



علی هاشمی

نمونه سوال: تشابه مثلث ها

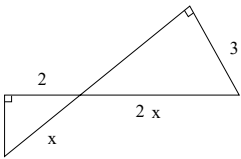
ALIGEBRA.COM: تاریخ آزمون:

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

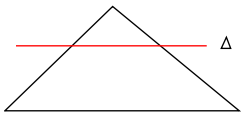
۱- در مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائم $\sqrt{7}$ و ۳، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث تقسیم می کند. مساحت قسمت بزرگ تر چند برابر مساحت قسمت کوچک تر است؟

۲- مثلثی به اضلاع ۳، ۴، a با مثلث دیگری به اضلاع b ، ۵، ۳ متشابه است. مقدار b کدام نمی تواند باشد؟

۳- در شکل زیر، دو زاویه \hat{A} و \hat{B} قائمه اند. مقدار x کدام است؟



۴- در مثلثی خط Δ موازی یک ضلع آن، ضلع دیگر را به دو پاره خط به نسبت ۲ و ۳ تقسیم کرده است. مساحت مثلث حاصل از تقسیم، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟

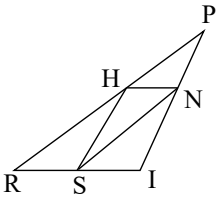




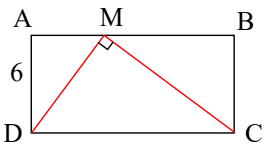
۵- در دو چهار ضلعی متشابه نسبت دو قطر متناظر از آنها برابر $\frac{2}{3}$ است. اگر مساحت چهار ضلعی کوچکتر ۳۶ واحد مربع باشد، مساحت چهار ضلعی بزرگتر کدام است؟

۶- در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{1}{10}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

۷- در شکل زیر نقاط N, S, H به ترتیب وسط اضلاع PI, RI, PR هستند. اگر مساحت مثلث PRI برابر با 12 cm^2 باشد، مساحت مثلث HSN چند سانتی‌متر مربع است؟

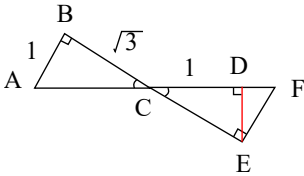


۸- در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ مستطیل و مثلث DMC قائم‌الزاویه و $AD = 6$ می‌باشد. حاصل $AM \times MB$ کدام است؟

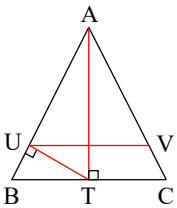




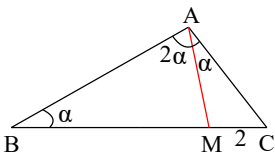
۹- در شکل مقابل $AB \parallel EF$ و زوایای D, E و B قائمه هستند. مساحت مثلث CEF کدام است؟



۱۰- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC = 3, BC = 2\sqrt{3}$) ارتفاع وارد بر BC است. اگر UT عمود به ساق AB و UV موازی قاعده BC باشد، مساحت مثلث AUV چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱۱- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 3\hat{B}$ است. نقطه M به فاصله 2 از رأس C روی ضلع BC طوری قرار گرفته است که AM ، زاویه A را به نسبت 2 به 1 تقسیم می‌کند. اگر $AC = 3$ باشد، BM چقدر است؟

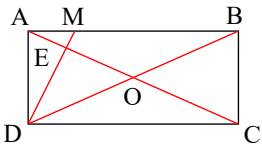


۱۲- در مثلث ABC ، AD ارتفاع وارد بر ضلع BC بوده که ارتفاع وارد بر ضلع AC را در نقطه H قطع می‌کند. اگر $AD = 2DC = 4$ و $BD = 3$ باشد، آن‌گاه طول DH چقدر است؟

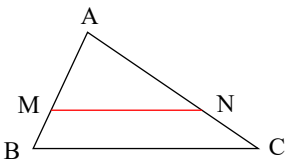


۱۳- در دوزنقه $ABCD$ ، طول‌های دو قاعده‌ی AB و DC به ترتیب ۶ و ۹ واحد است. اگر O نقطه‌ی تلاقی دو قطر و فاصله‌ی نقطه‌ی O از قاعده‌ی بزرگ، ۴ واحد باشد، مساحت دوزنقه، چند واحد مربع است؟

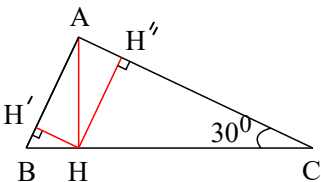
۱۴- در مستطیل $ABCD$ داریم: $۳AB = ۴BC = ۱۲AM = ۲۴$ و خط DM قطر AC را در نقطه‌ی E قطع می‌کند. طول EO چه قدر است؟



۱۵- در شکل زیر، $MN \parallel BC$ و مساحت مثلث AMN با مساحت دوزنقه‌ی $MNCB$ برابر است. نسبت $\frac{AM}{MB}$ برابر است با:

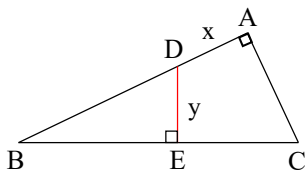


۱۶- در شکل مقابل، AH ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC است. نسبت مساحت مثلث CHH'' به مساحت مثلث BHH' کدام است؟

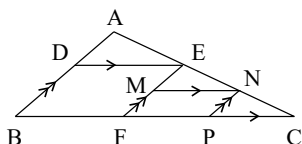




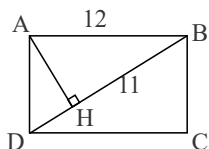
۱۷- در شکل مقابل $AB = 4$ و $AC = 3$ و $BE = 2$. حاصل xy کدام است؟



۱۸- در شکل مقابل $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ است و M وسط EF است. نسبت مساحت متوازی الاضلاع کوچک تر به مساحت مثلث ABC کدام است؟



