نام آزمون: فصل پنجم حسابان ۱

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر بازهٔ $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

۲ - تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x>2 \\ x+3 & x<2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا تابع f در نقطهٔ $x=2$ تعریف شده است؟

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را به‌دست آورید.

۳ - تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\begin{cases} -1 & x\in\mathbb{Z} \\ 2 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار g را در فاصلهٔ $[-4, 2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} g(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

۴ - نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

۵ - تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{g(x)}{x^{۲}-۱} = ۴$

۶ - تابع $f(x)=[x]$ در بازهٔ $(۲,K)$ پیوسته است. حداکثر مقدار K چقدر است؟

۷ - بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۸ - مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱-\cos x}{x^{۲}} & x>۰ \\ b-۱ & x=۰ \\ x-۲a & x<۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد.

۹ - تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}$ را در نظر بگیرید:

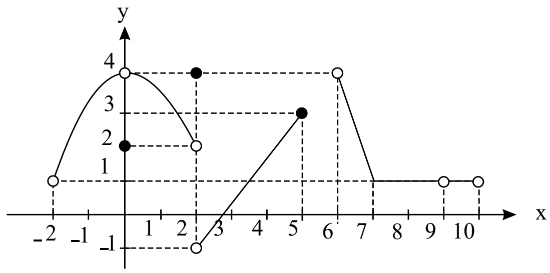
الف) دامنهٔ تابع f را به‌دست آورید.

ب) دامنهٔ تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ)آیا این تابع در همسایگی ۹٫۰ تعریف شده است؟

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=۱$ چطور؟

۱۰ – نمودار تابع f به‌صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۶^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۸} f(x)$

چ) $\lim\limits_{x\to ۹} f(x)$

۱۱ – با توجه به دامنهٔ تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^{۲}-x}$ در نقطهٔ $x=۱$ چه می‌توان گفت؟

۱۲ – با توجه به دامنهٔ تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-۲}$ در نقطهٔ $x=۲$ چه می‌توان گفت؟

۱۳ – با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-۱)^{۲}+۲$ حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]$

ب) $[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)]$

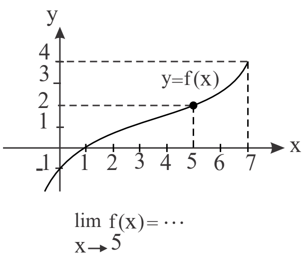
([ ] نماد جزء صحیح است.)

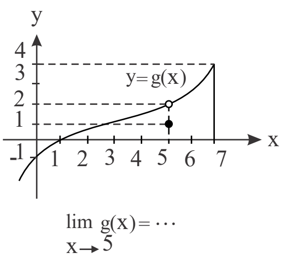
۱۴ - با رسم نمودار تابع $f(x) = |x|$:

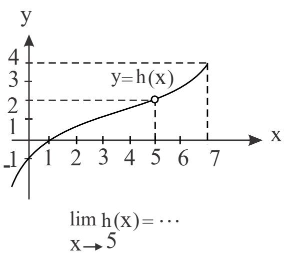
الف) مقدار $\lim\limits_{x \to ۰} |x|$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $a \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد، آیا تساوی $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$ برقرار است؟

۱۵ - نمودار سه تابع f, g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ ۵ $x =$ مشخص کنید.







۱۶ - با تکمیل هریک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه مورد نظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} (-۳x + ۴) = \dots$

x	-۱	$-۰٫۹$	$-۰٫۱$	$-۰٫۰۱$	$\to$	۰	$\leftarrow$	$۰٫۰۰۱$	$۰٫۰۱$	$۰٫۱$	$۰٫۵$	۱
$f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\to$	$?$	$\leftarrow$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

ب) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = \dots \quad f(x) = \begin{cases} x - ۴ & x \neq -۱ \\ ۳ & x = -۱ \end{cases}$

x	-۲	$-۱٫۵$	$-۱٫۱$	$-۱٫۰۱$	$-۱٫۰۰۱$	$\to$	-۱	$\leftarrow$	$-۰٫۹۹۹$	$-۰٫۹۹$	$-۰٫۹$	$-۰٫۸$
$f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\to$	$?$	$\leftarrow$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

