



علی هاشمی

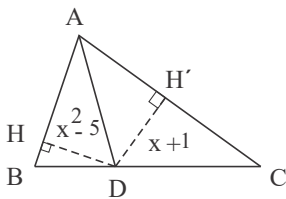
نمونه سوال: ترسیم های هندسی

سایت : ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- چند مثلث متمایز با طول اضلاع $AB = 5$, $BC = 6$ و به مساحت ۲۱ وجود دارد؟

۲- در شکل زیر، اگر $AB = x + 2$, $AC = x + 3$ و AD نیمساز زاویه A باشد، نسبت $\frac{AC}{AB}$ کدام است؟



۳- نقطه T به فاصله $3x + 1$ از خط d قرار دارد. اگر هیچ نقطه‌ای روی خط d به فاصله 1 تا نقطه T وجود نداشته باشد، مقدار x کدام گزینه می‌تواند باشد؟

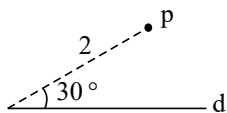
۴- استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی گرفته می‌شود؛ یعنی از جزء به کل می‌رسیم، نامیده می‌شود.

۵- کدام گزینه نادرست است؟



- ۶- چه تعداد از موارد زیر را می توان به صورت قضیه ای دوشرطی بیان کرد؟
 الف) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند.
 ب) اگر $x = y$ ، آنگاه $x^2 = y^2$.
 پ) اگر n عددی زوج باشد، آنگاه n^2 نیز عددی زوج است.

- ۷- نقاط A ، B و C رأس های مثلث دلخواه ABC هستند. محل تلاقی نیمسازهای زاویه های A و B و C را O می نامیم. فاصله این نقطه را از اضلاع مثلث، h_1 ، h_2 و h_3 می نامیم. کدام گزینه در مورد این فاصله ها درست است؟

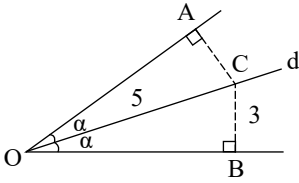


- ۸- با توجه به شکل زیر، چند نقطه وجود دارد که از نقطه P به فاصله 2 و از خط d به فاصله 1 باشد؟

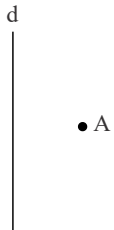
- ۹- چند نقطه در صفحه مختصات وجود دارد که از نقطه $A(1, 2)$ به فاصله 2 باشد؟



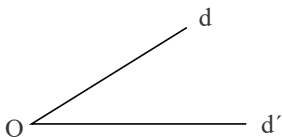
۱۰ - مطابق شکل زیر، اگر محل برخورد دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA با خط d را D بنامیم، طول پاره خط CD کدام است؟



۱۱ - با استفاده از پرگار کمانی به شعاع $3\sqrt{2} \text{ cm}$ و به مرکز نقطه A که در فاصله ۳ سانتی متری از خط d قرار دارد، رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط C و B قطع کند. مثلث ABC و مساحت آن است.



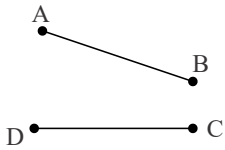
۱۲ - عمودمنصف پاره خط AC را رسم می‌کنیم تا این پاره خط را در نقطه M قطع کند. اگر به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کنیم تا عمودمنصف را در نقاط B و D قطع کند، چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



۱۳ - چند نقطه (به غیر از O) در صفحه وجود دارد که از خط‌های d و d' و نقطه O به یک فاصله باشد؟

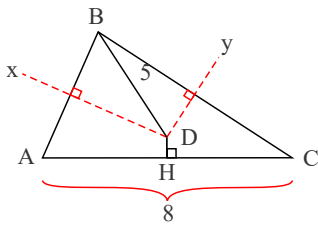


۱۴- با کدام شرط زیر با توجه به شکل پاره خط‌های AB و CD ، همواره می‌توان دایره‌ای رسم کرد که از نقاط A, B, C و D بگذرد؟



