

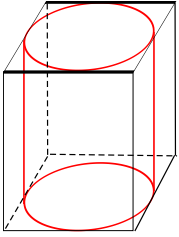


علی هاشمی

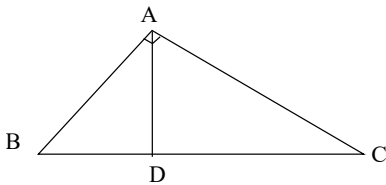
نمونه سوال: قضیه تالس

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

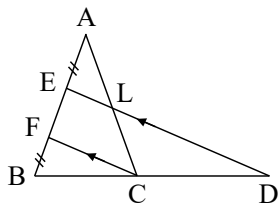


۱- در مکعبی به ضلع واحد، استوانه‌ای مطابق شکل محاط شده است. حجم این استوانه کدام است؟



۲- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، نیمساز وارد بر وتر رسم شده است. اگر $BD = \frac{15}{7}$ و $CD = \frac{20}{7}$

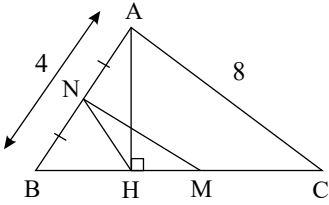
باشد، مساحت مثلث کدام است؟



۳- باتوجه به شکل مقابل، اگر $AE = BF$ باشد، آن‌گاه طول EL کدام است؟ ($DL = 30, CF = 8$)

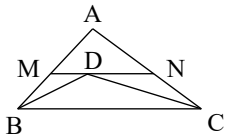


۴- در مثلث ABC با اضلاع $AB = 4$ و $AC = 8$ ، ارتفاع وارد BC و نقاط M و N وسط اضلاع BC و AB هستند. مقدار $MN + NH$ کدام است؟

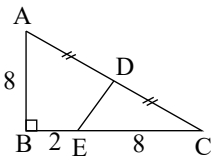


۵- در دوزنقه‌ی $ABCD$ با محیط ۲۶ واحد، نقاط E و F به ترتیب وسط ساق‌های AD و BC هستند. پاره‌خط EF و قطر BD یکدیگر را در نقطه‌ی O طوری قطع کرده‌اند که $OE = 2$ و $OF = 5$ است. مجموع اندازه‌ی ساق‌های این دوزنقه برابر کدام است؟

۶- در مثلث شکل مقابل از نقطه‌ی D محل برخورد نیمسازهای زوایای B و C خطی موازی BC رسم کرده‌ایم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در M و N قطع کند. اگر $BC = 12$ ، $AC = 10$ و $AB = 8$ ، آن‌گاه طول MN کدام است؟

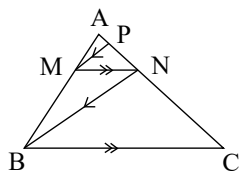


۷- در شکل مقابل طول DE کدام است؟

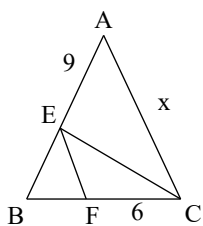




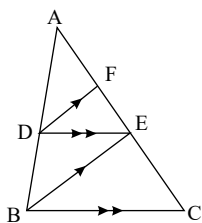
۸- در شکل زیر $MN \parallel BC$ و $MP \parallel BN$ است. اگر $BC = 3MN$ و $NC = 6$ باشد، طول AP کدام است؟



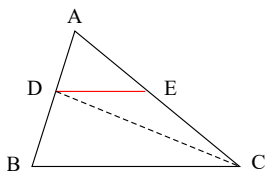
۹- در شکل زیر، $AB = AC$ و $EF \parallel AC$ و CE نیمساز زاویه C است. مقدار x کدام است؟



۱۰- در شکل مقابل با فرض $\frac{EF}{AC} = \frac{6}{25}$ ، حاصل $\frac{DE}{BC}$ کدام می‌تواند باشد؟

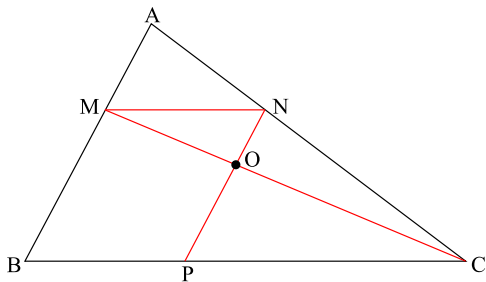


۱۱- در شکل مقابل $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ و $DE \parallel BC$ است. مساحت مثلث ADE چند درصد مثلث DEC است؟

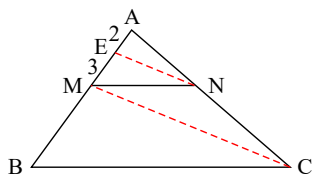




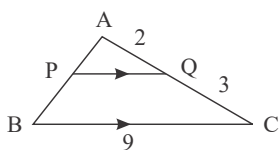
۱۲- در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{7}$ و چهارضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



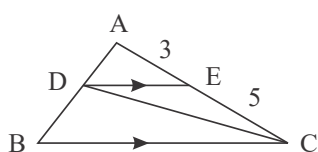
۱۳- در شکل مقابل، $MN \parallel BC$ و $EN \parallel MC$. اندازه MB کدام است؟