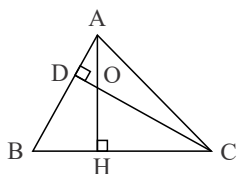
۱۹- اگر مساحت های دو مثلث متشابه را به ترتیب با S_1 و S_2 و محیط های آن ها را به ترتیب با P_1 و P_2 نشان دهیم، کدام رابطه همواره درست است؟



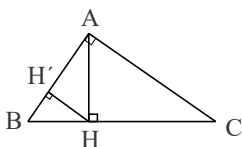
۲۰- در شکل مقابل، $ABCD$ مستطیل است. مساحت مثلث ADH کدام است؟ ($BH = 11$)



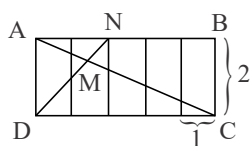
۲۱- در شکل مقابل $OA = OH = \sqrt{۳۳}$ و $CD = ۱۴$ می‌باشد. اندازه ضلع AC کدام است؟



۲۲- در شکل زیر داریم $AC = ۸$ و $AB = ۶$ ، مقدار BH' چقدر است؟

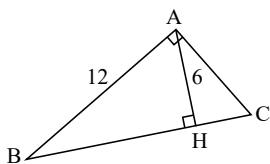


۲۳- در شکل زیر، پنج مستطیل ۱×۲ در کنار یکدیگر مستطیل $ABCD$ را تشکیل داده‌اند. اندازه پاره خط MN چند



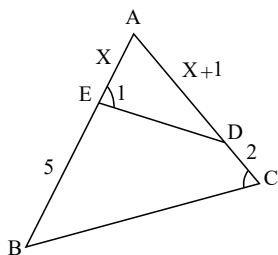
برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۷}$ است؟

۲۴- در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، طول ضلع AC کدام است؟

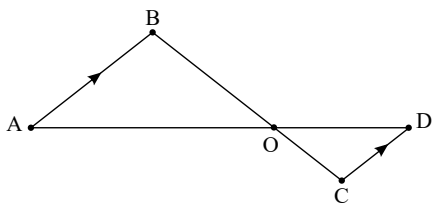




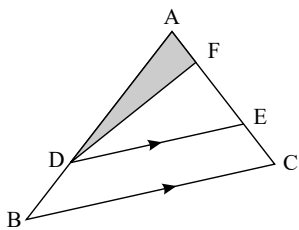
۲۵- اگر در شکل زیر $\hat{E}_1 = \hat{C}$ باشد، مساحت چهارضلعی $EDCB$ چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۲۶- نسبت مساحت مثلث AOB به COD ، برابر $\frac{9}{4}$ است. اگر $AD = 15$ باشد، چه قدر است OD ؟

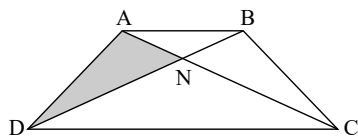


۲۷- اگر در دوزنقه $DECB$ شکل زیر، نسبت قاعده‌ها $\frac{3}{4}$ باشد و $\frac{EF}{AF} = 2$ ، نسبت مساحت مثلث هاشورخورده به مساحت دوزنقه کدام است؟

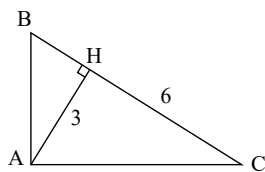




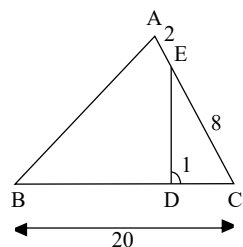
۲۸- اگر در دوزنقه $ABCD$ شکل زیر، $DC = \frac{3}{2}AB$ باشد، مساحت ناحیه هاشور خورده چند درصد مساحت دوزنقه است؟



۲۹- در شکل زیر مساحت مثلث قائم الزاویه ABC چقدر است؟



۳۰- کوچک ترین ضلع مثلث قائم الزاویه ای که اندازه ارتفاع و میانه وارد بر وتر در آن به ترتیب $2\sqrt{2}$ و ۳ واحد می باشد، کدام است؟

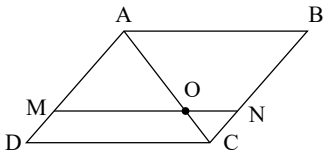


۳۱- در شکل مقابل، $\hat{A} = \hat{D}_1$ است. طول BD چند واحد است؟

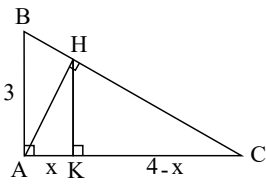


۳۲- در یک مثلث قائم الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر ۲۴ و نسبت دو پاره خطی که ارتفاع، بر روی وتر ایجاد کرده است، $\frac{9}{16}$ می باشد. طول ضلع کوچک این مثلث کدام است؟

۳۳- در شکل زیر، مساحت مثلث ONC ، ۲۵ درصد مساحت مثلث OAM است، حاصل $\frac{AM}{AD}$ کدام است؟ (متوازی الاضلاع $ABCD$ و $AB \parallel MN$) است.