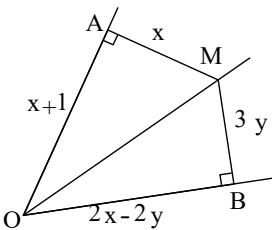
۱۵- در شکل زیر، نقطه D درون مثلث ABC ، Dx و Dy عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC هستند، در این صورت اندازه ارتفاع DH در مثلث

ADC کدام است؟ ($BD = 5$)



۱۶- نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. اگر بخواهیم نقاط B و C را روی خط d چنان انتخاب کنیم که مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده

و مساحت آن ۱۲ سانتی‌متر مربع باشد، باید دایره‌ای به مرکز A و شعاعی با کدام طول بزنیم تا نقاط B و C را روی خط به وجود آورد؟



۱۷- در شکل زیر نقطه M روی نیم‌ساز زاویه O قرار دارد، مقدار $x + y$ کدام است؟



۱۸- نقطه M درون چهارضلعی $ABCD$ به گونه‌ای قرار دارد که فاصله M از سه رأس A ، B و C یکسان است. کدام گزینه در مورد چهارضلعی $ABCD$ و نقطه M همواره درست است؟

۱۹- پاره خط AB به طول ۵ سانتی‌متر در صفحه‌ای مفروض است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که فاصله آن از دو نقطه A و B برابر ۶ سانتی‌متر باشد؟

۲۰- از بین شکل‌های مستطیل، لوزی، مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، مربع و شش‌ضلعی منتظم، در چند شکل همواره نقطه تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع و نقطه تقاطع نیم‌سازهای زاویه‌ها، بر هم منطبق است؟

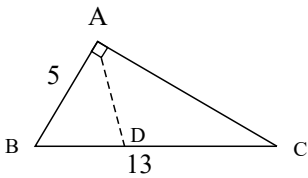
۲۱- دو دایره به مراکز O و O' ، یکدیگر را در نقاط A و B قطع کرده‌اند. چند نقطه مانند M روی پاره خط OO' وجود دارد به گونه‌ای که $MA = MB$ باشد؟

۲۲- در مثلث ABC ، نقاط D و E را به ترتیب روی اضلاع AB و AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = AE$ باشد. در نقاط D و E ، به ترتیب عمودهایی بر دو ضلع AB و AC رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع نمایند. نقطه M همواره روی کدام یک از خطوط زیر قرار دارد؟



۲۳- دو نقطه A و B از یکدیگر ۵ واحد فاصله دارند. از رأس A کمانی به شعاع ۳ واحد و از رأس B کمانی به شعاع ۴ واحد رسم می‌کنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه C و D قطع می‌کنند. چهارضلعی $ACBD$

۲۴- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، نیمساز زاویه قائمه، وتر را در نقطه D قطع می‌کند. مقدار $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}$ کدام است؟ ($BC = 13$)



۲۵- دو دایره به شعاع‌های R و $2R$ در نقطه‌ای بر هم مماسند و خط d در همین نقطه بر دو دایره مماس است. اگر دقیقاً دو نقطه روی دایره‌ها باشد که از خط d فاصله‌شان $1 + R$ باشد، حدود R کدام است؟

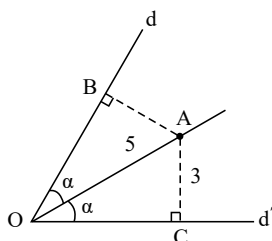
۲۶- دو دایره به مراکز O و O' با شعاع‌های متفاوت در نقاط A و B متقاطع‌اند. در این صورت چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟
 الف) OO' از وسط AB می‌گذرد.
 ب) نقطه O از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.
 پ) دو مثلث OAO' و OBO' هم‌نهشتند.
 ت) AB عمود منصف OO' است.



