نام آزمون: پیوستگی

سایت: ALIGEBRA.COM

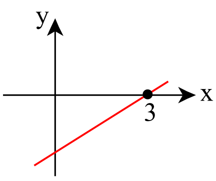
علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases} \dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & ;|x|>۱ \\ ۲x & ;|x|\leq ۱ \end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و ۱− چگونه است؟

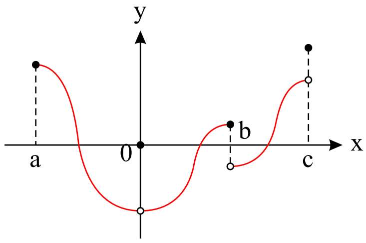
۲ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^۲+x-۲|}{x-۱} & ;x\neq ۱ \\ a & ;x=۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۳ - نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-x+b}{x-a} & ,x\neq a \\ -۵ & ,x=a \end{cases}$، به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



۴ - به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲+ax-۵ & x>۲ \\ ax-۱ & x\leq ۲ \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

۵ - نمودار تابع f به صورت مقابل است. این تابع درچند نقطه حد دارد ولی ناپیوسته است؟



۶ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} a+\sin 3x & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ b\cos 2x & \frac{\pi}{2}<x\le 2\pi \end{cases}$ با شرط $f(\frac{\pi}{2})=2$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ پیوسته است $a-b$ کدام است؟

۷ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x}{x^2-|x|} & ;|x|\neq 1 \\ 2 & ;|x|=1 \end{cases}$ در نقاط با طول‌های ۱- و ۱ چگونه است؟

۸ - تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases} \sin x+2\cos x & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ -\cos 2x & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ با تعریف $f(\frac{\pi}{2})=1$ از نظر پیوستگی در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ چگونه است؟

۹ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases} (x+3)[x] & x<3 \\ ax+3 & x\ge 3 \end{cases}$ در نقطه ای به طول $x=3$ پیوسته باشد آنگاه a کدام است؟

۱۰ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x[x] & ;x<3 \\ x^2+ax & ;x\geq 3 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=3$ پیوسته است. a کدام است؟

۱۱ - اگر $f(x)=\begin{cases} [-x] & ;x<-2 \\ \left|x-\dfrac{1}{a}\right| & ;x\geq -2 \end{cases}$ ، در $x=-2$ پیوسته باشد، آنگاه مقدار $f(a)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱۲ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{2x}}{2-x} & ;x\neq 2 \\ a & ;x=2 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x=2$ پیوسته است؟

۱۳ - به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x} & ;1\leq x\leq 6 \\ a+\cos^2\dfrac{\pi x}{36} & ;\quad x>6 \end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

۱۴ - در تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cot x-1}{\sin x-\cos x} & , \quad x\neq \frac{\pi}{4} \\ k & , \quad x=\frac{\pi}{4} \end{cases}$، به ازای کدام مقدار k تابع در $x=\dfrac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۱۵ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} -x^{۲}+۴ & x\geq ۱ \\ ax+۵x-a & x<۱ \end{cases}$ به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، در بازهٔ $[-۲,۲]$ پیوسته است؟

۱۶ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{۳x}-\sqrt{۱+۳x^{۲}-x^{۳}}}{(x-۱)^{۳}} & ; \quad x\neq ۱ \\ \dfrac{\sqrt{۳}}{۳}a & ; \quad x=۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=۱$ پیوسته است؟

۱۷ - تابع $f(x)=x[x]$ در بازهٔ $(-۱,k)$ پیوسته است، حداکثر مقدار k کدام است؟ ($[\ ]$، علامت جزء صحیح است.)

۱۸ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^{۲}-۶x+۹}}{۳-x} & ,x\neq ۳ \\ m & ,x=۳ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۳$ پیوستگی چپ داشته باشد، m کدام است؟

۱۹ - تابع $f(t) = \begin{cases} 6t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 2t + 10 & 1 \leq t \leq 10 \end{cases}$، جرم یک کودک تا ۱۰ سالگی را برحسب کیلوگرم تعیین می‌کند. این تابع در کدام یک از بازه‌های زیر ناپیوسته است؟

۲۰ - کدام یک از توابع زیر در $x = 2$ پیوستگی چپ دارد؟ ($[\,]$ نماد جزء صحیح است.)

۲۱ - تابع $f(x) = \begin{cases} x + a & x > 2 \\ 3x & x \leq 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است. a کدام است؟

۲۲ - تابع $f(x) = \sin x$ در چند نقطه از بازهٔ $[0, 2\pi]$ ناپیوسته است؟

۲۳ - تابع $f(x) = [x]$ در نقطهٔ $x = \sqrt{a}$ حد ندارد. مقدار a کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ ($[\,]$ نماد جزء صحیح است.)