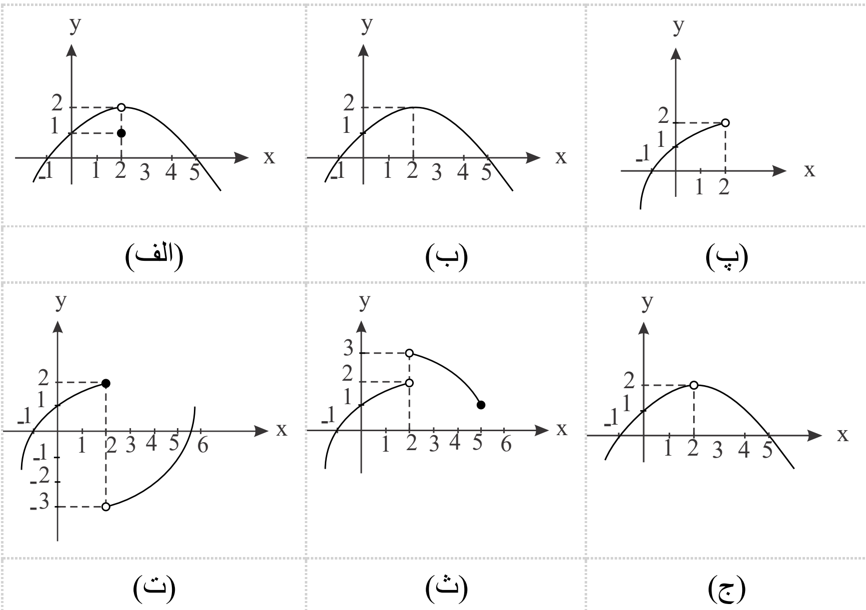
۱۷ - با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x>۰\\ x^۲+۲x & x<۰\end{cases}$ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد .... نزدیک می‌شوند، بنابراین : $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=...$

ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد دارد؟ چرا؟

۱۸ - با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



(الف) (ب) (پ) (ت) (ث) (ج)

تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است.

تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد.

۱۹ - فرض کنید f یک تابع باشد بطوریکه $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۳$. آیا می‌توان گفت f حتما تابع ثابت ۳ است؟

۲۰ - توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y = 3x + 2 \quad , \quad y = x^2 - 1 \quad , \quad y = [x] - 1 \quad , \quad y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

الف) مقدار حد هریک از توابع فوق در $x = 1$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

هر سه تابع f و g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x) = \dots$	$g(x) = \dots$	$f(x) + g(x) = \dots$
تابع $f \cdot g$ در ۱ حد دارد، اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x) = \dots$	$g(x) = \dots$	$f(x) \cdot g(x) = \dots$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x) = \dots$	$g(x) = \dots$	$\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$
تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x) = \dots$		$f^2(x) = \dots$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x) = \dots$		$\sqrt{f(x) = \dots}$

۲۱ - اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

۲۲ - مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -1$ حد داشته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$$

۲۳ - اگر $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2 - x - 1}$ و $g(x) = \dfrac{2x+1}{x}$، حاصل $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) \cdot g(x)$ را بیابید.

۲۴ – الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطهٔ ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطهٔ یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۲۵ – نشان دهید به‌ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

الف

$$f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ a & x=0 \\ 2x+1 & x>0 \end{cases}$$

ب

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

۲۶ - مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

ب

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x}$$

پ

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{|1-\cos x|}$$

ت

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۲ - ۲\cos ۲x}{x\sin x}$$

ث

$$\lim_{x\to -\pi} \frac{\cos x + ۱}{x+\pi}$$

ج

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$$

چ

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x - ۲\pi}$$

ح

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۲x - ۳\sqrt{x} + ۱}{x - ۱}$$

۲۷ - مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x^۲ + x - ۱}{۳x^۲ + ۳x}$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲ [x] - ۸}{x - ۲}$$

پ

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$$

ت

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$$

ث

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$$

ج

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

۲۸ - مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x\to ۹} (\sqrt{x} - ۹)^{۳}$$

ب

$$\lim_{x\to -۱} (-۶x^{۷} - ۴x^{۲} + ۵)$$

پ

$$\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}} \frac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^{۳}+۱)}$$