۲۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، نیمساز زاویه B ، ضلع AC را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $AD = \frac{8}{3}$ و $\hat{B} = 2\hat{C}$ باشد، مساحت مثلث DBC کدام است؟

۲۸- عمودمنصف‌های دو ضلع AC و BC و میانه CM از مثلث ABC در نقطه P یکدیگر را قطع می‌کنند. در این صورت کدام نتیجه‌گیری لزوماً صحیح است؟

۲۹- در شکل زیر دایره‌ای به مرکز O رسم می‌کنیم، به طوری که از نقطه A بگذرد. فاصله نقطه B از محل برخورد دایره با خط d چقدر است؟



۳۰- عکس کدام قضیه شرطی زیر یک قضیه شرطی درست است؟



پاسخنامه تشریحی

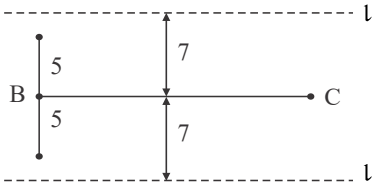
۱ - گزینه ۱ با توجه به اطلاعات مسئله یعنی مساحت و طول ضلع می توان ارتفاع وارد بر بعضی اضلاع را محاسبه نمود:

$$S = \frac{1}{2} BC \times h_{BC} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times h_{BC} = 21 \rightarrow h_{BC} = 7$$

حال می توان گفت رأس در ۷ واحدی از ضلع BC قرار دارد، یعنی رأس A یا روی خط l قرار می گیرد یا l' .

حال به مرکز B و شعاع ۵ واحد دایره رسم می نمایم تا خط l یا l' قطع نماید، زیرا ضلع AB برابر ۵ واحد است. دایره مرسوم هیچ برخوردی با l یا l' ندارد؛ بنابراین هیچ مثلثی قابل رسم نمی باشد.



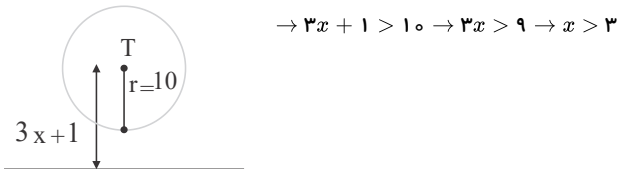
۲ - گزینه ۲ هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین داریم:

$$DH = DH' \rightarrow x^2 - 5 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 3 \quad \checkmark \\ x = -2 \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{x + 3}{x + 2} = \frac{6}{5}$$

۳ - گزینه ۴ با توجه به تعریف دایره نقاطی که از نقطه T فاصله ای برابر ۱۰ واحد دارند، دایره ای به مرکز T و شعاع ۱۰ را می سازند. با توجه به متن سوال این دایره خط مورد نظر را قطع نمی نماید پس می توان تصویر زیر را رسم کرد.



$$\rightarrow 3x + 1 > 10 \rightarrow 3x > 9 \rightarrow x > 3$$

۴ - گزینه ۴ نکته: استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه ای کلی گرفته می شود؛ یعنی از جزء به کل می رسمیم، استدلال استقرایی نامیده می شود. با توجه به نکته بالا، گزینه ۴ پاسخ است.

۵ - گزینه ۳ نکته: اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه جا کنیم، آنچه حاصل می شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می تواند درست یا نادرست باشد. اگر یک قضیه و عکس آن هر دو درست باشند، آن را «قضیه دوشروطی» می نامیم.

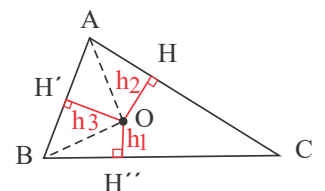
نکته: در برهان خلف فرض می کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا یک نتیجه غیرممکن می رسمیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می شود. با توجه به نکات بالا، گزینه ۳ پاسخ است.