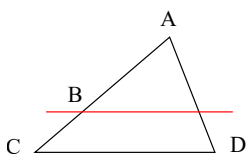
۳۴- در شکل روبه رو، اندازه x کدام است؟



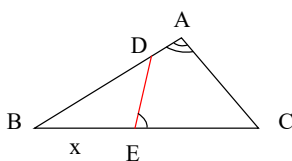
۳۵- محیط دو چهارضلعی متشابه ۲۸ و ۳۵ واحد است. اگر مساحت چهارضلعی کوچکتر ۳۲ واحد مربع باشد، مساحت چهارضلعی بزرگتر کدام است؟



۳۶- در شکل مقابل $AB = \frac{3}{2}BC$ است و دو خط موازی اند. مساحت مثلث کوچکتر چند درصد مساحت مثلث بزرگتر است؟

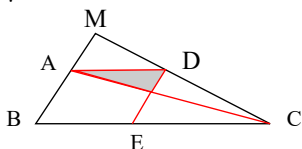


۳۷- در شکل دو زاویه E و A مکمل یکدیگرند. اگر $AB = 12$ و $AD = 4$ و $EC = 10$ باشد، اندازه‌ی BE کدام است؟



۳۸- در مثلث ABC ، $AB = 8$ ، $AC = 10$ و $BC = 15$ ، این مثلث و مثلث DEF متشابهند. اگر $\frac{\text{مساحت } \triangle ABC}{\text{مساحت } \triangle DEF} = \frac{9}{4}$ ؛ آنگاه محیط مثلث DEF چند واحد است؟

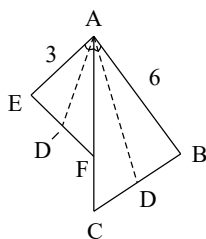
۳۹- در شکل زیر $ABED$ یک متوازی‌الاضلاع است. اگر $AD = 6$ و $EC = 8$ آنگاه نسبت مساحت مثلث سایه زده به مساحت مثلث ABC کدام است؟





۴۰- طول اضلاع یک مثلث ۵، ۷ و ۹ سانتی متر و طول کوچک ترین ضلع مثلثی متشابه با این مثلث، ۱۰ سانتی متر می باشد. محیط مثلث دوم کدام است؟

۴۱- در شکل روبه رو AC نیمساز زاویه \widehat{BAE} ، $AC = ۸$ و $AF = ۴$ است. اگر $AD = ۴m + ۴$ و $AD' = m + ۳$ نیمسازهای دو زاویه \widehat{BAE} و \widehat{BAC} باشند، مقدار m' کدام است؟

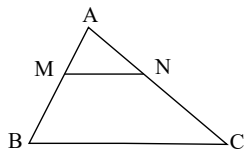


۴۲- در مثلث قائم الزامی ABC که $\widehat{A} = 90^\circ$ و $AB = ۰٫۶AC$ ، ارتفاع AH را رسم کرده ایم. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AHC است؟

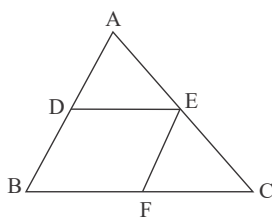
۴۳- محیط مثلث ABC برابر ۳۶ و اضلاع $\triangle A'B'C'$ که با $\triangle ABC$ متشابه است، ۳، ۷ و ۸ است. نسبت مساحت دو مثلث کدام است؟



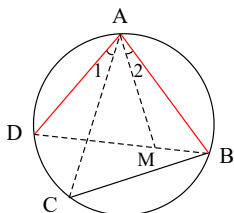
۴۴- در مثلث ABC ، پاره خط MN موازی ضلع BC طوری رسم شده است که مساحت ذوزنقه‌ی $MNCB$ ، چهار برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت دو قاعده‌ی ذوزنقه کدام است؟



۴۵- در شکل زیر مساحت متوازی‌الاضلاع $BDEF$ ، ۴۸ درصد مساحت مثلث ABC است. حاصل $\frac{AD}{DB}$ کدام می‌تواند باشد؟



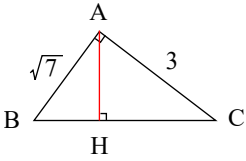
۴۶- در شکل مقابل $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، حاصل $AD \cdot BC$ برابر کدام است؟





پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ ارتفاع وارد بر وتر همواره در مثلث قائم الزاویه، دو مثلث قائم الزاویه‌ی دیگر ایجاد می‌کند که با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



$$ACH \sim ABH$$

$$(نسبت تشابه) k = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABH}} = k^2 = \frac{9}{7}$$

نکته: اگر نسبت دو جزء طولی متناظر دو مثلث متشابه، k باشد، نسبت مساحت‌هایشان k^2 است.

۲ - گزینه ۳ تناسب اضلاع به صورت‌های مختلفی می‌تواند برقرار شود، چون در مثلث اول نسبت دو ضلع $\frac{3}{4}$ است، در مثلث دوم هم باید باشد:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{b} \Rightarrow b = 4$$

$$\frac{3}{4} = \frac{5}{b} \Rightarrow b = \frac{20}{3}$$

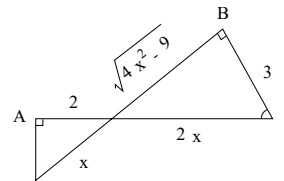
$$\frac{3}{4} = \frac{3}{b} \Rightarrow b = \frac{9}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{5}{b} \Rightarrow b = \frac{15}{4}$$

۳ - گزینه ۲ دو مثلث قائم الزاویه در شکل دارای دو زاویه مساوی هستند پس متشابه‌اند.

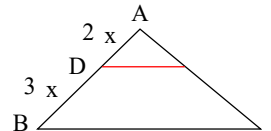
$$\frac{2}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$4 = \sqrt{4x^2 - 9} \Rightarrow 4x^2 - 9 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$



۴ - گزینه ۴ مثلث حاصل با مثلث اولیه متشابه است و نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت اضلاع است، پس نسبت اضلاع را تعیین می‌کنیم.

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AD}{AB} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$



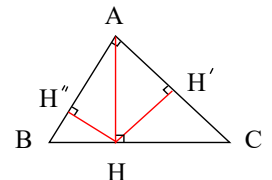
پس نسبت مساحت‌ها $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = \frac{16}{100}$ پس ۱۶ درصد درست می‌باشد.

۵ - گزینه ۱ در دو چهار ضلعی متشابه نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت اضلاع است.