۱۴- در شکل روبه‌رو، $PQ \parallel BC$. طول پاره خط PQ کدام است؟

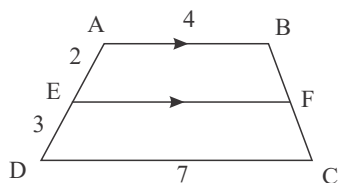


۱۵- در شکل روبه‌رو، CD نیمساز زاویه C است. اگر $DE \parallel BC$ ، حاصل $2DE + 3BC$ چقدر است؟

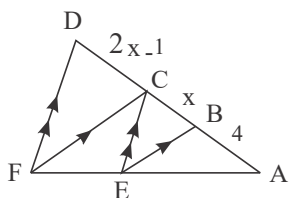




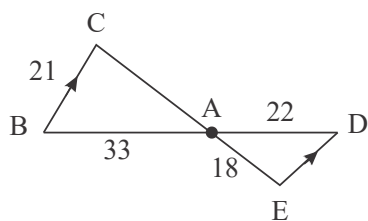
۱۶- اگر در دوزنقه $ABCD$ داشته باشیم ، طول EF چقدر است؟



۱۷- در شکل زیر، اندازه پاره خط AD کدام است؟ $(BE \parallel CF, EC \parallel FD)$

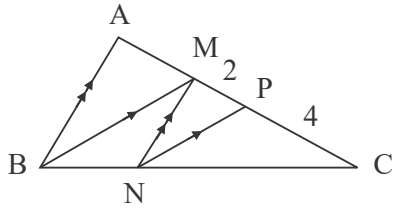


۱۸- با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $AC + DE$ کدام است؟

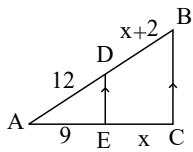




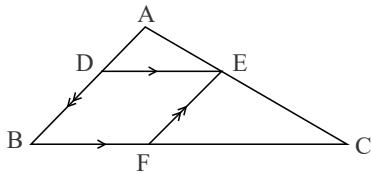
۱۹- در مثلث ABC ، داریم $NP \parallel MB$ و $MN \parallel AB$ ، طول AM چقدر است؟



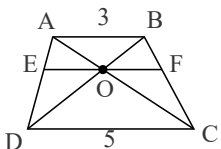
۲۰- مطابق شکل، اگر $DE \parallel BC$ باشد، اندازه EC کدام است؟



۲۱- در مثلث ABC در شکل زیر، $DE \parallel BC$ و $EF \parallel AB$ می‌باشد. اگر داشته باشیم $BC = ۲AB = \frac{۴}{۳}AC = ۴DE = ۱۲$ ، نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع $BDEF$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟

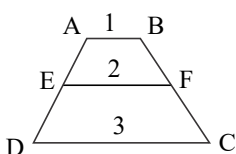
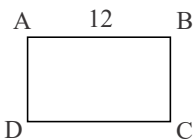


۲۲- در دوزنقه $ABCD$ شکل زیر داریم: $EF \parallel AB$. حاصل $\frac{OE}{OF}$ کدام است؟



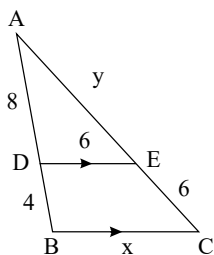


۲۳ - شکل روبه‌رو مستطیلی به طول ۱۲ است. از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم و پای این عمود را H می‌نامیم. اگر BH برابر ۱۱ باشد، اندازه DH چقدر است؟

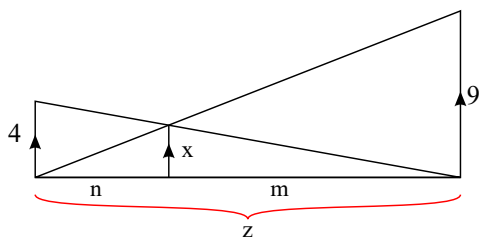


۲۴ - در ذوزنقه $ABCD$ خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم. مقدار $\frac{AE}{ED}$ کدام است؟

۲۵ - در شکل زیر، $BC \parallel DE$ است. مقدار $x + y$ کدام است؟

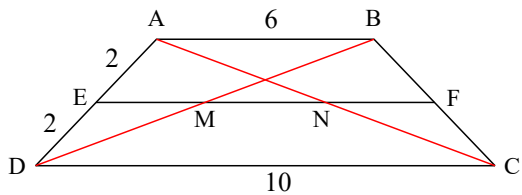


۲۶ - در شکل زیر مقدار x کدام است؟

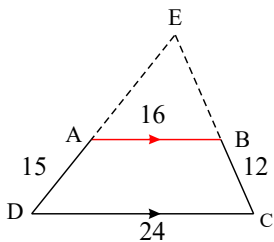




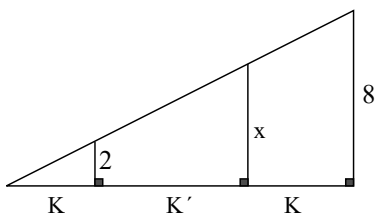
۲۷- در شکل زیر $ABCD$ دوزنقه و پاره خط EF موازی دو قاعده است. حاصل $\frac{MN}{EF}$ کدام است؟



