردهی حاصل ۲ شود. (گزینه‌ی دوم)

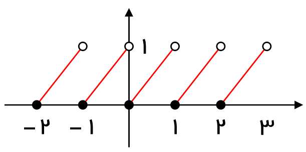
۲۴ ـ گزینه ۱

$[۳x-۲]=-۴\Rightarrow [۳x]-۲=-۴\Rightarrow [۳x]=-۲$

در نتیجه $-۲\leq ۳x<-۱$ پس $\frac{-۲}{۳}\leq x<\frac{-۱}{۳}$ یا بازه‌ی $[-\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳})$ جواب معادله است.

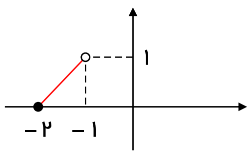
۲۵ ـ گزینه ۴

نمودار تابع $y=x-[x]$ به صورت زیر است واضح است در فاصله‌ی $[-۲,۳)$، ۵ پاره‌خط به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ وجود دارد.



اینگونه توابع به توابع دندان اره‌ای معروف هستند.

توجه:



$طول پاره‌خط=\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۲}$

۲۶ ـ گزینه ۴

$$\begin{cases}\sqrt{x-۱}: x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱(۱)\\ \sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}: ۳-\sqrt{x-۱}\geq ۰\Rightarrow ۳\geq \sqrt{x-۱}\to ۹\geq x-۱\Rightarrow x\leq ۱۰(۲)\end{cases}$$

از اشتراک دو شرط (۱) و (۲) داریم: $۱\leq x\leq ۱۰$، پس $D_f=[۱,۱۰]$

۲۷ ـ گزینه ۲

$g(f(x))=(f(x))^{۲}-۲f(x)=x^{۲}+۱$

$\xrightarrow{\text{به دو طرف یک اضافه می‌کنیم}} f^{۲}(x)-۲f(x)+۱=x^{۲}+۲\Rightarrow (f(x)-۱)^{۲}=x^{۲}+۲$

$\Rightarrow |f(x)-۱|=\sqrt{x^{۲}+۲}\xrightarrow{f(x)>۱} f(x)-۱=\sqrt{x^{۲}+۲}\Rightarrow f(۰)=\sqrt{۲}+۱$ (محور عرض، طولش صفر است)

۲۸ ـ گزینه ۳

اگر $|f(x)|\leq k$ و $k>۰$ باشد، آن‌گاه $-k\leq f(x)\leq k$ است و جواب جزء‌صحیح همواره عددی صحیح است.

$|[x]-۲|\leq ۱\to -۱\leq [x]-۲\leq ۱\to ۱\leq [x]\leq ۳$

$$\to \begin{cases}[x]=۱\to ۱\leq x<۲\\ \text{یا}\\ [x]=۲\to ۲\leq x<۳\\ \text{یا}\\ [x]=۳\to ۳\leq x<۴\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}} ۱\leq x<۴\to x\in[۱,۴)\to a=۱,b=۴\to a+b=۵$$

گزینهٔ ۲) $f(x)=\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱}\rightarrow\begin{cases}۱-x\geq ۰\\ x-۱\geq ۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۱\geq x\\ x\geq ۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x=۱\rightarrow D_f=\{۱\}\rightarrow f(x)=۰$

$$g(x)=\sqrt{۱-x}\times\sqrt{x-۱}\rightarrow\begin{cases}۱-x\geq ۰\\ x-۱\geq ۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۱\geq x\\ x\geq ۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x=۱\rightarrow D_g=\{۱\}\rightarrow g(x)=۰$$

پس $f(x)=g(x)$ است.

گزینهٔ ۳) $f(x)=\sqrt{x^۲-x}\rightarrow x^۲-x\geq ۰\rightarrow x(x-۱)\geq ۰\rightarrow D_f=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)$

$$g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱}\rightarrow\begin{cases}x\geq ۰\\ x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x\geq ۱\rightarrow D_g=[۱,+\infty)$$

$D_f\neq D_g$ در نتیجه داریم: $f(x)\neq g(x)$.

گزینهٔ ۴) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$

اکنون دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{x^۲}=\frac{۱}{x}\ ,\ g(x)=\frac{x^۲}{x^۳}=\frac{۱}{x}$$

پس $f(x)=g(x)$ است.

۳۰ - گزینه ۳ نمودار تابع $y=\dfrac{x-۳}{x}$ محور yها را قطع نمی‌کند، چون شامل هیچ نقطه‌ای با طول صفر نیست.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۱	۱۱ - ۱	۱۶ - ۴	۲۱ - ۱	۲۶ - ۴
۲ - ۴	۷ - ۲	۱۲ - ۴	۱۷ - ۱	۲۲ - ۱	۲۷ - ۲
۳ - ۱	۸ - ۲	۱۳ - ۴	۱۸ - ۴	۲۳ - ۲	۲۸ - ۳
۴ - ۳	۹ - ۴	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۱	۲۹ - ۳
۵ - ۱	۱۰ - ۴	۱۵ - ۲	۲۰ - ۱	۲۵ - ۴	۳۰ - ۳