۲۴ - چه تعداد از توابع زیر در $x = 1$ ناپیوسته‌اند؟

الف) $f(x) = (x-3)^2$ ب) $g(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ پ) $h(x) = \begin{cases} x + 1 & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2 - x & x < 1 \end{cases}$

پیوستگی

۲۵ – کدام تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته نیست؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۲۶ – چه تعداد از موارد زیر صحیح است؟

آ) توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

ب) تابع $y=\log_{0/1}(x-1)$ روی بازهٔ $(1,+\infty)$ پیوسته است.

پ) تابع $y=x^2-5x+6$ در نقاط $x=2$ و $x=3$ پیوسته نیست.

ت) تابع $y=\sqrt{x+1}$ در بازهٔ $(-1,+\infty)$ پیوسته است.

۲۷ – به‌ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , x\leq 2 \\ a|x-1| & , x>2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

۲۸ – تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2-x}+2a & , x>2 \\ ax+b & , x\leq 2 \end{cases}$ در $x=2$ پیوسته است. مقدار $f(0)$ کدام است؟

۲۹- در تابع $f(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin^{۲} x-\cos x\sin x}$ مقدار $f(\dfrac{\pi}{۴})$، را چه مقداری تعریف کنیم تا تابع در $x=\dfrac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد؟

۳۰- تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲|x|}{x} & , x>۱۰\\ ۲ & , x=۱۰\\ -۲([x]+[-x]) & , x<۱۰\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱۰$ چگونه است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۳۱- تابع $y=[-x]$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر پیوسته است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۳۲- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+m[x] & x>۲\\ ۱ & x=۲\\ x^{۳}-۳n & x<۲\end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=۲$ پیوسته باشد، حاصل mn کدام است؟

۳۳- اگر تابع $f(x)\begin{cases}\dfrac{-x^{۲}+x+۶}{x-۳} & x<۳\\ -۲x+b & x\geq ۳\end{cases}$ در $x=۳$ پیوسته باشد، خط $x=۵$ نمودار تابع f را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۳۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a[3x] - 1 & x \geq 2 \\ [2x] + a & x < 2 \end{cases}$، در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۳۵- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a \sin \dfrac{\pi x}{6} & , \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2 - 1} & , \quad x > 1 \end{cases}$ در R پیوسته باشد، a کدام است؟

۳۶- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{[x]} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ ax + 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۳۷- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x(x+3)} & x \neq 0 \\ 2a & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۳۸- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x[-x] & x < -2 \\ -2 & x = -2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{ax + 2a} & x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ پیوسته است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۳۹- اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|1+x|}{x^2-2x-3} & x<-1\\[2mm] ax+\dfrac{1}{a} & x\geq -1\end{cases}$ در $x=-1$ پیوسته باشد، a چند مقدار حقیقی می‌تواند داشته باشد؟

۴۰- تابع $f(x)=\begin{cases}|x| & , \quad |x|\leq 2\\ \frac{4}{x} & , \quad |x|>2\end{cases}$ با توجه به نمودارش در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

۴۱- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}a[2x]+[-x] & x>2\\ 5 & x=2\\ a[x^3]-[x] & x<2\end{cases}$ در نقطه‌ای به طول ۲ $x=2$ پیوستگی راست داشته باشد، مقدار a کدام است؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است.)

۴۲- کدام تابع در $x=1$ پیوسته است؟

۴۳- به ازای کدام مقدار α ، تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x} & , \quad \pi<x<2\pi\\[2mm] \dfrac{\pi}{x}+\dfrac{\alpha}{\pi} & , \quad 0<x\leq\pi\end{cases}$ در $x=\pi$ پیوسته است؟

۴۴- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x & ; \quad x\geq \frac{\pi}{3}\\ a+\cos x & ; \quad x<\frac{\pi}{3}\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{3}$ پیوسته است؟

۴۵- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2ax+b & x>2\\ 5 & x=2\\ x^2+bx-a & x<2\end{cases}$ همواره پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟

۴۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x^2-4} & x<2\\ k+[x] & x\geq 2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد، k کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۴۷- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\neq 1\\ 2x & x=1\end{cases}$ در نقطه‌ای با طول ۱ از راست پیوسته .... و از چپ پیوسته ....