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{36}{S} = \frac{4}{9} \Rightarrow S = 81$$

۶ - گزینه ۱ هر دو مثلث کوچک‌تر با مثلث قائم الزاویه‌ی اصلی متشابه‌اند.

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{9}{10} \frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{1}{9} = K^2 \Rightarrow K = \frac{1}{3}$$



نسبت فاصله‌ی H از دو ضلع قائم، در واقع نسبت ارتفاع‌های این دو مثلث متشابه است و می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت هر دو جزء طولی متناظر همان نسبت متشابه است.

۷ - گزینه ۴ اگر وسط اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، مثلثی متشابه با مثلث بزرگتر به دست می‌آید که نسبت تشابه آنها $K = \frac{1}{2}$ است.

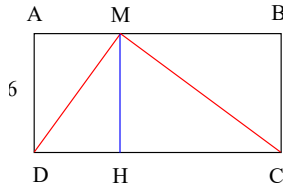
در دو مثلث متشابه با نسبت تشابه K ، نسبت بین مساحت‌ها K^2 (مربع نسبت تشابه) است.

$$K = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S}{S'} = K^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{HSN}}{S_{PRI}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{HSN}}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{HSN} = 3 \text{ cm}^2$$



۸ - گزینه ۱

ارتفاع MH در مثلث قائم الزاویه DMC را رسم می کنیم. بنابر رابطه ی طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:



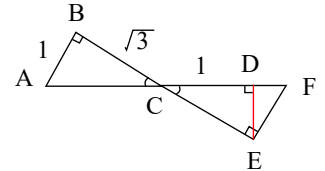
$$MH^2 = DH \times CH \Rightarrow 6^2 = AM \times MB \Rightarrow AM \times MB = 36$$

۹ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} \triangle ABC: 1^2 + (\sqrt{3})^2 &= AC^2 \Rightarrow AC = 2 \\ \triangle ABC \sim \triangle CDE &\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} \\ \Rightarrow \frac{1}{DE} = \frac{2}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{1} &\Rightarrow CE = \frac{2}{\sqrt{3}}, DE = \frac{1}{\sqrt{3}} (*) \end{aligned}$$

$$\triangle CEF: CE^2 = CD \cdot CF \xrightarrow{(*)} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \times CF \Rightarrow CF = \frac{4}{3}$$

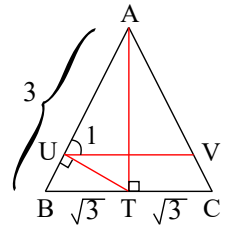
$$S_{CEF} = \frac{1}{2} DE \times CF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$



۱۰ - گزینه ۱

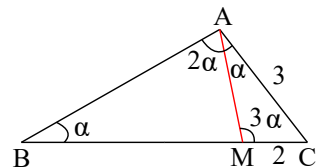
بنابر رابطه طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\begin{aligned} \triangle ABT: BT^2 &= BU \cdot BA \Rightarrow BU = \frac{(\sqrt{3})^2}{3} = 1 \\ \Rightarrow AU &= AB - BU = 3 - 1 = 2 \\ \begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{U}_1 = \hat{B} \\ UV \parallel BC \end{cases} &\xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \triangle AUV \sim \triangle ABC \\ \Rightarrow \frac{S_{AUV}}{S_{ABC}} &= \left(\frac{AU}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$



۱۱ - گزینه ۱ مطابق شکل، \hat{AMC} زاویه ی خارجی مثلث ABM است و در نتیجه:

$$\hat{AMC} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$$

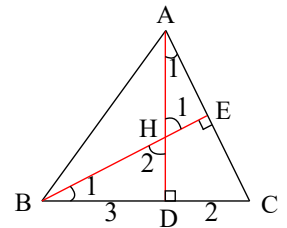


دو مثلث ABC و AMC به حالت تساوی دو زاویه متشابه اند و داریم:

$$\frac{MC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{3}{BM+2} \Rightarrow BM = 2,5$$

۱۲ - گزینه ۳ باتوجه به شکل مقابل مثلث های ADC و BDH متشابهند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{AHE}: \hat{A}_1 + \hat{H}_1 = 90^\circ \\ \hat{ADC} = \hat{A}_1 + \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{C} \quad (1)$$



از آن جایی که \hat{H}_1 و \hat{H}_2 متقابل به رأس می باشند، از (۱) داریم، $\hat{H}_2 = \hat{C}$ و همچنین زاویه ی D در این دو مثلث برابر 90° است، لذا باتوجه به رابطه ی نسبت تشابه در این دو مثلث داریم:

$$\frac{DC}{DH} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BH} \Rightarrow \frac{2}{DH} = \frac{4}{3} \Rightarrow DH = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

۱۳ - گزینه ۴ دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی زاویه ها متشابه اند و نسبت دو ارتفاع متناظر با نسبت تشابه برابر است.

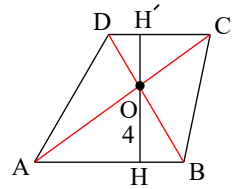
تشابه مثلث ها



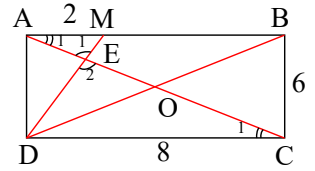
$$\frac{OH'}{OH} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{OH'}{4} = \frac{6}{9} \Rightarrow OH' = \frac{8}{3}$$

$$\text{ارتفاع دوزنقه } h = HH' = OH + OH' = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\text{مساحت دوزنقه } S = \frac{1}{2}(AB + DC) \times h = \frac{1}{2}(9 + 6) \times \frac{20}{3} = 50$$



۱۴ - گزینه ۱



$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \rightarrow AC = 10, AO = OC = 5$$