۲۸- در شکل مقابل، محیط مثلث CDE کدام است؟

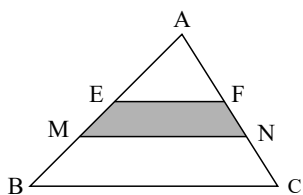


۲۹- در مثلث قائم الزاویه زیر، مقدار x کدام است؟

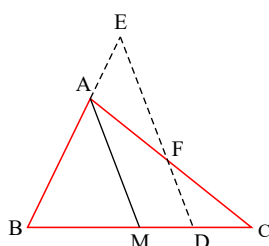




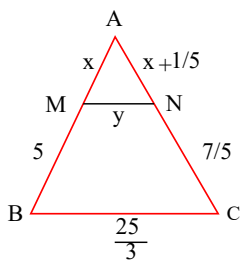
۳۰- در شکل زیر، اگر $\frac{AE}{BE} = \frac{BM}{AM} = \frac{CN}{AN} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{3}$ باشد، مساحت چهارضلعی هاشورخورده چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۳۱- در شکل زیر، DE موازی میانه AM است و $AB = 2AC$ ، حاصل $\frac{AE}{AF}$ کدام است؟

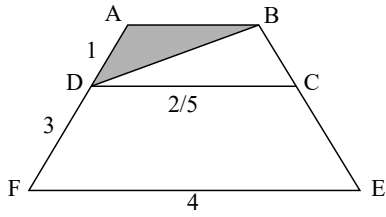


۳۲- در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. حاصل $x + y$ کدام است؟

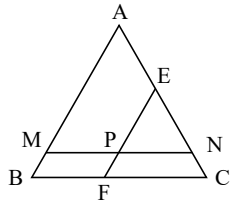




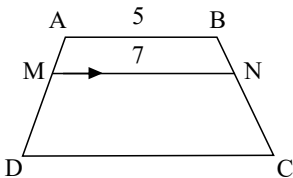
۳۳- در شکل زیر، مساحت ناحیه هاشورخورده، چه کسری از مساحت دوزنقه $ABEF$ است؟ $(DC \parallel EF)$



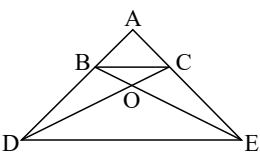
۳۴- در مثلث ABC داریم: $BC = 8$ و $AC = 6$ ، خط MN به موازات BC و به طول ۶ رسم شده است و خط EF به موازات AB از وسط MN گذشته است. طول EC کدام است؟



۳۵- در دوزنقه $ABCD$ پاره خط MN موازی قاعده‌ها رسم شده و $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{3}$ است. طول قاعده DC کدام است؟



۳۶- در شکل زیر، $BC \parallel DE$ و $\frac{AB}{AD} = \frac{1}{4}$ است. مساحت مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) چند برابر مساحت مثلث OBC است؟



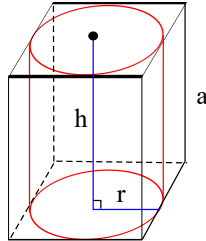




پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ نکته: حجم استوانه‌ای با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $V = \pi r^2 h$

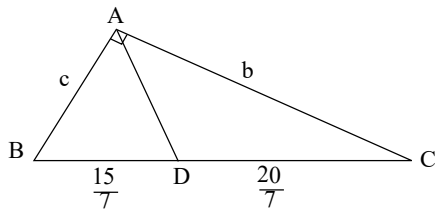
$$\begin{cases} \text{ارتفاع: } h = a = 1 \\ \text{شعاع: } r = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{باتوجه به شکل داریم:}$$



$$\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

۲ - گزینه ۲

نکته (قضیه‌ی نیمساز داخلی): اگر AD نیمساز داخلی مثلث ABC باشد، داریم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{15}{7}}{\frac{20}{7}} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$$

با فرض $c = 3x$ و $b = 4x$ و با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در $\triangle ABC$ داریم:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow 16x^2 + 9x^2 = 25 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc = 6$$

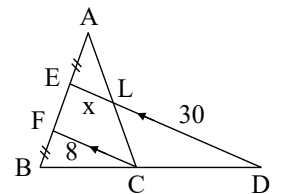
$$\left. \begin{array}{l} \triangle AEC: \frac{AE}{AF} = \frac{x}{\lambda} \\ \triangle BED: \frac{BF}{BE} = \frac{\lambda}{x+30} \end{array} \right\} \begin{array}{l} AE=BF \\ AF=BE \end{array} \Rightarrow \frac{x}{\lambda} = \frac{\lambda}{x+30}$$

$$\Rightarrow x^2 + 30x - 64 = 0$$

$$\Rightarrow (x+32)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -32 \text{ ق ق} \\ x = 2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

۳ - گزینه ۲ باتوجه به فرض $AE = BF$ واضح است که $AF = BE$ ، داریم:



۴ - گزینه ۱ نکته: (عکس قضیه‌ی تالس): اگر پاره‌خطی وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کند، آن گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

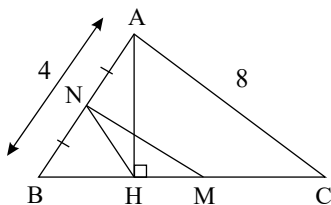
نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

$$\begin{cases} AN = NB \\ BM = MC \end{cases} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH ، میانه‌ی وارد بر وتر است. پس:

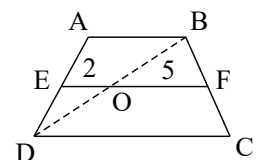
$$NH = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{بنابراین: } MN + NH = 4 + 2 = 6$$