۴۸- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{2x-2} & x<1\\ x^2-ax+a & x\geq 1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است؟

۴۹ - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۳}+x-۱۰}{x-۲} & x\neq ۲\\ b & x=۲\end{cases}$ در R پیوسته می‌باشد. $f(۲)$ کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x>۱ \text{ یا } x<-۱ \\ ۲x & -۱\leq x\leq ۱ \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x=۱$ و $x=-۱$ بدست آوریم.

$$x=۱\ :\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x-۱)=۱-۱=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۲(۱)=۲ \\ f(۱)=۲(۱)=۲ \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x=۱ \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x=-۱\ :\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^+} ۲x=۲(-۱)=-۲ \\ \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^-}(x-۱)=-۱-۱=-۲ \\ f(-۱)=۲(-۱)=-۲ \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x=-۱ \text{ پیوسته است.}$$

۲ - گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۱$ به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{+}|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)}=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{-}|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)}=-۳$$

این تابع در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد.

۳ - گزینه ۴ مقدار تابع در $x=۳$ برابر صفر است بنابراین باید کسر $\dfrac{x^۲-x+b}{x-a}$ به ازای $x=۳$ صفر گردد.

$$x=۳\to \frac{۹-۳+b}{۳-a}=۰\to ۶+b=۰\to b=-۶$$

چون تابع همواره پیوسته است پس باید در $x=a$ نیز پیوسته باشد. از طرفی چون $f(a)=-۵$ و $f(۳)=۰$ است پس $a\neq ۳$ است.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^۲-x-۶}{x-a}=\frac{۰}{۰}\longrightarrow a^۲-a-۶=۰\Rightarrow \begin{cases} a=-۲ & \text{ق.ق} \\ a=۳ & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

توجه کنید که چون مقدار کسر تابع به‌ازای $x=a$ صفر است ولی مقدار حد تابع برابر -۵ است پس مقدار صورت تابع نیز صفر است.

پس $a+b=-۸$ است.

۴ - گزینه ۱ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطهٔ مرزی آن، یعنی $x=۲$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases} \text{حد راست}=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x^۲+ax-۵)=۴+۲a-۵=۲a-۱ \\ \text{حد چپ}=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱ \end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۲$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a، تابع f روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

۵ - گزینه ۲ تابع در $x=b$ ، $x=c$ و $x=a$ حد ندارد و ناپیوسته می‌باشد و در $x=۰$ حد دارد ولی ناپیوسته است.

۶ - گزینه ۴ کافی است شرط پیوستگی را در $x=\dfrac{\pi}{۲}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x=\dfrac{\pi}{۲}$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} b\cos ۲x=b\cos\pi=-b \\ \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-}(a+\sin ۳x)=a+\sin\dfrac{۳\pi}{۲}=a-۱ \\ f(\frac{\pi}{۲})=۲ \end{cases}$$

پس: $-b=۲\to b=-۲\ ,\ a-۱=۲\to a=۳\to a-b=۵$

۷ - گزینه ۱ ابتدا تابع را ساده‌تر می‌نویسیم

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{x^۳-x}{x^۲-|x|} & ;x\neq \pm ۱\\ ۲ & ;x=\pm ۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-x}{x^۲-|x|}=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x^۲-۱)}{x^۲-x}=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)(x+۱)}{x(x-۱)}=۲$$

و $f(۱)=۲\rightarrow$ تابع در $x=۱$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-x}{x^۲-|x|}=\lim_{x\to -۱}\frac{x(x^۲-۱)}{x^۲+x}=\lim_{x\to -۱}\frac{x(x-۱)(x+۱)}{x(x+۱)}=\lim_{x\to -۱}(x-۱)=-۲$$

و $f(-۱)=۲\rightarrow$ تابع در $x=-۱$ پیوسته نیست.

۸ - گزینه ۴

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=\dfrac{\pi}{۲}$ بدست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}(-\cos ۲x)=۱\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}(\sin x+۲\cos x)=۱\\ f(\frac{\pi}{۲})=۱\end{array}\right\}\Rightarrow$$

تابع در $x=\dfrac{\pi}{۲}$ پیوسته است.

۹ - گزینه ۴

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۳$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(ax+۳)=۳a+۳\\ \lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}(x+۳)[x]=۶(۲)=۱۲\\ f(۳)=۳a+۳\end{array}\right\}\Rightarrow ۳a+۳=۱۲\Rightarrow ۳a=۹\Rightarrow a=۳$$

۱۰ - گزینه ۳

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۳$ باید باهم برابر باشند

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(x^۲+ax)=۹+۳a\\ \lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}x[x]=۳\left[۳^-\right]=۳\times ۲=۶\\ f(۳)=۹+۳a\end{array}\right\}\rightarrow ۹+۳a=۶\rightarrow ۳a=-۳\rightarrow a=-۱$$

۱۱ - گزینه ۱

با فرض پیوسته بودن $f(x)=\begin{cases}[-x] & , \quad x<-۲\\ |x-\frac{۱}{a}|, & x\geq -۲\end{cases}$ در $x=-۲$ داریم:

$$f(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}|x-\frac{۱}{a}|=\left|-۲-\frac{۱}{a}\right|\xlongequal{|f|=|-f|}|۲+\frac{۱}{a}|$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}[-x]=\left[-(-۲)^-\right]=\left[۲^+\right]=۲$$