ت

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}^{+}} \frac{۱ - x^{۲}}{x^{۲} - ۴}$$

ث

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{4x^{2}+6x}$$

ج

$$\lim_{x\to 0^{+}} \frac{\sin x}{x+\cos x}$$

چ

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x-\pi}$$

۲۹ - با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف

$y = |x - 1| + 2$

ب

$y = x - [x]$

پ

$y = [x] + [-x]$

ت

$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

۳۰- در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطهٔ $x = 1$ پیوسته باشد

الف

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۱ \\ a & x=۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$$

ب

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x\neq ۱ \\ a & x=۱ \end{cases}$$

پ

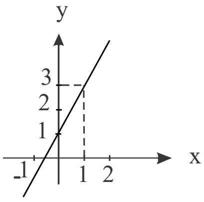
$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ۰<x<۱ \\ [x]+a & x\geq ۱ \end{cases}$$

ت

$$k(x)=([x]-a)[x]$$

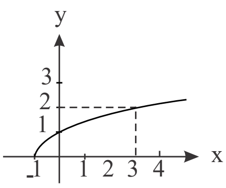
۳۱ – با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.

الف



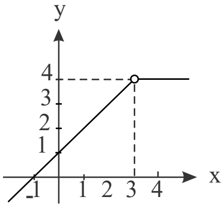
$$\lim_{x\to ۱}(۲x+۱)$$

ب



$$\lim_{x\to -۱}\sqrt{x+۱}$$

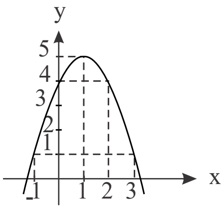
پ



$$f(x) = \begin{cases} ۴ & x > ۳ \\ x + ۱ & x < ۳ \end{cases}$$

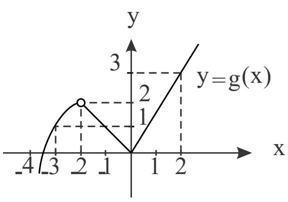
$$\lim_{x \to ۳} f(x)$$

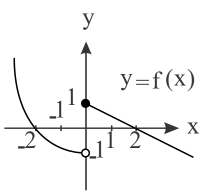
ت



$$\lim_{x \to ۲} (-x^{۲} + ۲x + ۴)$$

۳۲ – در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها مقدار حدهای زیر را بیابید.





الف

$\lim\limits_{x\to -۲}(۲g(x)-f(x))$

ب

$\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

پ

$\lim\limits_{x\to -۳} -۳\sqrt{g(x)}$

ت

$\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}$

پاسخنامه تشریحی

۱ -

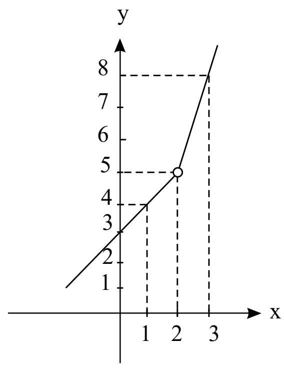
$$۲ \in (x-۱, ۲x+۳) \Rightarrow x-۱ < ۲ < ۲x+۳$$

$$\left.\begin{array}{l} x-۱<۲ \Rightarrow x<۳ \\ ۲x+۳>۲ \Rightarrow x>-\frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} -\frac{۱}{۲}<x<۳$$

۲ - الف) تابع f در نقطهٔ ۲ $x=۲$ تعریف نشده است.

ب)

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x>۲ \quad \begin{array}{c|c} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۸ \end{array} \\ x+۳ & x<۲ \quad \begin{array}{c|c} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{array} \end{cases}$$

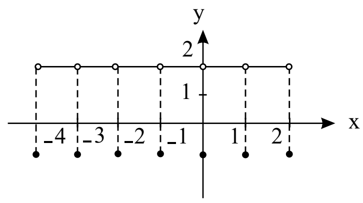


x	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	$\rightarrow$ ۲ $\leftarrow$	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱
$f(x)$	۴٫۹	۴٫۹۹	۴٫۹۹۹	$\rightarrow$ ۵ $\leftarrow$	۵٫۰۰۳	۵٫۰۳	۵٫۳