۵ - گزینه ۳ در مثلث ABD داریم $OE \parallel AB$ ، پس بنابر قضیه‌ی تالس:

$$\frac{OE}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 4$$





به همین شیوه در مثلث BDC می توانیم بنویسیم:

$$\frac{OF}{DC} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 10$$

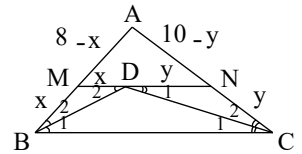
$$AB + BC + DC + AD = 26$$

$$\xrightarrow{AB=4, DC=10} BC + AD = 26 - 14 = 12$$

۶ - گزینه ۲ چون $MN \parallel BC$ و نیز BD و CD نیم سازه‌های زوایای \widehat{B} و \widehat{C} هستند، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:

$$\begin{cases} \widehat{C}_1 = \widehat{C}_r = \widehat{D}_1 \\ \widehat{B}_1 = \widehat{B}_r = \widehat{D}_r \end{cases}$$

و لذا مثلث‌های $\triangle DMB$ و $\triangle DNC$ هر دو متساوی الساقین اند. حال باتوجه به شکل و طبق قضیه‌ی تالس داریم:



$$\frac{8-x}{8} = \frac{x+y}{12} = \frac{10-y}{10}$$

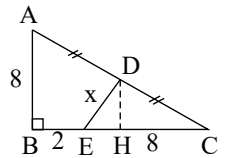
$$\Rightarrow \begin{cases} 96 - 12x = 8x + 8y \\ 120 - 12y = 10x + 10y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x + 4y = 48 \\ 10x + 22y = 120 \end{cases} \Rightarrow y = 4, x = 3.2 \Rightarrow x + y = 7.2 \Rightarrow MN = 7.2$$

۷ - گزینه ۴ از D بر BC عمود می کنیم. داریم:

$$DH \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{DC}{AC} = \frac{CH}{CB} = \frac{DH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{10} = \frac{DH}{8}$$

$$CH = 5, DH = 4$$



حال:

$$BH = BC - CH$$

$$= 10 - 5 = 5 \Rightarrow EH = 3$$

$$\triangle DEH : x^2 = DH^2 + EH^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$

۸ - گزینه ۴ طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MP \parallel BN \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PN} \\ MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AP}{PN} = \frac{AN}{NC} (*)$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AC - AN} = \frac{1}{3 - 1}$$

از طرفی داریم:

$$\Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{NC=6} AN = 3$$

$$(*) \Rightarrow \frac{AP}{PN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AP}{AP + PN} = \frac{1}{2 + 1} \Rightarrow \frac{AP}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow AP = 1$$

۹ - گزینه ۳ فرض کنیم $\widehat{FCE} = \widehat{ECA} = \alpha$ ، در این صورت:

$$EF \parallel AC \text{ و مورب } EC \Rightarrow \widehat{FEC} = \widehat{ACE} \Rightarrow \widehat{FEC} = \alpha$$

در نتیجه، مثلث EFC متساوی الساقین است ($\widehat{FEC} = \widehat{FCE} = \alpha$) بنابراین $EF = FC = 6$

حال:

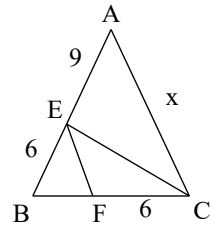


نتیجه قضیه تالس

$$\triangle ABC : EF \parallel AC \rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$$

$$\xrightarrow{AB=AC} BE = EF = 6$$

$$AC = AB = AE + BE = 9 + 6 = 15 \Rightarrow x = 15$$



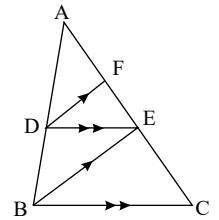
۱۰ - گزینه ۳

$$\triangle ABC : DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\triangle ABE : DF \parallel BE$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE}$$

$$= \frac{AE - EF}{AE} = 1 - \frac{EF}{AE}$$

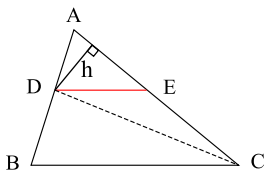


از تناسب‌های فوق نتیجه می‌شود $\frac{EF}{AE} = 1 - \frac{AD}{AB} = 1 - \frac{DE}{BC}$ داریم:

$$\frac{EF}{AC} = \frac{6}{25} \Rightarrow \frac{EF}{AE} \times \frac{AE}{AC} = \frac{6}{25} \Rightarrow (1 - \frac{DE}{BC}) \frac{DE}{BC} = \frac{6}{25}$$

$$\Rightarrow (\frac{DE}{BC})^2 - (\frac{DE}{BC}) + \frac{6}{25} = 0 \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{24}{25}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{1}{5}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{DE}{BC} = \frac{6}{25} = 0,24 \\ \text{یا} \\ \frac{DE}{BC} = \frac{4}{25} = 0,16 \end{array} \right.$$



۱۱ - گزینه ۴

چون $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ است، پس $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ است.