شرط پیوستگی: $f(-۲)=\lim\limits_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}f(x)\Rightarrow|۲+\dfrac{۱}{a}|=۲\Rightarrow ۲+\dfrac{۱}{a}=\pm ۲$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲+\frac{۱}{a}=۲\rightarrow\frac{۱}{a}=۰ \text{ :امکان ندارد}\\ ۲+\frac{۱}{a}=-۲\Rightarrow\frac{۱}{a}=-۴\Rightarrow\frac{-۱}{۴}=a\end{cases}$$

$$f(a)=f(-\frac{۱}{۴})=|-\frac{۱}{۴}+۴|=\frac{۱۵}{۴}$$

۱۲ - گزینه ۳

شرط پوسیدگی تابع f در $x=a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to ۲}\frac{۱-\dfrac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x}}}{-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

پس $f(۲)=a=-\dfrac{۱}{۲}$ است

۱۳ - گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x=۶$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۶$ باید با هم برابر

باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۶^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^+}(a+\cos^۲\dfrac{\pi x}{۳۶})=a+\cos^۲\dfrac{\pi}{۶}=a+\dfrac{۳}{۴}\\ \lim\limits_{x\to ۶^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^-}\sin\dfrac{\pi}{x}=\sin\dfrac{\pi}{۶}=\dfrac{۱}{۲}\\ f(۶)=\sin\dfrac{\pi}{۶}=\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow a+\dfrac{۳}{۴}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow a=\dfrac{-۱}{۴}$$

۱۴ - گزینه ۱ شرط پیوستگی تابع در یک نقطه برابری حد چپ، حد راست مقدار تابع می‌باشد. لذا ابتدا باید $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} f(x)$ را محاسبه نماییم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cot x-۱}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-۱}{\sin x-\cos x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\sin x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-(\sin x-\cos x)}{\sin x(\sin x-\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-۱}{\sin x}$$

$$=\frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-\frac{۲}{\sqrt{۲}}=-\sqrt{۲}\to f(\frac{\pi}{۴})=k=-\sqrt{۲}$$

۱۵ - گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در $x=۱$ بررسی کنیم.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(-x^۲+۴)=-۱+۴=۳\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(ax+۵x-a)=a+۵-a=۵\\ f(۱)=-۱+۴=۳\end{cases}$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای a تابع f در بازهٔ $[-۲,۲]$ پیوسته نمی‌باشد.

۱۶ - گزینه ۲ شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۳x}-\sqrt{۱+۳x^۲-x^۳}}{(x-۱)^۳}=\frac{۰}{۰}$$

عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می کنیم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۳x}-\sqrt{۱+۳x^۲-x^۳}}{(x-۱)^۳}\times\frac{\sqrt{۳x}+\sqrt{۱+۳x^۲-x^۳}}{\sqrt{۳x}+\sqrt{۱+۳x^۲-x^۳}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳x-(۱+۳x^۲-x^۳)}{(x-۱)^۳(\sqrt{۳x}+\sqrt{۱+۳x^۲-x^۳})}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۳x^۲-۱+۳x}{(x-۱)^۳(\sqrt{۳x}+\sqrt{۱+۳x^۲-x^۳})}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^۳}{(x-۱)^۳(\sqrt{۳x}+\sqrt{۱+۳x^۲-x^۳})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{۳x}+\sqrt{۱+۳x^۲-x^۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$$

از طرفی مقدار تابع یعنی $f(۱)$ برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

پس: $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a\to ۶a=۳\to a=\frac{۱}{۲}$

۱۷ - گزینه ۴ ابتدا نقاط ناپیوستگی تابع $[x]$ را مشخص می‌نماییم.

این تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است.

نقاط ناپیوستگی $[x]$ در بازهٔ $(-۱,k)$ $=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$

با توجه به وجود عامل صفر شونده در $x=۰$ کنار تابع ناپیوستهٔ $[x]$ مشکل عدم پیوستگی تابع $f(x)$ در $x=۰$ حل خواهد شد. پس می‌توان گفت این تابع در بازهٔ $(-۱,۱)$ پیوسته است و $k=۱$ می‌باشد.

۱۸ - گزینه ۱ شرط پیوستگی چپ برابری، حد چپ و مقدار تابع می‌باشد پس کافیست ابتدا حد چپ را محاسبه نماییم

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{۳-x}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\sqrt{(x-۳)^۲}}{۳-x}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|}{۳-x}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{۳-x}=+۱$$

از طرفی $f(۳)=m$ می‌باشد. پس باید مقدار $m=۱$ باشد تا پیوستگی چپ برقرار باشد.