۶ - گزینه ۲ نکته: یک چهارضلعی، متوازی الاضلاع است؛ اگر و تنها اگر قطرهایش یکدیگر را نصف کنند. نکته: n عددی زوج (فرد) است، اگر و تنها اگر n^2 عددی زوج (فرد) باشد.

با توجه به نکات بالا، موارد «الف» و «پ» درست هستند. مورد «ب» نادرست است؛ زیرا از $x^2 = y^2$ نتیجه می شود: $x = \pm y$

۷ - گزینه ۴ ویژگی نیمساز این است که از هر ضلع زاویه به یک فاصله است. پس نقطه O که روی نیمساز \hat{A} قرار دارد از AB و AC به یک فاصله است. همچنین O روی نیمساز B قرار دارد و $OH' = OH''$ در نهایت داریم:

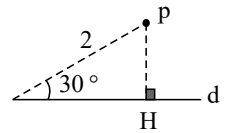
$$\begin{aligned} OH' &= OH \\ OH' &= OH'' \rightarrow OH = OH' = OH'' \rightarrow h_1 = h_2 = h_3 \end{aligned}$$



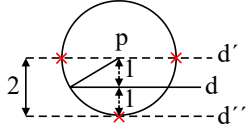


۸ - گزینه ۳ از آنجا که $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{PH}{2} \Rightarrow PH = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$



تمام نقاطی که از نقطه P به فاصله ۲ هستند، روی دایره‌ای به مرکز P و به شعاع ۲ قرار دارد. تمام نقاطی که از خطی که از خط d به فاصله ۱ می‌باشند دو خط موازی خط d و به فاصله ۱ از آن هستند. پس:

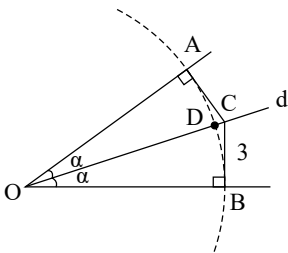


مطابق شکل، سه نقطه وجود دارد.

۹ - گزینه ۳ نکته: مجموعه نقاطی که از نقطه O به فاصله r هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r است.

با توجه به نکته بالا، مجموعه نقاطی که از نقطه A(1, 2) به فاصله ۲ هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ است. بنابراین بی‌شمار نقطه با این خاصیت وجود دارد.

۱۰ - گزینه ۱ از آنجا که خط d نیم‌ساز زاویه AOB است، بنابراین طول AC و CB برابر است. بنابراین طبق قضیه فیثاغورس $OA = OB = 4$ و شعاع دایره رسم شده نیز برابر ۴ است که در این صورت طول OD = ۴ و CD = ۱ است.

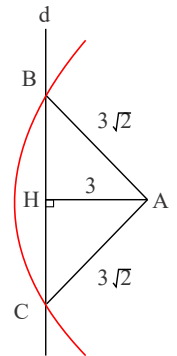


۱۱ - گزینه ۴ از آنجایی که $\triangle AHB$ مثلث قائم‌الزاویه است؛ داریم:

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \rightarrow 3^2 + BH^2 = (3\sqrt{2})^2 \rightarrow$$

$$BH^2 = 9 \rightarrow \boxed{BH = 3} \rightarrow \boxed{BC = 6}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{3 \times 6}{2} \Rightarrow \boxed{S_{\triangle ABC} = 9 \text{ cm}^2}$$



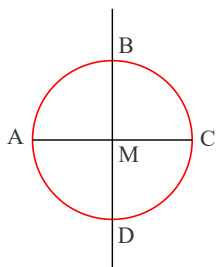
اگر قضیه فیثاغورث در مثلث ABC برقرار باشد، نتیجه می‌گیریم که این مثلث قائم‌الزاویه است؛ داریم:

$$AB^2 + AC^2 \stackrel{?}{=} BC^2 \rightarrow (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 \stackrel{?}{=} (6)^2$$

$$\rightarrow 18 + 18 = 36 \rightarrow \text{مثلث قائم‌الزاویه است. } \triangle ABC$$

۱۲ - گزینه ۳

دایره به مرکز M و شعاع AM را رسم می‌کنیم و مشاهده می‌شود که نقاط A, B, C, D محل‌های تلاقی دو قطر عمود بر هم با دایره هستند پس ABCD مربع است.