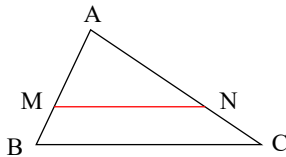
$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DC, AC = \text{مورب} \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ (\text{متقابل به رأس}) \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \end{array} \right\} \rightarrow \triangle AME \sim \triangle EDC$$

$$\rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{2}{8} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{2}{8} = \frac{AO - EO}{OC + EO} \rightarrow \frac{2}{8} = \frac{5 - EO}{5 + EO}$$

$$\rightarrow 10 + 2EO = 40 - 8EO \rightarrow 10EO = 30 \rightarrow EO = 3$$

۱۵ - گزینه ۱

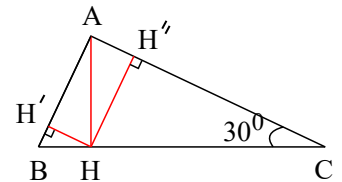
دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$ در نتیجه:



$$\left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

۱۶ - گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویه BHH' و CHH'' طبق حالت تساوی زاویه‌ها متشابه‌اند. پس اگر مساحت‌های آن‌ها را به ترتیب با s_1 و s_2 نشان دهیم، آنگاه:

$$\frac{s_2}{s_1} = \left(\frac{CH}{BH}\right)^2 \quad (1)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} AC^2 = CH \times BC \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{CH}{BH} \\ AB^2 = BH \times BC \end{array} \right. \quad (2)$$

از طرفی داریم:

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \xrightarrow{\substack{\hat{A}=90^\circ \\ \hat{C}=30^\circ}} = (\sqrt{3})^2 = 9$$

تذکر: در مثلث ABC ، ضلع AB برابر $\frac{1}{2}$ وتر و ضلع AC برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

۱۷ - گزینه ۴

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DEB \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{4-x}{5} = \frac{2}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ 8 - 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$x \cdot y = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2,25$$

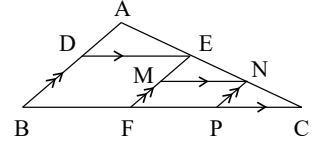
۱۸ - گزینه ۱ چون $BDEF$ و $MNPF$ متوازی‌الاضلاع‌ند، لذا $DE \parallel BC$ و $AB \parallel FE \parallel NP$.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{FB} = \frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$$

$$MN \parallel FC \Rightarrow \frac{EM}{EF} = \frac{EN}{EC} = \frac{MN}{FC} = \frac{1}{2}$$



از طرفی $MN = FP$ لذا $MN = PC$. بنابراین N و P به ترتیب وسط CE و CF هستند. لذا مساحت مثلث‌های $NP C$ (اگر از رأس C به مثلث CEF نگاه کنیم) و $MN E$ (اگر از رأس E نگاه کنیم) هر کدام $\frac{1}{4}$ مساحت $EF C$ است. لذا مساحت $MNPF$ نصف مساحت $EF C$ است.

نسبت تشابه $CE F$ به ABC نیز 3 به 5 است. لذا نسبت مساحت‌های آن‌ها 9 به 25 است.

$$S_{MNPF} = \frac{1}{2} S_{EFC} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{25} S_{ABC} = \frac{9}{50} S_{ABC}$$

۱۹ - گزینه ۴ اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد نسبت محیط‌های آن‌ها هم k و نسبت مساحت‌ها k^2 خواهد بود.

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_1}{P_2} = k \\ \frac{S_1}{S_2} = k^2 \end{aligned} \right\} \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{P_1^2}{P_2^2} \Rightarrow S_1 P_2^2 = S_2 \cdot P_1^2$$

۲۰ - گزینه ۱ با توجه به تشابه، در مثلث قائم‌الزاویه می‌توان اثبات کرد مربع هر ضلع زاویه قائمه برابر است با تصویر ضلع روی وتر در اندازه وتر. پس می‌توان نوشت:

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow (12)^2 = 11(11 + DH) \Rightarrow 144 = 121 + 11DH$$

$$DH = \frac{144 - 121}{11} = \frac{23}{11}$$

از طرفی ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین قطعات ایجاد شده روی وتر. لذا می‌توان نوشت:

$$AH^2 = DH \times BH$$

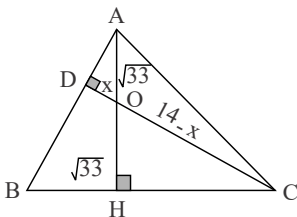
$$AH^2 = \frac{23}{11} \times 11 \Rightarrow AH = \sqrt{23}$$

$$S_{\Delta ADH} = \frac{1}{2} DH \times AH = \frac{1}{2} \times \frac{23}{11} \times \sqrt{23} = \frac{23\sqrt{23}}{22}$$

۲۱ - گزینه ۱

$$\begin{cases} \hat{C}OH = \hat{A}OD \Rightarrow O\hat{A}D \sim O\hat{C}H \\ \hat{H} = \hat{D} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{14-x} \Rightarrow 14x - x^2 = 33$$

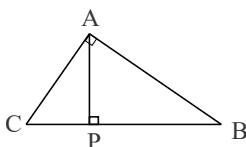
$$\Rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{قق } x=3 \\ \text{غقق } x=11 \end{cases}$$



توجه کنید چون در مثلث OAD ، OA وتر است، پس $OD = x$ باید کمتر از $\sqrt{33}$ باشد.

$$\Delta OAD: AD^2 = OA^2 - OD^2 = 33 - 9 = 24$$

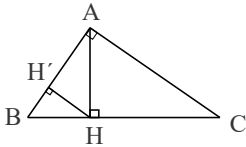
$$\Delta ADC: AC^2 = AD^2 + CD^2 = 24 + 196 = 220 \Rightarrow AC = 2\sqrt{55}$$



۲۲ - گزینه ۴ نکته: در مثلث قائم‌الزاویه زیر، اگر ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:

$$\begin{aligned} AC^2 &= PC \times BC & BC^2 &= AC^2 + AB^2 \\ AB^2 &= PB \times BC & AB \times AC &= AP \times BC \\ AP^2 &= PC \times PB \end{aligned}$$