۱۹ - گزینه ۲ نکته: تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است هرگاه همهٔ شرایط زیر برقرار باشند:

۱) تابع $f(x)$ در تمام نقاط بازهٔ (a,b) پیوسته باشد.

۲) تابع $f(x)$ در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

۳) تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

نکته: توابع چندجمله‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

ابتدا توجه کنید که هر کدام از ضابطه‌های این تابع، چندجمله‌ای هستند، پس به‌تنهایی پیوسته‌اند. بنابراین فقط باید پیوستگی تابع را در نقطهٔ مرزی $t=۱$ بررسی کنیم:

$$f(۱)=۲(۱)+۱۰=۱۲\quad,\quad \lim_{t\to ۱^+} f(t)=۱۲\quad,\quad \lim_{t\to ۱^-} f(t)=۱۰$$

پس تابع $f(t)$ در $t=۱$ ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(t)$ در بازهٔ $[۰,۱۰]$ فقط یک نقطهٔ ناپیوستگی $(t=۱)$ دارد.

با توجه به گزینه‌ها، تابع در بازه‌های گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ پیوسته است. بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲۰ – گزینه ۳ **نکته:** تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=c$ از چپ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$$

با استفاده از نکتهٔ بالا، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^-}[x]=۱\\ f(۲)=۲\end{cases}\Rightarrow$ $f(x)$ در $x=۲$ پیوستگی چپ ندارد.

گزینهٔ ۲: $g(x)$ در سمت چپ $x=۲$ تعریف نشده است، پس در این نقطه حد چپ و در نتیجه پیوستگی چپ ندارد.

گزینهٔ ۳ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^-}\sqrt{۲-x}=۰\\ h(۲)=۰\end{cases}\Rightarrow$ $h(x)$ در $x=۲$ پیوستگی چپ دارد.

گزینهٔ ۴ : $k(x)$ در $x=۲$ تعریف نشده است، پس در این نقطه پیوستگی چپ ندارد.

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۲۱ – گزینه ۴ **نکته:** تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته است. هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(x)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x+a)=۲+a\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} ۳x=۶\\ f(۲)=۶\end{cases}\Rightarrow ۲+a=۶\Rightarrow a=۴$$

۲۲ – گزینه ۴ **نکته:** توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در کل $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

با توجه به نکتهٔ بالا، تابع $y=\sin x$ در کل بازهٔ $[۰,۲\pi]$ پیوسته است. پس نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۲۳ – گزینه ۳ **نکته:** تابع $f(x)=[x]$ فقط در نقاط به طول صحیح حد ندارد.

با توجه به نکتهٔ بالا، برای این‌که تابع $f(x)=[x]$ در نقطهٔ $x=\sqrt{a}$ حد نداشته باشد باید $\sqrt{a}$ عددی صحیح باشد. با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۲۴ – گزینه ۲ **نکته:** تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته است، هر گاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

با استفاده از نکتهٔ بالا، هر یک از موارد داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

الف) $f(x)=(x-۳)^۲\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱} f(x-۳)^۲=f(۱)=۴$

پس $f(x)$ در $x=۱$ پیوسته است.

ب) $g(x)=\dfrac{|x-۱|}{x-۱}=\begin{cases}۱ & x>۱\\ -۱ & x<۱\end{cases}$

$g(x)$ در $x=۱$ تعریف‌شده است، پس در این نقطه ناپیوسته است.

پ) $h(x)=\begin{cases}x+۱ & x>۱\\ ۲ & x=۱\\ ۲-x & x<۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to ۱^+} h(x)=۱+۱=۲\\ \lim_{x\to ۱^-} h(x)=۲-۱=۱\\ h(۱)=۲\end{cases}$

$h(x)$ در $x=۱$ ناپیوسته است.

بنابراین موارد «ب» و «پ» ناپیوسته‌اند. پس گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲۵ – گزینهٔ ۱ هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: تابع $f(x)=[x]$ فقط در $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است.

گزینهٔ ۲: تابع $f(x)=\sin x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

گزینهٔ ۳: تابع $f(x)=۲^x$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

گزینهٔ ۴: تابع $f(x)=(x^۲+۱)(۱-۵x^۳)$ تابعی چندجمله‌ای و در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۲۶ – گزینه ۳ موارد «آ»، «ب» و «ت» صحیح هستند و در مورد «پ» هم توابع چندجمله ای همواره پیوسته هستند پس مورد «پ» نادرست است و در مجموع ۳ مورد صحیح است.