۱۳ - گزینه ۱ تمام نقاطی که روی نیم‌ساز زاویه O قرار دارند، از دو خط d و d' به یک فاصله می‌باشند و تعداد این نقاط بی‌شمار است.

نقاطی که از نقطه O به یک فاصله باشند روی دایره به مرکز O و شعاع‌های متفاوت است. اما باید توجه کرد که طول شعاع دایره به مرکز O و نقطه C روی نیم‌ساز که دایره را قطع کرده است

همواره بیش‌تر از فاصله نقطه C تا دو خط d و d' است. بنابراین هیچ نقطه‌ای مشخصات خواسته شده در سؤال را ندارد.



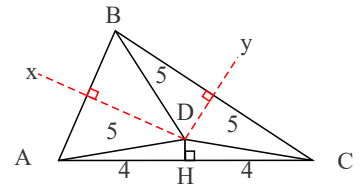
۱۴ - گزینه ۴ شرط اینکه دایره به مرکز O از نقطه های A, B, C, D بگذرد این است که $OA = OB = OC = OD = R$ یعنی نقطه O روی عمودمنصف پاره خط AB, CD و همبطور AD و BC باشد.

۱۵ - گزینه ۱ چون ۳ عمودمنصف در یک مثلث هم رس هستند پس نقطه D روی عمودمنصف AC هم قرار دارد و ضمناً $BD = AD = CD = ۵$

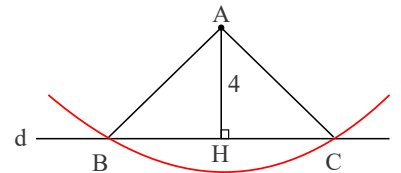
$$AH = \frac{AC}{2} = ۴$$

$$\rightarrow \triangle ADH : AD^2 = AH^2 + DH^2$$

$$\rightarrow ۵^2 = ۴^2 + DH^2 \rightarrow DH^2 = ۹ \rightarrow \boxed{DH = ۳}$$



۱۶ - گزینه ۲



$$S_{\triangle ABC} = \frac{AH \times BC}{2} \rightarrow ۱۲ = \frac{۴ \times BC}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{BC = ۶} \rightarrow BH = \frac{BC}{2} \rightarrow \boxed{BH = ۳}$$

$$\rightarrow \triangle ABH : AB^2 = AH^2 + BH^2 \rightarrow AB^2 = ۴^2 + ۳^2 \rightarrow \boxed{AB = ۵}$$

باید دایره به مرکز A و با شعاع ۵ رسم کنیم.

۱۷ - گزینه ۳

$$\left. \begin{array}{l} \hat{AOM} = \hat{BOM} \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \\ OM = \text{مشترک} \end{array} \right\} \triangle OAM \cong \triangle OBM \rightarrow \begin{cases} MA = MB \\ OA = OB \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = ۳y \\ x + 1 = ۲x - ۲y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - ۳y = ۰ \\ -x + ۲y = -1 \end{cases} +$$

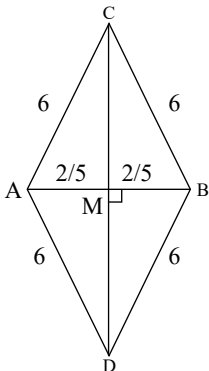
$$-y = -1 \rightarrow \boxed{y = 1}, \boxed{x = ۳} \rightarrow \boxed{x + y = ۴}$$

۱۸ - گزینه ۲ نقطه M از A و B به یک فاصله است \leftarrow نقطه M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

نقطه M از B و C به یک فاصله است \leftarrow نقطه M روی عمودمنصف BC قرار دارد.

بنابراین نقطه M محل برخورد عمودمنصف های AB و BC است.