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۵$$

۳ - الف)

$$g(x)=\begin{cases} -۱ & x\in\mathbb{Z} \\ ۲ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$



ب)

$$\lim_{x\to ۱} g(x)=۲ \quad , \quad \lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x)=۲$$

۴ - چون $\lim_{x\to a} f(x)=L$ یعنی f در نقطهٔ $x=a$ حد دارد پس طبق قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=L-L=۰$$

عکس این مطلب هم صحیح است یعنی با فرض $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$ داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-L+L)=\lim_{x\to a}(f(x)-L)+\lim_{x\to a} L=۰+L=L$$

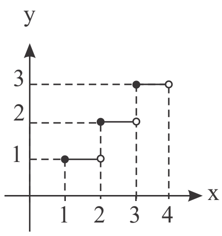
۵ - چون تابع g در $x=۲$ باید حد داشته باشد پس داریم:

$$\frac{\lim_{x\to ۲} g(x)}{\lim_{x\to ۲}(x^۲-۱)}=۴ \Rightarrow \frac{\lim_{x\to ۲} g(x)}{۳}=۴ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} g(x)=۱۲$$

تابع g باید تابعی باشد که در $x=۲$ حدی برابر ۱۲ داشته باشد مانند:

$$g(x)=۶x \Rightarrow \lim_{x\to ۲} g(x)=\lim_{x\to ۲} ۶x=۱۲$$

۶ - با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ داریم: تابع در بازهٔ $(۲,۳)$ پیوسته است پس حداکثر K برابر ۳ است.



۷ - دامنهٔ تابع را می‌یابیم.

$$f(x) = ۲ - \sqrt{۳ - x} \rightarrow ۳ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۳ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۳]$$

هر بازهٔ بسته‌ای که زیر مجموعه دامنهٔ تابع باشد، جواب مسئله است مانند $[۰, ۳]$

۸ -

$$L^+ = \lim_{x \to ۰^+} \frac{۱ - \cos x}{x^۲} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{۲\sin^۲(\frac{x}{۲})}{x^۲} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{۲(\frac{\sin \frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}} \times \frac{x}{۲})^۲}{x^۲} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{۲ \times \frac{x^۲}{۴}}{x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$L^- = \lim_{x \to ۰^-} (x - ۲a) = -۲a \,, \; f(۰) = b - ۱$$

$$\Rightarrow -۲a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{-۱}{۴} \;,\; b - ۱ = \frac{۱}{۲} \rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

۹ - الف)

$$f(x) = \frac{\sqrt{۱ - x^۲}}{x} \Rightarrow ۱ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow |x| \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱$$

$$x \neq ۰ \Rightarrow D_f = [-۱, ۱] - \{۰\}$$

ب) دامنهٔ تابع شامل همسایگی محذوف نقطهٔ $x = ۰$ می‌باشد.

پ) بله تابع در همسایگی ۰٫۹ مثلاً در بازهٔ $(۰٫۸, ۰٫۹۹)$ تعریف شده است.

ت) طبق دامنه، تابع در همسایگی چپ $x = ۱$ تعریف شده است ولی در همسایگی راست $x = ۱$ تعریف نشده است.

۱۰ -

الف) $\lim_{x \to ۰} f(x) = ۴$

ب) $\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۲ \,,\; \lim_{x \to ۲^+} f(x) = -۱ \Rightarrow \lim_{x \to ۲} f(x) =$ حد ندارد

پ) $\lim_{x \to ۵} f(x) =$ تابع در همسایگی راست ۵ تعریف نشده پس حد ندارد

ت) $\lim_{x \to ۶^-} f(x) =$ تابع در همسایگی چپ ۶ تعریف نشده پس حد ندارد

ث) $\lim_{x \to (-۲)^+} f(x) = ۱$

ج) $\lim_{x \to ۸} f(x) = ۱$

چ) $\lim_{x \to ۹} f(x) = ۱$

۱۱ -

$$f(x) = \sqrt{x^۲ - x} \Rightarrow x^۲ - x \geq ۰$$

x		0		1	
$x^2 - x$	+ ج	ج	−	ج	+ ج

$$D_f = (-\infty, ۰] \cup [۱, +\infty)$$

چون تابع در همسایگی چپ نقطهٔ $x = ۱$ تعریف نشده است پس حد چپ ندارد.