۲۷ – گزینه ۲ تابع در دامنهٔ مربوط به هر دو ضابطه پیوسته است، بنابراین پیوستگی تابع در نقطهٔ مرزی $x=۲$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} a|x-۱|=a\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} ۲x-۱=۳\\ f(۲)=۲(۲)-۱=۳\end{array}\right\}\to x=۲ \text{ با توجه به پیوستگی تابع در } : \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)\to a=۳$$

۲۸ - گزینه ۳ چون تابع $f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است، حد چپ و راست در $x=۲$ و مقدار $f(۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{۲-x}+۲a=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}\,(x+۲)}{-\cancel{(x-۲)}}+۲a=-۴+۲a$$

$$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} ax+b=۲a+b$$

$$f(۲)=۲a+b$$

$$\Rightarrow x=۲ \text{ در } f(x) \text{ با توجه به پیوستگی } : \cancel{۲a}+b=-۴+\cancel{۲a}\Rightarrow \boxed{b=-۴}$$

بنابراین مقدار $f(۰)$ برابر است با:

$$\Rightarrow f(۰)\xlongequal{۲\le ۰\ (\text{ضابطهٔ دوم})} a(۰)+b=b=-۴$$

۲۹ - گزینه ۱ اگر تابع f در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، داریم: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} f(x)=f(\frac{\pi}{۴})$

$$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin^۲ x-\cos x\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-(\sin x-\cos x)}{\sin x(\sin x-\cos x)}=\frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۴})=-\sqrt{۲}$$

۳۰ - گزینه ۴

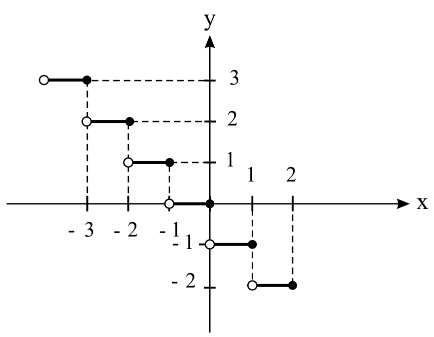
$$\lim\limits_{x\to ۱۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱۰^+}\frac{۲|x|}{x}=\lim\limits_{x\to ۱۰^+}\frac{۲x}{x}=۲$$

$$f(۱۰)=۲$$

$$\lim\limits_{x\to ۱۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱۰^-} -۲([x]+[-x])=-۲(-۱)=۲$$

$$\to \lim\limits_{x\to ۱۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱۰^-} f(x)=f(۱۰)\Rightarrow \text{تابع } f \text{ در } x=۱۰ \text{ پیوسته است.}$$

۳۱ - گزینه ۴



برای اینکه تابع در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد باید در تمام نقاط (a,b) پیوسته باشد. به علاوه در $x=a$ از راست پیوسته و در $x=b$ هم از چپ پیوسته شود.

گزینهٔ ۱: تابع در $x=۳$ پیوسته نیست.

گزینهٔ ۲: تابع باید در $x=۱$ از راست پیوسته باشد ولی با توجه به نمودار از چپ پیوسته است.

گزینهٔ ۳: تابع باید در $x=-۱$ از راست پیوسته باشد ولی از چپ پیوسته است.

گزینهٔ ۴: تابع در تمام نقاط $(-۳,-۲)$ پیوسته و در $x=-۲$ هم از چپ پیوسته است. پس گزینهٔ «۴» صحیح است.

۳۲ - گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (x^۲ + m[x]) = ۴ + m[۲^+] = ۴ + ۲m \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (x^۳ - ۳n) = ۸ - ۳n \\ f(۲) = ۱ \end{cases}$$

پس: $۸ - ۳n = ۱ \to ۳n = ۷ \to n = \frac{۷}{۳} \ , \ ۴ + ۲m = ۱ \to ۲m = -۳ \to m = -\frac{۳}{۲}$

$$\to mn = (-\frac{۳}{۲})(\frac{۷}{۳}) = -\frac{۷}{۲}$$

۳۳ - گزینه ۲

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۳$ بدست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^+} (-۲x + b) = -۶ + b \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{-x^۲ + x + ۶}{x - ۳} = \frac{۰}{۰} \to \lim \frac{-(x-۳)(x+۲)}{(x-۳)} = -۵ \\ f(۳) = -۶ + b \end{array}\right\} \Rightarrow -۶ + b = -۵ \to b = ۱$$

وقتی گفته می‌شود خط $x=۵$ نمودار تابع f را با چه عرضی قطع می‌کند یعنی $f(۵)$ را خواسته است.

$$f(۵) = -۱۰ + b = -۱۰ + ۱ = -۹$$

۳۴ - گزینه ۳ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (a[۳x] - ۱) = a[۶^+] - ۱ = ۶a - ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} ([۲x] + a) = [۴^-] + a = ۳ + a \\ f(۲) = a[۶] - ۱ = ۶a - ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۶a - ۱ = ۳ + a \Rightarrow ۵a = ۴ \Rightarrow a = \frac{۴}{۵}$$