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{رابطه تالس در } \triangle ABC} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$$

دو مثلث ADE و DEC در ارتفاع خارج شده از رأس D (ارتفاع h) مشترک هستند و داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{4} = 0,75$$

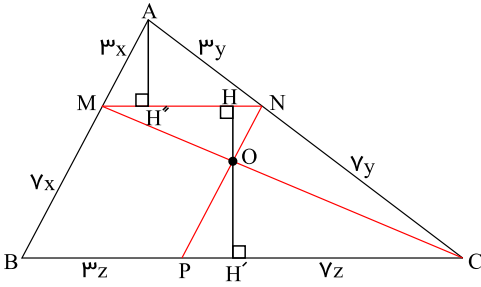


۱۲ - گزینه ۳

با توجه به رابطه $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{7}$ و قضیه تالس، اندازه پاره‌خطها را در شکل می‌نویسیم.

اگر در مثلث OMN ، طول ارتفاع OH را $3h$ در نظر بگیریم، آنگاه از تشابه مثلث‌های OMN و OPC نتیجه می‌شود که $OH' = 7h$.

از طرفی طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها داریم:



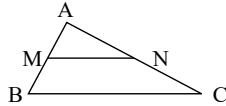
$$\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AH''}{AH'' + HH'} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{AH''}{AH'' + 10h} = \frac{3}{10} \Rightarrow 10AH'' = 30h \Rightarrow AH'' = \frac{30}{10}h = 3h$$

در نتیجه نسبت مساحت‌های مورد نظر برابر می‌شود با:

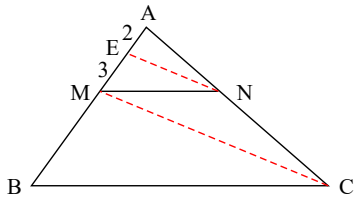
$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{1}{2}MN \times OH}{\frac{1}{2}MN \times AH''} = \frac{OH}{AH''} = \frac{3h}{30h} = \frac{1}{10} = 10\%$$

۱۳ - گزینه ۴ نکته (قضیه تالس): اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود، بر روی دو ضلع دیگر، پاره‌خط‌های متناسب پدید می‌آورد. یعنی:

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

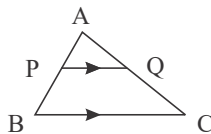


با استفاده از قضیه تالس داریم:



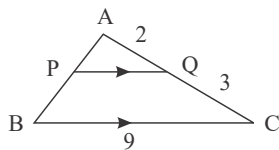
$$\begin{cases} \triangle AMC : EN \parallel MC \Rightarrow \frac{AE}{ME} = \frac{AN}{NC} \\ \triangle ABC : MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{ME} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2+3}{MB} \Rightarrow MB = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

۱۴ - گزینه ۱ نکته (تعمیم قضیه تالس): در شکل روبه‌رو، اگر $PQ \parallel BC$ آنگاه:



$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

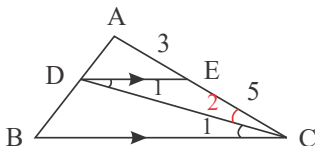
با استفاده از تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC داریم:



$$\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{PQ}{9} \Rightarrow PQ = \frac{18}{5} = 3,6$$

۱۵ - گزینه ۳

با توجه به قضیه خطوط مورب و موازی داریم: $DE \parallel BC \rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$



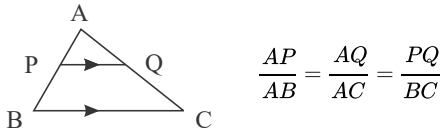
اما با توجه به اینکه CD نیمساز زاویه می‌باشد داریم: $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ پس $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ و مثلث DEC متساوی‌الساقین است و داریم $DE = EC = 5$ با استفاده از قضیه تالس در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \rightarrow \frac{5}{BC} = \frac{3}{10} \rightarrow 3BC = 50 \rightarrow BC = \frac{50}{3}$$

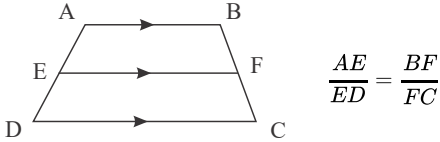
$$2DE + 3BC = 2(5) + 3\left(\frac{50}{3}\right) = 50$$



۱۶ - گزینه ۲ نکته (تعمیم قضیه تالس): در شکل روبه‌رو، اگر $PQ \parallel BC$ ، آنگاه:



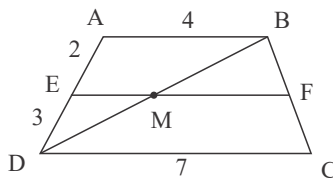
نکته: در دوزنقه $ABCD$ اگر EF موازی قاعده‌های AB و DC باشد، آنگاه:



با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AE}{ED} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BF}{BC} = \frac{2}{5} \quad (*)$$

ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم. حال در مثلث ABD طبق تعمیم قضیه تالس می‌توان نوشت:



$$\frac{EM}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EM}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow EM = \frac{12}{5}$$

مجدداً در مثلث BDC طبق تعمیم قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$\frac{MF}{DC} = \frac{BF}{BC} \xrightarrow{(*)} \frac{MF}{7} = \frac{2}{5} \Rightarrow MF = \frac{14}{5}$$

$$EF = ME + MF = \frac{12}{5} + \frac{14}{5} = \frac{26}{5} = 5,2 \text{ بنابراین}$$

۱۷ - گزینه ۴ با توجه به موازی بودن پاره‌خط‌های موجود می‌توان از قضیه تالس استفاده کرد:

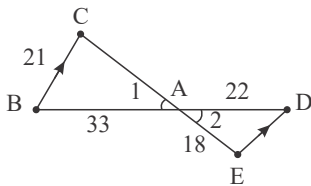
$$\left. \begin{array}{l} BE \parallel CF \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \\ EC \parallel FD \rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EF} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{4+x}{2x-1}$$

$$4x - 4 = 4x + x^2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$AD = 4 + x + (2x - 1) = 4 + 2 + 3 = 9$$

۱۸ - گزینه ۱

با توجه به موازی بودن $BC \parallel ED$ طبق قضیه خطوط موازی و مورب زوایای به‌صورت زیر با هم برابرند.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ متقابل به رأس} \\ \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{C} = \hat{E} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

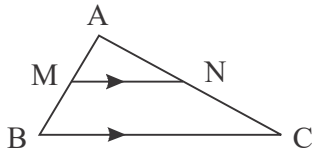
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{DE}{21} = \frac{22}{33} = \frac{18}{AC} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{DE}{21} = \frac{2}{3} \rightarrow DE = 14 \\ \frac{18}{AC} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{18}{AC} = \frac{2}{3} \rightarrow AC = 27 \end{array} \right.$$

$$AC + DE = 27 + 14 = 41$$

حال با توجه به تناسب اضلاع متناظر داریم:

۱۹ - گزینه ۳ نکته (قضیه تالس): در مثلث ABC ، اگر $MN \parallel BC$ ، آنگاه:

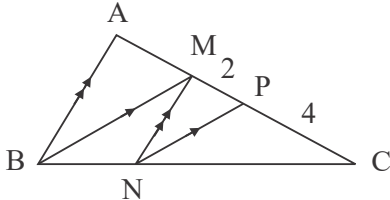


$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

در مثلث BMC دو پاره‌خط PN و MB موازی‌اند، پس طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{PC}{PM} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow \frac{NC}{NB} = 2$$

از طرفی در مثلث ABC نیز دو پاره‌خط MN و AB موازی‌اند، پس طبق قضیه تالس داریم:



$$\frac{MC}{MA} = \frac{NC}{NB} \cdot \frac{NC}{MC} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow MA = MC = 3$$

۲۰ - گزینه ۱

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{12}{x+2} \Rightarrow 9x + 18 = 12x \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$$

۲۱ - گزینه ۳ با توجه به موازی بودن DE و BC می‌توان نتیجه گرفت، دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ADE$ متشابه می‌باشند و می‌توان نسبت تشابه را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{6} = \frac{AE}{9} = \frac{3}{12} \Rightarrow \begin{cases} AD = \frac{3}{2} \\ AE = \frac{9}{4} \end{cases}$$

چهارضلعی $DEFB$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد و $BF = DE$ موازی هستند، بنابراین داریم:

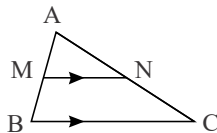
$$FC = BC - BF = 12 - 3 = 9$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad \frac{S_{FEC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{FC}{BC}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

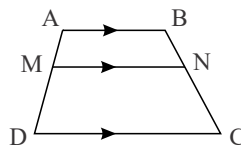
$$S_{DEFB} = S_{ABC} - (S_{ADE} + S_{FEC}) = S_{ABC} - \left(\frac{1}{16}S_{ABC} + \frac{9}{16}S_{ABC}\right) = \frac{3}{8}S_{ABC}$$

۲۲ - گزینه ۱ نکته (تعمیم قضیه تالس): در مثلث ABC اگر $MN \parallel BC$ ، آنگاه:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



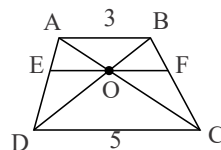
نکته: (قضیه تالس در ذوزنقه): در ذوزنقه $ABCD$ ، اگر $MN \parallel AB$ ، آنگاه:



$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

طبق فرض $EF \parallel AB$ ، با استفاده از قضیه تالس در ذوزنقه داریم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$



حال با استفاده از ترکیب در مخرج، نتیجه می‌شود:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$$

اکنون با استفاده از قضیه تالس در مثلث‌های ADC و BCD داریم:

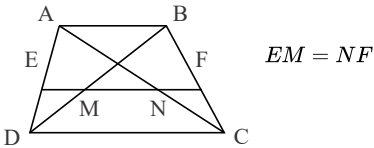


$$\begin{cases} \triangle ADC : OE \parallel DC \Rightarrow \frac{OE}{DC} = \frac{AE}{AD} & (1) \\ \triangle BCD : OF \parallel DC \Rightarrow \frac{OF}{DC} = \frac{BF}{BC} & (2) \end{cases}$$

$$\frac{OE}{DC} = \frac{OF}{DC} \Rightarrow OE = OF \Rightarrow \frac{OE}{OF} = 1$$

حال با توجه به اینکه $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$ ، از (1) و (2) نتیجه می‌گیریم:

تذکر: در دوزنقه شکل روبه‌رو اگر $EF \parallel AB$ ، آنگاه:



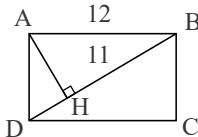
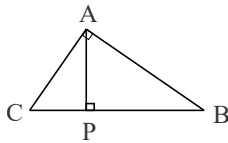
۲۳ - گزینه ۴ روش اول:

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه زیر، اگر AP ارتفاع وارد بر وتر باشد داریم:

$$\begin{aligned} AC^2 &= PC \times BC & BC^2 &= AC^2 + AB^2 \\ AB^2 &= PB \times BC & AB \times AC &= AP \times BC \\ AP^2 &= PC \times PB \end{aligned}$$

با استفاده از نکته بالا، در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 144 = 11 \times BD \Rightarrow BD = \frac{144}{11}$$



$$DH = \frac{144}{11} - 11 = \frac{23}{11}$$

بنابراین:

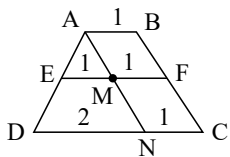
روش دوم:

$$\triangle ABH : AB^2 = AH^2 + BH^2 \rightarrow 12^2 = AH^2 + 11^2 \rightarrow 144 - 121 = AH^2$$

$$\rightarrow AH^2 = 23$$

$$AH^2 = DH \cdot BH \rightarrow 23 = DH \times 11 \rightarrow DH = \frac{23}{11}$$

۲۴ - گزینه ۴ مطابق شکل از نقطه A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم. مطابق شکل $ABCN$ متوازی‌الاضلاع است.



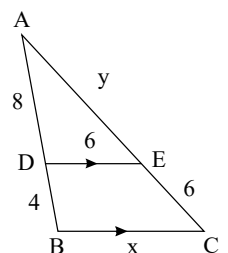
پس طول MF و NC برابر یک می‌باشد. طبق قضیه تالس در مثلث ADN داریم:

$$EM \parallel DN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AD} = \frac{EM}{DN} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD - AE} = \frac{1}{2 - 1} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{ED} = 1$$

۲۵ - گزینه ۳ طبق قضیه تالس داریم:

$$BC \parallel DE \Rightarrow \begin{cases} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 12 \\ \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 9 \end{cases} \Rightarrow x + y = 9 + 12 = 21$$





۲۶ - گزینه ۳

$$\begin{cases} \frac{m}{x} = \frac{z}{4} \\ \frac{n}{x} = \frac{z}{9} \end{cases} \rightarrow \frac{m}{x} + \frac{n}{x} = \frac{z}{4} + \frac{z}{9} \rightarrow \frac{m+n}{x} = \frac{13z}{36}$$

$$\xrightarrow{m+n=z} \frac{z}{x} = \frac{13z}{36} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{13}{36} \rightarrow x = \frac{36}{13}$$

۲۷ - گزینه ۱

$$EN \parallel DC \rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EN}{DC} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{EN}{10} \rightarrow \boxed{EN = 5}$$

$$EM \parallel AB \rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{EM}{AB} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{EM}{6} \rightarrow \boxed{EM = 3}$$

$$EM + MN = EN \rightarrow 3 + MN = 5 \rightarrow \boxed{MN = 2}$$

$$AB \parallel CD \parallel EF \rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = 1$$

$$NF \parallel AB \rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{NF}{AB} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{NF}{6} \rightarrow \boxed{NF = 3}$$

$$EF = EN + NF \rightarrow EF = 5 + 3 \rightarrow \boxed{EF = 8} \rightarrow \frac{MN}{EF} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۲۸ - گزینه ۴

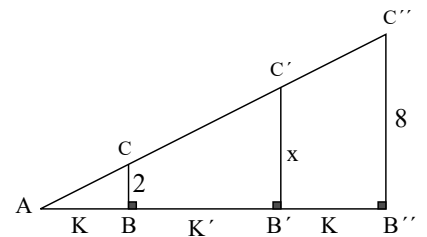
$$AB \parallel DC \rightarrow \frac{EA}{ED} = \frac{AB}{DC} \rightarrow \frac{EA}{EA + 15} = \frac{16}{24} \rightarrow 24EA = 2EA + 30 \rightarrow \boxed{EA = 30}$$

$$\frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \rightarrow \frac{30}{15} = \frac{EB}{12} \rightarrow \boxed{EB = 24}$$

$$P_{\triangle CDE} = CD + ED + EC = 24 + (30 + 15) + (24 + 12) = 105$$

۲۹ - گزینه ۳

$$\left. \begin{aligned} BC \parallel B''C'' &\rightarrow \frac{K}{2K + K'} = \frac{2}{8} \\ B'C' \parallel B''C'' &\rightarrow \frac{K + K'}{2K + K'} = \frac{x}{8} \end{aligned} \right\}$$



$$\rightarrow \frac{K}{2K + K'} + \frac{K + K'}{2K + K'} = \frac{2}{8} + \frac{x}{8} \rightarrow \frac{2K + K'}{2K + K'} = \frac{2 + x}{8} \rightarrow \frac{2 + x}{8} = 1 \rightarrow \boxed{x = 6}$$

۳۰ - گزینه ۲

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{AE}{AE + BE} = \frac{AF}{AF + CF} = \frac{1}{1 + 3} \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\frac{BM}{AM} = \frac{CN}{AN} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{BM + AM}{AM} = \frac{CN + AN}{AN} = \frac{1 + 3}{3} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{S_{\triangle EFN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} - \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \triangle BED: AM \parallel DE &\rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BM}{MD} \\ \triangle AMC: DF \parallel AM &\rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{MC}{MD} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{BM=MC} \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \\ &\text{میانه} = AM \end{aligned}$$