تشابه مثلث‌ها



با استفاده از نکته بالا، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 36 = BH \times 10 \Rightarrow \boxed{BH = 3,6}$$

حال با استفاده از نکته بالا، در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

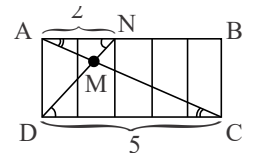
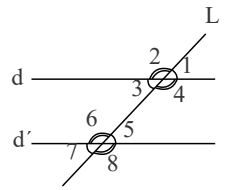
$$BH^2 = BH' \times AB \Rightarrow (3,6)^2 = BH' \times 6 \Rightarrow BH' = \frac{(3,6)^2}{6} = \frac{3,6 \times 3,6}{6} = 0,6 \times 3,6 \Rightarrow \boxed{BH' = 2,16}$$

۲۳ - گزینه ۴ نکته: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشد، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند.

نکته: اگر دو مثلث متشابه باشند، آنگاه اضلاع متناظر آن‌ها متناسب هستند.

نکته (قضیه خطوط موازی و مورب): اگر خط L دو خط موازی d و d' را قطع کند، روی آن‌ها هشت زاویه ایجاد می‌شود که چهار به چهار با هم برابرند.

$$\hat{1} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7} \quad \hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8}$$



$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{مورب } DN} \hat{N} = \hat{D}$$

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A} = \hat{C}$$

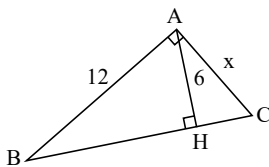
بنابراین $\triangle AMN$ و $\triangle CMD$ بنا به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند. اکنون تناسب اضلاع متناظر آن‌ها را می‌نویسیم.

$$\frac{AN}{DC} = \frac{MN}{DM} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{MN}{DM} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{2}{5+2} = \frac{MN}{MN+DM} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{MN}{DN}$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورس داریم: $DN = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. با جایگذاری مقدار DN در تناسب بالا داریم:

$$\frac{2}{7} = \frac{MN}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{MN = \frac{4\sqrt{2}}{7}}$$

۲۴ - گزینه ۱ طول ضلع AC را x فرض می‌کنیم و داریم:



$$\triangle ABH \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} \rightarrow \frac{12}{BC} = \frac{6}{x} \rightarrow BC = 2x$$

$$\triangle ABC: AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow 12^2 + x^2 = (2x)^2 \rightarrow 144 + x^2 = 4x^2 \rightarrow 144 = 3x^2$$

$$\rightarrow x^2 = 48 \rightarrow x = \sqrt{48} \rightarrow \boxed{x = 4\sqrt{3}}$$

۲۵ - گزینه ۳

$$\left. \begin{matrix} \hat{E}_1 = \hat{C} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{matrix} \right\} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \rightarrow \frac{x+5}{x+1} = \frac{x+3}{x}$$

$$\rightarrow x(x+5) = (x+1)(x+3) \rightarrow \cancel{x^2} + 5x = \cancel{x^2} + 4x + 3 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$\rightarrow \text{نسبت تشابه } k = \frac{x+3}{x} = 2 \rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = k^2 = 4 \rightarrow S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle ADE} \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{S_{EDCB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} \stackrel{(1)}{=} \frac{4S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ADE}}{4S_{\triangle ADE}} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COD}} = \frac{9}{4} = k^2 \rightarrow k = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{AO}{OD} = \frac{3}{2} \\ AD = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2AO = 3OD \\ AO + OD = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3OD - 2AO = 0 \\ 2AO + 3OD = 30 \end{cases} +$$

$$\Delta OD = 30 \rightarrow \boxed{OD = 6}$$

$$DE \parallel BC, \frac{DE}{BC} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE}} = \frac{9}{16 - 9} \rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DECB}} = \frac{9}{7} \quad (1)$$

$$\frac{EF}{AF} = 2 \rightarrow \frac{EF + AF}{AF} = \frac{2 + 1}{1} \rightarrow \frac{AE}{AF} = 3 \rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = 3 \rightarrow \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DECB}} \times \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{9}{7} \times \frac{1}{3} \rightarrow \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle DECB}} = \frac{3}{7}$$

$$\triangle ABN \sim \triangle DCN \rightarrow \frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle DCN}} = \left(\frac{AB}{DC}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

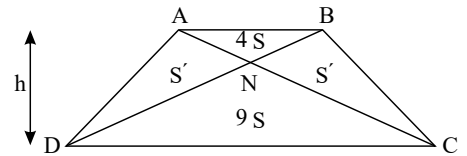
$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times h}{\frac{1}{2}DC \times h} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \frac{4S + S'}{9S + S'} = \frac{2}{3} \rightarrow 12S + 3S' = 18S + 2S'$$

$$\rightarrow 6S - S' = 0 \rightarrow \boxed{S' = 6S}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle AND}}{S_{\triangle ABCD}} = \frac{S'}{4S + 9S + 2S'} = \frac{6S}{13S + 12S} = \frac{6}{25} = \frac{24}{100} = \%24$$

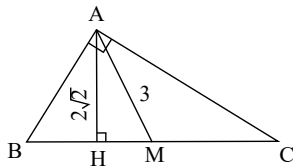
و مساحت دو مثلث $\triangle BCN$ و $\triangle AND$ هم با هم برابر است و داریم:



$$BH \cdot HC = AH^2 \rightarrow BH \times 6 = 3^2 \rightarrow \boxed{BH = 1,5}$$

$$\rightarrow BC = BH + HC = 1,5 + 6 \rightarrow \boxed{BC = 7,5}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{3 \times 7,5}{2} = \frac{22,5}{2} = 11,25$$



میقاته وارد بر وتر
نصف وتر است.