۱۲ -

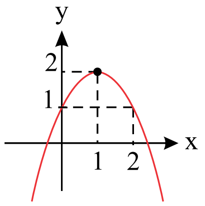
$$f(x) = \frac{x}{[x] - ۲} \quad [x] - ۲ = ۰ \rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow ۲ \leq x < ۳$$

$$D_f = \mathbb{R} - [۲, ۳) \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲) \cup [۳, +\infty)$$

چون تابع در همسایگی راست $x=2$ تعریف نشده است، پس حد راست ندارد.

۱۳ -

$$f(x)=-(x-1)^2+2 \quad \begin{vmatrix} x=1 \\ y=2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x=2 \\ y=1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x=0 \\ y=1 \end{vmatrix}$$



الف) زمانی که x به یک میل می‌کند، مقادیر تابع از پایین به ۲ نزدیک می‌شوند یعنی y ها با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می‌کنند. پس:

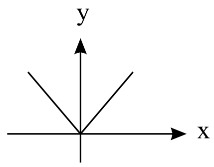
$$\lim_{x\to 1}[f(x)]=[2^-]=[2-\varepsilon]=1$$

ب) باید $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را یافته و از حاصل آن بصورت یک عدد مطلق براکت بگیریم.

$$[\lim_{x\to 1} f(x)]=[2]=2$$

۱۴ - الف)

$$\lim_{x\to 0}|x|=0$$



ب) اگر $a>0$ باشد، x در یک همسایگی a مثبت است و داریم:

$$\lim_{x\to a}|x|=\lim_{x\to a}x=a=|a|$$

و اگر $a<0$ باشد، x در یک همسایگی a منفی است و داریم:

$$\lim_{x\to a}|x|=\lim_{x\to a}(-x)=-a=|a|$$

پس: $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$

۱۵ -

$$\lim_{x\to 5}f(x)=2 \quad , \quad \lim_{x\to 5}g(x)=2 \quad , \quad \lim_{x\to 5}h(x)=2$$

۱۶ -

الف) $\lim\limits_{x\to 0}(-3x+4)=4$

x	-1	-0.9	-0.1	-0.01	$\to$	0	$\leftarrow$	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	7	6.7	4.3	4.03	$\to$	4	$\leftarrow$	3.997	3.97	3.7	2.5	1

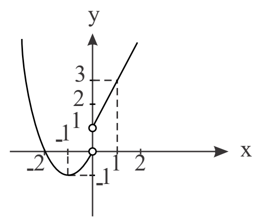
ب) $f(x)=\begin{cases} x-4 & x\neq -1 \\ 3 & x=-1 \end{cases} \qquad \lim\limits_{x\to -1}f(x)=5$

x	-2	-1.5	-1.1	-1.01	-1.001	$\to$	-1	$\leftarrow$	-0.999	-0.99	-0.9	-0.8
$f(x)$	-6	-5.5	-5.1	-5.01	-5.001	$\to$	-5	$\leftarrow$	-4.999	-4.99	-4.9	-4.8

۱۷ -

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1\ ,\ x>0 \to \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \\ x^2+2x\ ,\ x<0 \to \text{راس } x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1 \Rightarrow y=1-2=-1 \Rightarrow \text{راس } \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} \ ,\ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x=0, x=-2$$



الف) صفر، $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۰$

ب) اگر x از راست به صفر نزدیک شود، $f(x)$ به یک نزدیک می‌شود، پس: $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱$

پ) تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد ندارد زیرا حد چپ و راست تابع در نقطه $x=۰$ دو عدد متفاوت هستند.

۱۸ – پاسخ: مورد اول ← تابع (ج)

مورد دوم ← تابع (الف)

مورد سوم ← توابع (پ)، (ت) و (ث)

مورد چهارم ← تابع (ب)

مورد پنجم ← تابع (ج)

مورد ششم ← توابع (ت)، (ث)

۱۹ – خیر الزاماً تابع f تابع ثابت نمی‌باشد. مثلا تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=(x-۱)(x-۲)+۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=۳, \lim_{x\to ۲} f(x)=۳$$

f تابع ثابت نمی‌باشد.

