



علی هاشمی

نمونه سوال: قضیه تالس

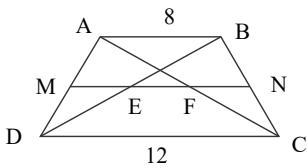
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- واسطه‌ی هندسی بین دو عدد  $۲ \times ۵^۳ \times ۱۱^۲$  و  $۲^۳ \times ۵ \times ۷^۲$  کدام عدد است؟

۲- واسطه‌ی هندسی اعداد  $\sqrt{۳}$  و  $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$  کدام عدد است؟

۳- در شکل زیر،  $ABCD$  دوزنقه و  $M$  و  $N$  وسط دو ساق است. طول  $EF$  کدام است؟

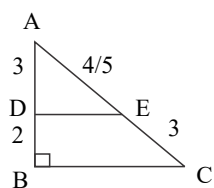


۴- اگر  $\frac{۲m + n}{۳m - n} = \frac{۳}{۲}$  باشد، آنگاه نسبت  $n$  به  $m$  کدام است؟

۵- اندازه دو قاعده یک دوزنقه ۸ و ۱۲ واحد و ارتفاع دوزنقه ۱۵ واحد است. فاصله محل تلاقی قطرها از قاعده بزرگ دوزنقه کدام است؟

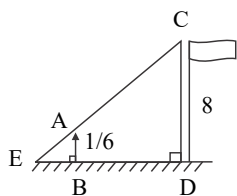


۶- می‌خواهیم با برهان خلف ثابت کنیم که اگر  $n$  عضو اعداد طبیعی باشد و  $n^2$  عددی فرد باشد، آن‌گاه  $n$  نیز عددی فرد است، در این صورت کدام گزینه برای اثبات این مطلب با برهان خلف صحیح است؟

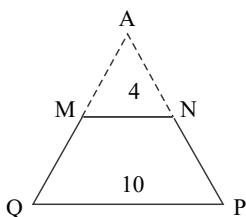


۷- در شکل مقابل، مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه است. طول پاره‌خط  $DE$  کدام است؟

۸- در شکل زیر پاره‌خط  $AB$  شخصی است که در فاصله ۴ متری از پای پرچمی به ارتفاع ۸ متر ایستاده است. اگر اندازه قد شخص  $1/6$  متر باشد، طول کابل  $EC$  چند متر است؟

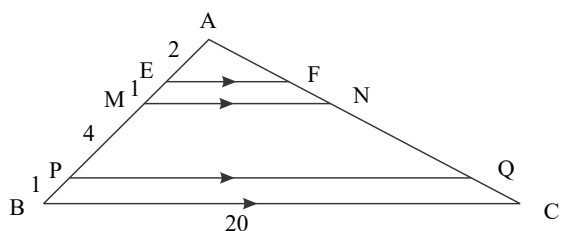


۹- در شکل زیر محیط دوزنقه  $MNPQ$  برابر ۲۳ است. امتداد ساق‌های این دوزنقه در  $A$  متقاطع‌اند. محیط مثلث  $AMN$  کدام است؟





۱۰- در مربع  $ABCD$  ضلع  $CD$  را از طرف  $C$  به اندازه ضلع مربع تا نقطه  $E$  امتداد می‌دهیم، به طوری که  $AE$  ضلع  $BC$  را در  $F$  قطع کند. مساحت چهار ضلعی  $AFCD$  چند برابر مساحت مربع است؟



۱۱- در شکل مقابل، حاصل  $EF + MN + PQ$  کدام است؟



## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ اگر  $C$  واسطه‌ی هندسی بین دو عدد  $a, b$  باشد خواهیم داشت:

$$C = \sqrt{ab} = \sqrt{2^2 \times 5 \times 7^2 \times 2 \times 5^2 \times 11^2} = \sqrt{2^4 \times 7^2 \times 5^3 \times 11^2} \Rightarrow C = 2^2 \times 7 \times 5^2 \times 11 = 7700$$

۲ - گزینه ۱ اگر  $c$  واسطه‌ی هندسی  $a$  و  $b$  باشد، داریم:

$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳ - گزینه ۱ با توجه به اینکه  $M$  و  $N$  وسط دو ساق قرار گرفته می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = 1 \rightarrow MN \parallel AB \parallel DC$$

$$ME \parallel AB \xrightarrow{\triangle ADB} \frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{2} \rightarrow ME = \frac{1}{2} AB = 4$$

$$MF \parallel DC \xrightarrow{\triangle DAC} \frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow MF = \frac{1}{2} DC = 6$$

$$EF = MF - ME = 6 - 4 = 2$$

۴ - گزینه ۳

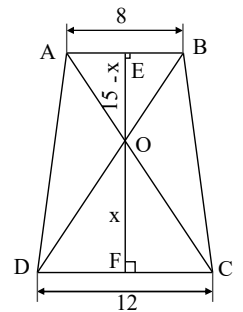
$$\frac{2m + n}{3m - n} = \frac{3}{2} \rightarrow 4m + 2n = 9m - 3n \rightarrow 5n = 5m \rightarrow \frac{n}{m} = 1$$

۵ - گزینه ۱

$$AB = 8, CD = 12, EF = 15 \rightarrow OF = ?$$

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{OE}{OF} \rightarrow \frac{8}{12} = \frac{15 - x}{x}$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} = \frac{15 - x}{x} \rightarrow 2x = 45 - 3x \rightarrow 5x = 45 \rightarrow x = 9$$



۶ - گزینه ۳ برای اثبات با برهان باید حکم را غلط (نادرست) در نظر بگیریم.