۳۱ - گزینه ۲



$$\left. \begin{aligned} \frac{AE}{AF} &= \frac{AB}{AC} \\ \rightarrow \frac{AE}{AF} &= \frac{AB}{AC} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{2}{3}$$

$$3AB = 2AC \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

۳۲ - گزینه ۴

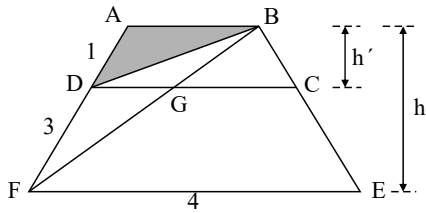
$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \rightarrow \frac{x}{5} = \frac{x+1,5}{7,5} \rightarrow 7,5x = 5x + 7,5$$

$$\rightarrow 2,5x = 7,5 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \rightarrow \frac{3}{8} = \frac{y}{\frac{25}{3}} \rightarrow \boxed{y = \frac{25}{8}}$$

$$\rightarrow x + y = 3 + \frac{25}{8} = \frac{49}{8}$$

۳۳ - گزینه ۳



$$\left. \begin{aligned} \triangle ABF: DG \parallel AB \rightarrow \frac{FD}{FA} &= \frac{DG}{AB} \rightarrow \frac{DG}{AB} = \frac{3}{4} \rightarrow DG = \frac{3}{4}AB \\ \triangle BEF: GC \parallel FE \rightarrow \frac{BC}{BE} &= \frac{GC}{FE} \rightarrow \frac{GC}{FE} = \frac{1}{4} \rightarrow GC = \frac{1}{4}(4) = 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow DG + GC = 2,5 \rightarrow \frac{3}{4}AB + 1 = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{3}{4}AB = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{AB = 2}$$

$$AB \parallel DC \rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{AD}{AF} \rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times h'}{\frac{1}{2}(AB + EF) \times h} = \frac{AB}{AB + EF} \times \frac{h'}{h} = \frac{2}{2+4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

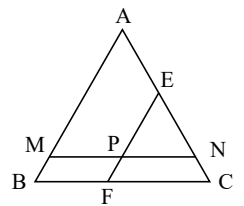
۳۴ - گزینه ۲

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \rightarrow \frac{AN}{6} = \frac{6}{8} \rightarrow \boxed{AN = 4,5}$$

$$AN + NC = AC \rightarrow 4,5 + NC = 6 \rightarrow \boxed{NC = 1,5}$$

$$EP \parallel AM \rightarrow \frac{NE}{NA} = \frac{NP}{NM} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{NE}{4,5} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{NE = 2,25}$$

$$EC = EN + NC = 2,25 + 1,5 \rightarrow \boxed{EC = 3,75}$$



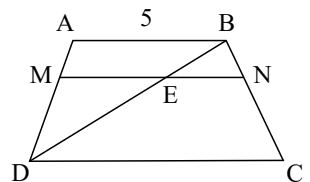
۳۵ - گزینه ۳

$$\frac{AM}{MD} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{3}{4}$$

$$\triangle ABD: ME \parallel AB \rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{ME}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{3}{4} = \frac{ME}{5} \rightarrow \boxed{ME = \frac{15}{4}}$$

$$ME + NE = 7 \rightarrow NE = 7 - \frac{15}{4} \rightarrow \boxed{NE = \frac{13}{4}}$$





$$\triangle BDC : EN \parallel DC \rightarrow \frac{BE}{BD} = \frac{EN}{DC} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{13}{DC} \rightarrow \boxed{DC = 52}$$

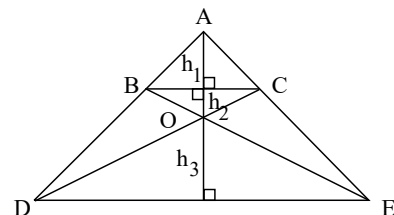
$$BC \parallel DE \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{h_1}{h_1 + h_r + h_r} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\triangle OBC \sim \triangle ODE \rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{h_r}{h_r} = \frac{1}{4} \rightarrow h_r = 4h_r \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{h_1}{h_1 + h_r + 4h_r} = \frac{1}{4} \rightarrow 4h_1 = h_1 + 5h_r \rightarrow 3h_1 = 5h_r$$

$$\rightarrow \frac{h_1}{h_r} = \frac{5}{3} \rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times h_1}{\frac{1}{2} BC \times h_r} = \frac{h_1}{h_r} = \frac{5}{3}$$

۳۶ - گزینه ۳



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۷ - ۴	۱۳ - ۴	۱۹ - ۳	۲۵ - ۳	۳۱ - ۲
۲ - ۲	۸ - ۴	۱۴ - ۱	۲۰ - ۱	۲۶ - ۳	۳۲ - ۴
۳ - ۲	۹ - ۳	۱۵ - ۳	۲۱ - ۳	۲۷ - ۱	۳۳ - ۳
۴ - ۱	۱۰ - ۳	۱۶ - ۲	۲۲ - ۱	۲۸ - ۴	۳۴ - ۲
۵ - ۳	۱۱ - ۴	۱۷ - ۴	۲۳ - ۴	۲۹ - ۳	۳۵ - ۳
۶ - ۲	۱۲ - ۳	۱۸ - ۱	۲۴ - ۴	۳۰ - ۲	۳۶ - ۳