۲۰ – الف)

$$y=۳x+۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}(۳x+۲)=۳+۲=۵$$

$$y=x^۲-۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}(x^۲-۱)=۱-۱=۰$$

$$y=[x]-۱ \Rightarrow \begin{cases} L^+=\lim_{x\to ۱^+} [x]-۱=۱-۱=۰ \\ L^-=\lim_{x\to ۱^-} [x]-۱=۰-۱=-۱ \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

$$y=\begin{cases} -۲ & x<۱ \\ ۲ & x>۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L^+=\lim_{x\to ۱^+} y=۲ \\ L^-=\lim_{x\to ۱^-} y=-۲ \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

هر سه تابع f و g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=۳x+۲$	$g(x)=x^۲-۱$	$f(x)+g(x)=x^۲+۳x+۱$
تابع $f\cdot g$ در ۱ حد دارد، اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=[x]-۱$	$g(x)=x^۲-۱$	$f(x)\cdot g(x)=(x^۲-۱)([x]-۱)$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=۳x+۲$	$g(x)=[x]-۱$	$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۳x+۲}{[x]-۱}$
تابع $f^۲$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\begin{cases} -۲ & x<۱ \\ ۲ & x>۱ \end{cases}$		$f^۲(x)=۴, x\neq ۱$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=x^۲-۱$		$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^۲-۱}$

۲۱ – تابع $g+f$ در a حد ندارد زیرا اگر فرض کنیم $h=f+g$ در a حدی برابر M داشته باشد یعنی $\lim\limits_{x\to a} h(x)=M$

چون f هم در a حدی برابر N دارد یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=N$ داریم:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)-f(x))=\lim_{x\to a}(h(x)-f(x))$$
$$=\lim_{x\to a} h(x)-\lim_{x\to a} f(x)=M-N$$

یعنی g در a حد دارد و این خلاف فرض است، پس تابع $h=f+g$ نمی‌تواند در a حد داشته باشد.

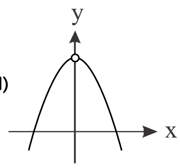
۲۲ –

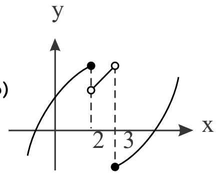
$$L^-=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x^۲+[x]}{|x|}=\frac{(-۱)^۲+(-۲)}{|-۱|}=\frac{۱-۲}{۱}=-۱$$
$$L^+=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} ۳x+b=-۳+b$$
$$L^+=L^- \Rightarrow -۳+b=-۱ \Rightarrow b=۲$$

۲۳ –

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\left(\frac{x+۱}{۲x^۲-x-۱}\times\frac{۲x+۱}{x}\right)=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{(x+۱)(۲x+۱)}{(۲x+۱)(x-۱)x}$$
$$=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{x+۱}{(x-۱)x}=\frac{-\frac{۱}{۲}+۱}{(-\frac{۱}{۲}-۱)(-\frac{۱}{۲})}=\frac{\frac{۱}{۲}}{(-\frac{۳}{۲})(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۲}{۳}$$

۲۴ –

الف)


ب)


پ) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1} \Rightarrow$ تابع در دو نقطهٔ $x=\pm 1$ ناپیوسته است.

۲۵ -

الف

$$L^-=\lim_{x\to 0^-} x=0\ ,\ L^+=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=1\ ,\ f(0)=a$$

$$L^-=L^+=f(0)\Rightarrow a=0=1$$

a نمی‌تواند هم صفر و هم یک باشد پس به‌ازای هیچ مقداری از a تابع پیوسته نمی‌باشد.

ب

$$g(0)=1\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a\ ,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{-x}=-a$$

$$a=-a=1\Rightarrow a=1\ ,\ a=-1$$

a نمی‌تواند هم ۱ و هم ۱− باشد، پس به‌ازای هیچ مقداری از a تابع پیوسته نمی‌باشد.