۱۹ - گزینه ۲ نقاطی که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف AB قرار دارند و مطابق شکل دو نقطه C و D داریم که فاصله آن از دو نقطه A و B ، ۶ سانتی متر است.

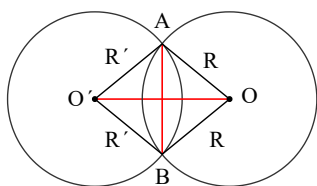


۲۰ - گزینه ۲ فقط در چندضلعی های منتظم نقطه تقاطع عمودمنصف های اضلاع و نقطه تقاطع نیم سازه های زاویه ها بر هم منطبق است و با توجه به شکل های داده شده، مربع و شش ضلعی منتظم این خاصیت را دارند.

۲۱ - گزینه ۴

نقطه O روی عمودمنصف AB است. $OA = OB = R \rightarrow$

نقطه O' روی عمودمنصف AB است. $O'A = O'B = R' \rightarrow$



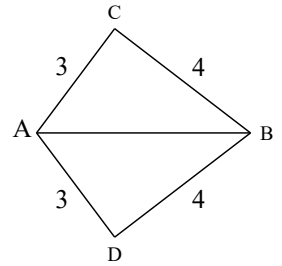
پس خط گذرنده از نقاط O و O' عمودمنصف پاره خط AB است و هر نقطه واقع بر پاره خط OO' از نقاط A و B به یک فاصله است. بنابراین بی شمار نقطه M داریم که از نقاط A و B به یک فاصله هستند.

۲۲ - گزینه ۱



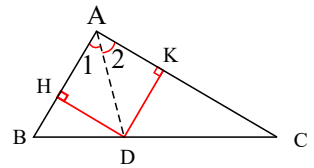
پس نقطه M روی نیمساز داخلی زاویه A قرار دارد.

۲۳ - گزینه ۴



چهارضلعی ACBD دارای دو زاویه قائمه است.

۲۴ - گزینه ۴



$$\begin{aligned} \triangle ABC : AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ 5^2 &= 3^2 + 4^2 \rightarrow \hat{C} = 90^\circ \\ \triangle ABD : AB^2 &= AD^2 + BD^2 \\ 5^2 &= 3^2 + 4^2 \rightarrow \hat{D} = 90^\circ \end{aligned}$$

$$\hat{A} = 90^\circ \rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow 5^2 + AC^2 = 13^2$$

$$\rightarrow AC^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow \boxed{AC = 12}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \rightarrow DH = DK$$

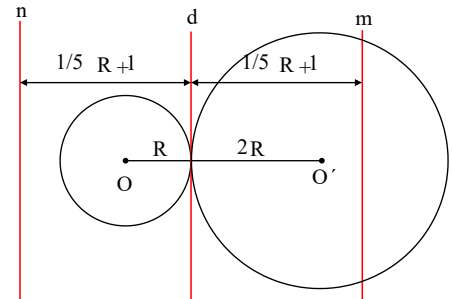
$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times DH}{\frac{1}{2} AC \times DK} = \frac{AB}{AC} \times \frac{DH}{DK} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$$

۲۵ - گزینه ۲ حالت اول: دو دایره مماس خارج باشند.

دو خط m و n وجود دارند که از خط d به فاصله $1,5R + 1$ هستند و فقط یکی از این دو خط باید با یک دایره دو نقطه تقاطع داشته باشد و این خط فقط دایره بزرگتر را قطع می کند و دایره کوچکتر را قطع نمی کند و داریم:

$$\begin{cases} 1,5R + 1 > 2R \rightarrow 1 > 0,5R \rightarrow 2 > R \\ 1,5R + 1 < 4R \rightarrow 1 < 2,5R \rightarrow \frac{2}{5} < R \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{2}{5} < R < 2}$$

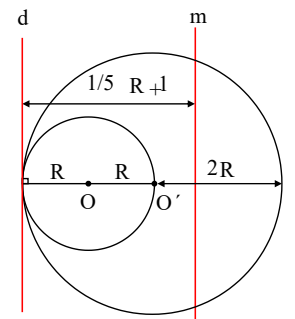


حالت دوم: دو دایره مماس داخل باشند.