۳۵ - گزینه ۱

کافی است پیوستگی تابع را در $x=۱$ بررسی کنیم. برای این منظور باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۱$ با هم برابر باشند.

$$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (\frac{۱}{x-۱} - \frac{۲}{x^۲-۱}) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (\frac{۱}{x-۱} - \frac{۲}{(x+۱)(x-۱)})$$

$$= \lim\limits_{x\to ۱^+} (\frac{x+۱-۲}{(x+۱)(x-۱)}) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (\frac{(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} a\sin\frac{\pi x}{۶} = a\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{a}{۲}$$

$$f(۱) = a\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{a}{۲}$$

بنابراین: $\frac{a}{۲} = \frac{۱}{۲} \to a = ۱$

۳۶ - گزینه ۳ شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (ax + ۱) = ۲a + ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{x}{[x]} = \frac{۲}{[۲^-]} = \frac{۲}{۱} = ۲ \\ f(۲) = ۲a + ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a + ۱ = ۲ \to a = \frac{۱}{۲}$$

۳۷ - گزینه ۲ شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim\limits_{x\to ۰} (\frac{۱}{x} - \frac{۳}{x(x+۳)}) = \lim\limits_{x\to ۰} (\frac{x+۳-۳}{x(x+۳)}) = \lim\limits_{x\to ۰} (\frac{۱}{x+۳}) = \frac{۱}{۳}$$

$$f(۰) = ۲a$$

بنابراین $\frac{۱}{۶} = a \leftarrow \frac{۱}{۳} = ۲a$ است.

۳۸ - گزینه ۴ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۲)^+} \frac{x^۲ - ۴}{ax + ۲a} = \lim\limits_{x\to (-۲)^+} \frac{(x+۲)(x-۲)}{a(x+۲)} = \lim\limits_{x\to (-۲)^+} \frac{x-۲}{a} = -۴a$$

$$\lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۲)^-} x[-x] = -۲[-(-۲^-)] = -۲[۲^+] = -۲(۲) = -۴$$

$$f(-۲) = -۲$$

مقدار تابع با حد چپ تابع برابر نمی‌باشد پس تابع در $x=-۲$ ناپیوسته است.

۳۹ - گزینه ۳ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} ax+\frac{۱}{a}=-a+\frac{۱}{a}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{\overbrace{|۱+x|}^{-}}{x^۲-۲x-۳}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x+۱)}{(x-۳)(x+۱)}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-۱}{x-۳}=\frac{-۱}{-۴}=\frac{۱}{۴}$$

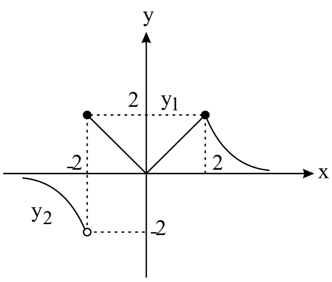
$$f(-۱)=-a+\frac{۱}{a}$$

پس: $-a+\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\times ۴a}-۴a^۲+۴=a\to ۴a^۲+a-۴=۰\to\Delta=b^۲-۴ac=۱+۶۴=۶۵>۰$

چون دلتا مثبت است بنابراین دو مقدار متمایز برای a موجود است.

۴۰ - گزینه ۲ با رسم نمودار تابع $y_۱=|x|$ در بازهٔ $[-۲,۲]$ و $y_۲=\frac{۴}{x}$ در $(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$ می‌توانیم تعداد نقاط ناپیوستگی آن را تعیین کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}|x| & ,\ -۲\le x\le ۲\\ \frac{۴}{x} & ,\ x<-۲\ ,\ x>۲\end{cases}$$



با توجه به نمودار f، این تابع فقط در یک نقطه یعنی $x=-۲$ ناپیوستگی دارد.

۴۱ - گزینه ۲ کافی است که حد راست تابع در ۲ $x=$ را برابر با مقدار تابع در ۲ $x=$ قرار دهیم.

$$\lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+}(a[۲x]+[-x])=a[۴^+]+[-(۲^+)]=۴a-۳$$

توجه کنید برای محاسبه‌ی $\lim_{x\to۲^+}[-x]$ بدین صورت نیز می‌توانیم عمل کنیم:

$$x\to۲^+ : x>۲\to -x<-۲\xrightarrow{\text{داخل جزء صحیح از } -۲ \text{ کمتر است}}\left[(-۲)^-\right]=-۳$$

$$f(۲)=۵\to ۴a-۳=۵\to ۴a=۸\to a=۲$$

۴۲ - گزینه ۴

$$۱)\ f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x^۲} & ,\ x\ne ۱\\ ۰ & ,\ x=۱\end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to۱} f(x)=\lim_{x\to۱}(\frac{۱}{x^۲})=۱$ و $f(۱)=۰$.در $x=۱$ ناپیوسته است.