۲۶ -

الف

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\ ,\ x-\frac{\pi}{2}=t\ ,\ x=\frac{\pi}{2}+t\ ,\ t\to 0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+t)}{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{-\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{-2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\frac{t}{2})}{-\cos(\frac{t}{2})}=\frac{0}{1}=0$$

ب

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پ

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{|1-\cos x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{|2\sin^2(\frac{x}{2})|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2\sin^2(\frac{x}{2})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\times\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2(\frac{x}{2})^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

ت

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times 2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=4\times 1=4$$

ث

$$\lim_{x\to -\pi}\frac{1+\cos x}{x+\pi}\ ,\ x+\pi=t\Rightarrow x=t-\pi\ ,\ t\to 0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos(t-\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}}\times\frac{t}{2}\right)^2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2(\frac{t}{2})^2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}t=0$$

ج

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\ ,\ x-a=t\ ,\ x=a+t\ ,\ t\to ۰$$

$$\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(a+t)-\sin a}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin a\cos t+\cos a\sin t-\sin a}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin a(۱-\cos t)+\cos a\sin t}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin a\times ۲\sin^۲(\frac{t}{۲})+\cos a\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin a\times\frac{۱}{۲}t^۲+t\cos a}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{t(-\frac{t}{۲}\sin a+\cos a)}{t}=\lim_{t\to ۰}(-\frac{t}{۲}\sin a+\cos a)=\cos a$$

چ

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}\ ,\ x-\frac{\pi}{۳}=t\ ,\ x=\frac{\pi}{۳}+t\ ,\ t\to ۰$$

$$\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{۶(\frac{\pi}{۳}+t)-۲\pi}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{۶t}=\frac{۱}{۶}$$

ح

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}\qquad \sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^۲\ ,\ t\to ۱$$

$$\lim_{t\to ۱}\frac{۲t^۲-۳t+۱}{t^۲-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{(t-۱)(۲t-۱)}{(t-۱)(t+۱)}=\lim_{t\to ۱}\frac{۲t-۱}{t+۱}=\frac{۱}{۲}$$

- ۲۷

الف

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x-۱)}{۳x(x+۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{۲x-۱}{۳x}=\frac{-۲-۱}{-۳}=۱$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲[x]-۸}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x^۲-۸}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x^۲-۴)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}۲(x+۲)=۲\times ۴=۸$$

پ

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲-۴}{(x-۲)(x+۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(x+۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}=\frac{۱}{۴\times ۴}=\frac{۱}{۱۶}$$

ت

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}\times\frac{۲+\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}}\times\frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۹-۲x-۱)(۲+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{۲(۴-x)(۲+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۴}\frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۲(۲+\sqrt{x})}=\frac{۳+۳}{۲\times ۴}=\frac{۳}{۴}$$

ث

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x}\times\frac{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱+x-۱+x}{x(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۲x}{x(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲}{(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} = \frac{۲}{۱\times ۲} = ۱$$

ج

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x^۲-x)(\sqrt{x}+۱)}{(x-۱)(x+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{x(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(x-۱)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to ۱} \frac{x(\sqrt{x}+۱)}{x+\sqrt{x}} = \frac{۱\times ۲}{۲} = ۱$$

۲۸ -

الف

$$\lim_{x\to ۹} (\sqrt{x}-۹)^۳ = (\sqrt{۹}-۹)^۳ = (۳-۹)^۳ = (-۶)^۳ = -۲۱۶$$

ب

$$\lim_{x\to -۱} (-۶x^۷ - ۴x^۲ + ۵) = -۶(-۱)^۷ - ۴(-۱)^۲ + ۵ = ۶ - ۴ + ۵ = ۷$$

پ

$$\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}} \frac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^۳+۱)} = \frac{(-\frac{۵}{۳}+\pi)(-۵+۵)}{(-۵+۶)((-\frac{۵}{۳})^۳+۱)} = \frac{(-\frac{۵}{۳}+\pi)\times ۰}{۱(-\frac{۱۲۵}{۲۷}+۱)} = ۰$$

ت

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}^+} \frac{۱-x^۲}{x^۲-۴} = \frac{۱-(\sqrt{۲})^۲}{(\sqrt{۲})^۲-۴} = \frac{۱-۲}{۲-۴} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}$$