در این حالت هم داریم:

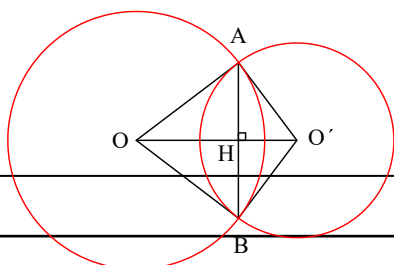
$$\begin{cases} 1,5R + 1 > 2R \rightarrow 1 > 0,5R \rightarrow 2 > R \\ 1,5R + 1 < 4R \rightarrow 1 < 2,5R \rightarrow \frac{2}{5} < R \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{2}{5} < R < 2}$$



۲۶ - گزینه ۳

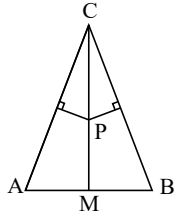
OO' عمود منصف AB است پس الف، ب و پ صحیح می باشند و ت نادرست است.





$$\triangle BDH : \tan 30^\circ = \frac{DH}{BH} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{8}{3}}{BH} \rightarrow BH = \frac{8}{\sqrt{3}}, BC = 2BH \rightarrow BC = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} DH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{64}{3\sqrt{3}}$$



۲۸ - گزینه ۴

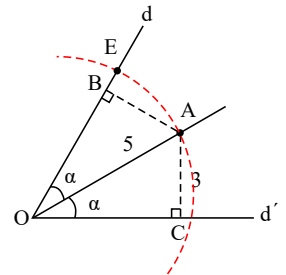
سه عمودمنصف در هر مثلث، هم‌رس هستند. یعنی در شکل مقابل میانه CM علاوه بر میانه بودن، باید عمودمنصف ضلع AB هم باشد. یعنی میانه، ارتفاع و عمودمنصف ضلع AB با هم یکی هستند. پس $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است و داریم: $AC = BC$.

$$AC = AB = 3, OB = OC$$

$$OB^2 + AB^2 = OA^2 \rightarrow OB^2 + 3^2 = 5^2 \rightarrow \boxed{OB = 4}$$

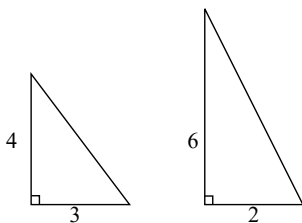
$$\rightarrow BE = OE - OB = 5 - 4 \rightarrow \boxed{BE = 1}$$

۲۹ - گزینه ۱ نقطه A روی نیمساز $\triangle BOC$ قرار دارد. پس داریم:



۳۰ - گزینه ۳ اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهای منصف یکدیگرند و برعکس (قضیه شرطی).
تشریح گزینه‌های دیگر:

گزینه ۱: دو مثلث قائم‌الزاویه زیر هم مساحت هستند اما هم‌نهشت نیستند:



گزینه ۲: اگر مثلث دو زاویه برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است، اما همواره متساوی‌الاضلاع نیست.
گزینه ۴: اگر چهارضلعی قطرهاش عمودمنصف یکدیگر باشند، لوزی است اما همواره مربع نیست.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۲	۱۱ - ۴	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳
۲ - ۲	۷ - ۴	۱۲ - ۳	۱۷ - ۳	۲۲ - ۱	۲۷ - ۲
۳ - ۴	۸ - ۳	۱۳ - ۱	۱۸ - ۲	۲۳ - ۴	۲۸ - ۴
۴ - ۴	۹ - ۳	۱۴ - ۴	۱۹ - ۲	۲۴ - ۴	۲۹ - ۱
۵ - ۳	۱۰ - ۱	۱۵ - ۱	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۳