پس فرض می‌کنیم  $n$  یک عدد زوج می‌باشد و  $n = 2k$  و  $n = 2k$  و  $n^2 = 4k^2$  را محاسبه نماییم، برابر است با:  $n^2 = 4k^2$

$$n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2) = 2k'^2 \xrightarrow{k' \in \mathbb{N}} n^2 : \text{زوج}$$

این نتیجه با فرض مسئله تناقض دارد و حکم ثابت می‌شود.

۷ - گزینه ۲ ابتدا باید توجه داشت که نسبت  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$  در مثلث  $ABC$  برقرار است، بنابراین  $DE \parallel BC$ .

$$\frac{3}{2} = \frac{4,5}{3}$$

حال با استفاده از فیثاغورث داریم:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \rightarrow 5^2 + BC^2 = 7,5^2 \rightarrow BC^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 5^2 = \frac{125}{4}$$

$$BC = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{DE}{\frac{5\sqrt{5}}{2}} \rightarrow$$

طبق قضیه‌ی تالس می‌توان نوشت:

$$DE = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{2} \times 3}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$



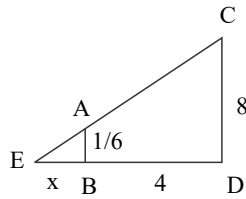
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{4,5}{3} \rightarrow DE \parallel BC \rightarrow \hat{D} = \hat{B} = \text{deg } 90$$

$$\rightarrow \text{رابطه فیثاغورث: } AD^2 + DE^2 = AE^2 \rightarrow 3^2 + DE^2 = 4,5^2$$

$$\rightarrow DE^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 3^2 \rightarrow DE^2 = \frac{81}{4} - \frac{36}{4} \rightarrow DE^2 = \frac{45}{4}$$

$$\rightarrow DE = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{\sqrt{9 \times 5}}{2} \rightarrow \boxed{DE = \frac{3\sqrt{5}}{2}}$$

۸ - گزینه ۲ با توجه به تصویر میله‌ی پرچم و شخص مورد نظر بر سطح عمود می‌باشند. پس این دو باهم موازی هستند و می‌توان از قضیه‌ی تالس استفاده کرد.



$$\frac{x}{x+4} = \frac{1,6}{8} \rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

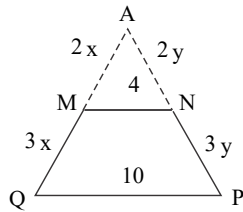
$$5x = x + 4 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1$$

پس طول پاره‌خط  $EB = 1$  و طول  $DE = 5$ .  
حال طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$EC = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$$

۹ - گزینه ۳ برای محاسبه‌ی محیط مثلث  $AMN$  ابتدا با استفاده از قضیه‌ی تالس مقدار مجهول  $x$  و  $y$  را محاسبه می‌نماییم.

باید توجه داشت که پاره‌خط  $MN$  موازی  $QP$  است، چون نسبت  $\frac{MN}{QP} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$  است، پس نسبت  $\frac{AM}{AQ} = \frac{AN}{AP}$  نیز باید  $\frac{2}{5}$  باشد.

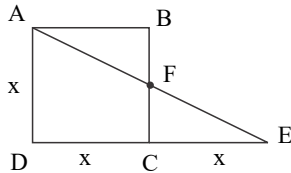


از طرفی محیط دوزنقه برابر با ۲۳ است، بنابراین:

$$3x + 3y + 4 + 10 = 23 \Rightarrow 3(x+y) = 23 - 14 \Rightarrow 3(x+y) = 9 \Rightarrow x+y = 3$$

$$AMN \text{ مثلث } = 4 + 2x + 2y = 4 + 2(x+y) = 4 + 2 \times 3 = 10$$

۱۰ - گزینه ۳ ابتدا یک تصویر کلی از مسئله رسم می‌نماییم. با توجه به شکل در مثلث  $ADE$  داریم:



$$AD \parallel CF \rightarrow \frac{CF}{AD} = \frac{CE}{DE} \rightarrow \frac{CF}{x} = \frac{x}{2x} \rightarrow CF = \frac{x}{2}$$

حال می‌توان مساحت دوزنقه را به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{\left(\frac{x}{2} + x\right)x}{2} = \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)x}{2} = \frac{(3x)x}{4} = \frac{3x^2}{4}$$

نسبت مساحت دوزنقه به مربع برابر است:

$$\frac{3x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2$$

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{EF}{20} \Rightarrow \boxed{EF = 5}$$



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{MN}{20} \Rightarrow MN = \frac{15}{2}$$

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{PQ}{20} \Rightarrow PQ = \frac{35}{2}$$

$$EF + MN + PQ = 5 + \frac{15}{2} + \frac{35}{2} = 30$$

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۳ - ۱

۵ - ۱

۷ - ۲

۹ - ۳

۱۱ - ۲

۲ - ۱

۴ - ۳

۶ - ۳

۸ - ۲

۱۰ - ۳