$$AM = 3 \rightarrow BC = 6$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \rightarrow (2\sqrt{2})^2 = BH \cdot CH \rightarrow BH \cdot CH = 8 \quad (1)$$

$$BC = BH + CH \rightarrow 6 = BH + CH \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow BH(6 - BH) = 8 \rightarrow 6BH - BH^2 = 8 \rightarrow BH^2 - 6BH + 8 = 0$$



$$\rightarrow (BH - 2)(BH - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} BH = 2 \rightarrow AB^2 = BH^2 + AH^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4 + 8 = 12 \\ BH = 4 \text{ (غیر قابل قبول)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{AB = 2\sqrt{3}}$$

۳۱ - گزینه ۴

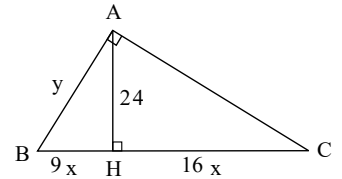
$$\left. \begin{matrix} \hat{A} = \hat{D}_1 \\ \hat{C} = \hat{C} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{به حالت دو زاویه}} \triangle ABC \sim \triangle DEC \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} \Rightarrow \frac{10}{DC} = \frac{20}{8} \Rightarrow DC = 4$$

$$\rightarrow BD = BC - DC = 20 - 4 \rightarrow BD = 16$$

۳۲ - گزینه ۲

$$\frac{BH}{CH} = \frac{9}{16} \rightarrow BH = 9x, CH = 16x$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \rightarrow 24^2 = 9x \cdot 16x$$



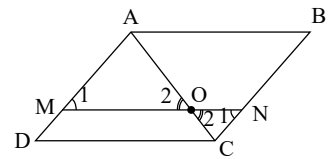
$$\rightarrow x^2 = \frac{24 \times 24}{16 \times 9} = 4 \rightarrow x = 2, \quad BH = 9x \stackrel{x=2}{=} 9 \times 2 \rightarrow BH = 18$$

$$\rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 \rightarrow y^2 = 24^2 + 18^2 \rightarrow y^2 = (4 \times 6)^2 + (3 \times 6)^2$$

$$\rightarrow y = 5 \times 6 \rightarrow y = 30$$

$$\left. \begin{matrix} AD \parallel BC \\ MN = \text{مورب} \end{matrix} \right\} \rightarrow \hat{N}_1 = \hat{M}_1$$

۳۳ - گزینه ۱



$$\left. \begin{matrix} \hat{N}_1 = \hat{M}_1 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \triangle OAM \sim \triangle ONC \rightarrow \frac{NC}{AM} = k \rightarrow \frac{S_{\triangle ONC}}{S_{\triangle OAM}} = k^2 = \frac{25}{100}$$

$$\rightarrow k^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{NC}{AM} = \frac{1}{2}, \quad NC = MD \rightarrow \frac{MD}{AM} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{AM + MD}{AM} = \frac{2+1}{2}$$

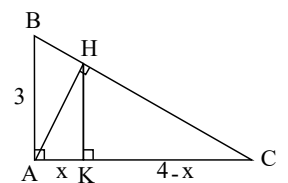
$$\rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\frac{AM}{AD} = \frac{2}{3}}$$

۳۴ - گزینه ۲

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow 3^2 + 4^2 = BC^2 \rightarrow \boxed{BC = 5}$$

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \rightarrow 3 \times 4 = AH \times 5 \rightarrow \boxed{AH = 2.4}$$

$$\triangle AHC: AH^2 = AK \cdot AC \rightarrow (2.4)^2 = x \times 4 \rightarrow \boxed{x = 1.44}$$



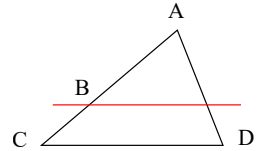
۳۵ - گزینه ۲ در دو شکل متشابه نسبت مساحتها برابر با مربع نسبت محیطها است. داریم:

$$\frac{S}{32} = \left(\frac{35}{28}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{32} = \frac{25}{16} \Rightarrow S = 50$$



۳۶ - گزینه ۱

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{3}{3+2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$



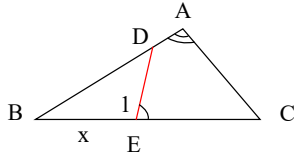
نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت اضلاع است پس نسبت مساحت‌ها برابر $\frac{9}{25}$ یا مساحت مثلث کوچکتر ۳۶ درصد مساحت مثلث بزرگتر است.

۳۷ - گزینه ۲

دو زاویه A و E_1 یک مکمل دارند پس برابرند دو مثلث مفروض در حالت متساوی زاویه‌ها متشابه‌اند.

$$\frac{DB}{BC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{AB-AD}{BE+EC} = \frac{BE}{AB}$$

$$\text{اگر } BE = X \text{ باشد داریم } \frac{8}{x+10} = \frac{x}{12} \text{ یا } x^2 + 10x - 96 = 0 \text{ در نتیجه } x = 6$$



۳۸ - گزینه ۲ در دو مثلث متشابه، نسبت طول محیط‌ها با نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها با توان دوم نسبت تشابه برابر است. فرض می‌کنیم AB متناظر DE است.

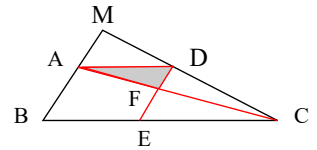
$$\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{4} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{3}{2} \text{ نسبت تشابه}$$

$$\frac{\text{محیط } \triangle ABC}{\text{محیط } \triangle DEF} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{8+10+15}{\text{محیط } \triangle DEF} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{33}{\text{محیط } \triangle DEF} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{محیط } \triangle DEF = 22$$

۳۹ - گزینه ۴ دو مثلث AFD و FEC متشابه‌اند. داریم:

$$K_1 = \frac{EC}{AD} \Rightarrow k_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{S_{\triangle FEC}}{S_{\triangle AFD}} = k_1^2 = \frac{16}{9} (*)$$



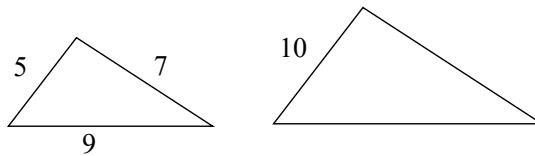
دو مثلث ABC و FEC هم متشابه‌اند. پس خواهیم داشت:

$$k_2 = \frac{EC}{BC} \Rightarrow k_2 = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{S_{\triangle FEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{16}{49} (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{16}{49} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{49}$$

۴۰ - گزینه ۴ نکته: نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه، با نسبت تشابه آن‌ها برابر است.