ث

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \sqrt{۴x^۲+۶x} = \sqrt{۴\times\frac{۱}{۴}+۶\times\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱+۳} = \sqrt{۴} = ۲$$

ج

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin x}{x+\cos x} = \frac{\sin ۰}{x+\cos ۰} = \frac{۰}{۰+۱} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

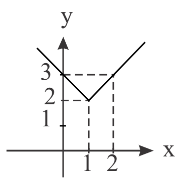
چ

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{|\cos x|}{x-\pi} = \frac{|\cos\frac{\pi}{۲}|}{\frac{\pi}{۲}-\pi} = \frac{۰}{-\frac{\pi}{۲}} = ۰$$

۲۹ -

الف

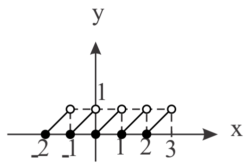
$y = |x-۱| + ۲ \Rightarrow$



تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.

ب

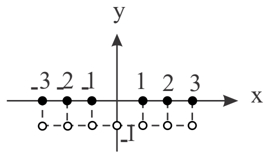
$y = x - [x]$



تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است و فقط پیوستگی راست دارد.

پ

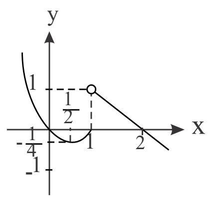
$$y = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است.

ت

$$y = \begin{cases} x(x-۱) & x \leq ۱ \to \text{راس} \left| \begin{matrix} \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۴} \end{matrix} \right. \\ -x+۲ & x > ۱ \to \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix} \right| \begin{matrix} ۲ \\ ۰ \end{matrix} \end{cases}$$



تابع در نقطهٔ $x = ۱$ ناپیوسته است و فقط پیوستگی چپ دارد.

۳۰ -

الف

$$L^- = \lim_{x \to ۱^-} (۲x - ۱) = ۱\,,\ L^+ = \lim_{x \to ۱^+} (-x + ۲) = ۱,\ f(۱) = a \Rightarrow \boxed{a = ۱}$$

ب

$$\lim_{x \to ۱} g(x) = \lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱} = \lim_{x \to ۱} (x + ۲) = ۳, g(۱) = a \Rightarrow \boxed{a = ۳}$$

پ

$$h(۱) = ۱ + a\,,\ L^+ = \lim_{x \to ۱^+} [x] + a = ۱ + a$$

$$L^- = \lim_{x \to ۱^-} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} \times \frac{\sqrt{x} + ۱}{\sqrt{x} + ۱} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{x - ۱}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ + a = \frac{۱}{۲} \to \boxed{a = -\frac{۱}{۲}}$$

ت

$$k(۱) = (۱ - a) \times ۱ = ۱ - a\,,\ L^+ = \lim_{x \to ۱^+} ([x] - a)[x] = (۱ - a) \times ۱ = ۱ - a$$

$$L^- = \lim_{x \to ۱^-} ([x] - a)[x] = (۰ - a) \times ۰ = ۰ \Rightarrow ۱ - a = ۰ \Rightarrow \boxed{a = ۱}$$

۳۱ -

الف

$$\lim_{x \to ۱} (۲x + ۱) = ۳$$

ب

$\lim_{x \to -۱} \sqrt{x + ۱} =$ حد ندارد.

پ

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = ۴$$

ت

$$\lim_{x\to ۲}(-x^{۲}+۲x+۴)=۴$$

- ۳۲

الف

$$\lim_{x\to -۲}(۲g(x)-f(x))=۲\lim_{x\to -۲}g(x)-\lim_{x\to -۲}f(x)=۲\times ۲-۰=۴$$

ب

$$\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)}\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to ۰^+}g(x)}{\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)}=\dfrac{۰}{۱}=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to ۰^-}g(x)}{\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)}=\dfrac{۰}{-۱}=۰\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)}=۰$$

پ

$$\lim_{x\to -۳}-۳\sqrt{g(x)}=-۳\sqrt{\lim_{x\to -۳}g(x)}=-۳\sqrt{۱}=-۳$$

ت

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}=۲\sqrt[۳]{\lim_{x\to ۲}g(x)}=۲\sqrt[۳]{۳}$$