طبق نکته‌ی فوق داریم:



$$\frac{\text{محیط دومی}}{\text{محیط اولی}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \text{محیط دومی} = 2 \times (5 + 7 + 9) = 42$$

۴۱ - گزینه ۳ دو مثلث ABC و EAF در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین این دو ضلع متشابه‌اند، زیرا $\widehat{EAF} = \widehat{BAC}$ است و داریم:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{AE}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

در دو مثلث متشابه، نسبت طول‌های دو جزء فرعی متناظر، مساوی نسبت تشابه است.

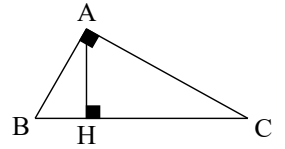
$$\frac{AD'}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m+3}{6m+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۴۲ - گزینه ۴ مثلث‌های ABC ، ABH و AHC همگی متشابه هستند و نسبت تشابه مثلث AHC و AHB برابر $\frac{5}{3}$ است. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با

$$\frac{S_{AHC}}{S_{AHB}} = \frac{25}{9} \text{ اگر فرض کنیم، } S_{AHB} = 9x, S_{AHC} = 25x \text{ و } S_{ABC} = 34x \text{ آنگاه } S_{AHC} = 25x \text{ پس:}$$



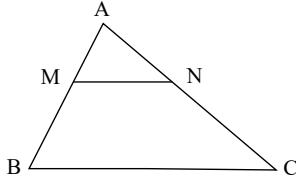
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AHC}} = \frac{34x}{25x} = \frac{34}{25}$$



۴۳ - گزینه ۲ نکته: اگر دو مثلث با نسبت k متشابه باشند، آن گاه نسبت محیط های آن ها برابر k و نسبت مساحت های آن ها برابر k^2 است.

$$A'B'C' \text{ محیط} = 3 + 7 + 8 = 18 \Rightarrow \text{نسبت تشابه} : k = \frac{36}{18} = 2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = k^2 = 2^2 = 4$$

۴۴ - گزینه ۴



$$S_{MNCB} = 4S_{\Delta AMN} \Rightarrow S_{MNCB} + S_{\Delta AMN} = 5S_{\Delta AMN} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 5S_{\Delta AMN}$$

چون دو مثلث ABC و AMN متشابه اند (زیرا $MN \parallel BC$). پس نسبت مساحت های آن ها برابر مجذور نسبت تشابه است. بنابراین:

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

۴۵ - گزینه ۲

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{CE} = k \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{1}{k} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{CE}{AC} = \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{k^2}{(k+1)^2}$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{CE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\text{(فرض)} \frac{S_{BDEF}}{S_{ABC}} = \frac{48}{100} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE} - S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{48}{100} \Rightarrow 1 - \frac{k^2}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{48}{100}$$

$$\frac{k^2 + 1}{k^2 + 2k + 1} = 1 - \frac{48}{100} = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$$

$$\Rightarrow 25k^2 + 25 = 13k^2 + 26k + 13$$

$$\Rightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Rightarrow 6k^2 - 13k + 6 = 0$$

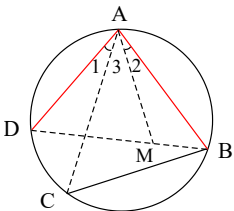
$$\Rightarrow (3k - 2)(2k - 3) = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \text{ یا } k = \frac{3}{2}$$

هر دو جواب قبول هستند و باتوجه به گزینه ها $k = \frac{2}{3}$ جواب است.

۴۶ - گزینه ۱

$$\widehat{CAB} = \widehat{MAD}, \text{ پس } \widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$$

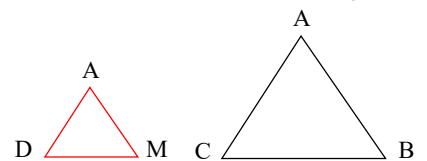
هم چنین:



$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \widehat{ADM}$$

بنابراین، دو مثلث ADM و ACB بنابر سه زاویه با هم متشابه اند. در نتیجه:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{DM}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DM$$



تشابه مثلث ها

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۸ - ۱	۱۵ - ۱	۲۲ - ۴	۲۹ - ۲	۳۶ - ۱	۴۳ - ۲
۲ - ۳	۹ - ۲	۱۶ - ۴	۲۳ - ۴	۳۰ - ۲	۳۷ - ۲	۴۴ - ۴
۳ - ۲	۱۰ - ۱	۱۷ - ۴	۲۴ - ۱	۳۱ - ۴	۳۸ - ۲	۴۵ - ۲
۴ - ۴	۱۱ - ۱	۱۸ - ۱	۲۵ - ۳	۳۲ - ۲	۳۹ - ۴	۴۶ - ۱
۵ - ۱	۱۲ - ۳	۱۹ - ۴	۲۶ - ۲	۳۳ - ۱	۴۰ - ۴	
۶ - ۱	۱۳ - ۴	۲۰ - ۱	۲۷ - ۱	۳۴ - ۲	۴۱ - ۳	
۷ - ۴	۱۴ - ۱	۲۱ - ۱	۲۸ - ۴	۳۵ - ۲	۴۲ - ۴	