$$۲)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^۳-x}{x^۲-۱} & x\ne ۱\\ -۱ & x=۱\end{cases}\Rightarrow f(۱)=-۱\ ,\ \lim_{x\to۱} f(x)=\lim_{x\to۱}(\frac{x^۳-x}{x^۲-۱})$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{x(x^۲-۱)}{(x^۲-۱)}=\lim_{x\to۱}(x)=۱$$

با توجه به این‌که مقادیر حد چپ و راست و مقدار تابع در نقطهٔ $x=۱$ با هم برابر نیستند، تابع در این نقطه ناپیوسته است.

$$۳)\ f(x)=\begin{cases}x^۲+۱+\frac{|x-۱|}{x-۱} & ,\ x\ne ۱\\ ۳ & ,\ x=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to۱^+} f(x)=\lim_{x\to۱^+}(x^۲+۱+\frac{(x-۱)}{(x-۱)})=۳\\ f(۱)=۳\\ \lim_{x\to۱^-} f(x)=\lim_{x\to۱^-}(x^۲+۱+\frac{-(x-۱)}{(x-۱)})=۱\end{cases}$$

این تابع در نقطهٔ $x=۱$ فقط پیوستگی راست دارد اما ناپیوسته است.

$$۴)\ f(x)=\begin{cases}\frac{-x+|x-۲|}{x-۱} & ,\ x\ne ۱\\ -۲ & ,\ x=۱\end{cases}$$

توجه کنید که:

$x\to۱^+$ یا $x\to۱^-$ $\Rightarrow x-۲<۰$

$$\Rightarrow\left\{\lim_{x\to۱} f(x)=\lim_{x\to۱}(\frac{-x-(x-۲)}{x-۱})=\lim_{x\to۱}\frac{-۲(x-۱)}{x-۱}=-۲\right.$$

بنابراین تابع گزینهٔ «۴» در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است.

۴۳ - گزینه ۱

$$f(\pi)=\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{\pi}{x}+\frac{\alpha}{\pi}\right)=\frac{\pi}{\pi}+\frac{\alpha}{\pi}=1+\frac{\alpha}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{2}$$

برای آن که تابع f در $x=\pi$ پیوسته باشد باید $f(\pi)=\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^+}f(x)$، پس:

$$1+\frac{\alpha}{\pi}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{\pi}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{2}$$

۴۴ - گزینه ۲ باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{3}$ باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{3})^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{3})^+}\sin^2 x=\sin^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{3})^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{3})^-}(a+\cos x)=a+\cos\frac{\pi}{3}=a+\frac{1}{2}\\ f(\frac{\pi}{3})=\sin^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\to a=\frac{1}{4}$$

۴۵ - گزینه ۴ در $x=2$، حد راست و حد چپ و مقدار تابع با هم باید برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x^2+bx-a)=4+2b-a\\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(2ax+b)=4a+b\\ f(2)=5\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}4a+b=5\\2b-a=1\end{cases}\Rightarrow a=1\,,b=1$$

پس $a+b=2$ می باشد.

۴۶ - گزینه ۱

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=2$ بدست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(k+[x])=k+[2^+]=k+2\\ \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{\overbrace{|x-2|}^{-}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=-\frac{1}{4}\\ f(2)=k+[2]=k+2\end{array}\right\}\to k+2=-\frac{1}{4}\to k=-\frac{9}{4}$$

۴۷ - گزینه ۴

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0\\ f(1)=2\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$$

پس این تابع در $x=1$، هم از راست و هم از چپ ناپیوسته است.

۴۸ - گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=1$ بدست آوریم.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-ax+a)=1-a+a=1\\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{2x-2}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)}=1\\ f(1)=1-a+a=1\end{cases}$$

یعنی به ازای هر مقدار a، تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است.

۴۹ - گزینه ۲ کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=2$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^3+x-10}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+5)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}x^2+2x+5=13\to b=13$$

$$f(2)=b$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۸ - ۴	۱۵ - ۱	۲۲ - ۴	۲۹ - ۱	۳۶ - ۳	۴۳ - ۱
۲ - ۴	۹ - ۴	۱۶ - ۲	۲۳ - ۳	۳۰ - ۴	۳۷ - ۲	۴۴ - ۲
۳ - ۴	۱۰ - ۳	۱۷ - ۴	۲۴ - ۲	۳۱ - ۴	۳۸ - ۴	۴۵ - ۴
۴ - ۱	۱۱ - ۱	۱۸ - ۱	۲۵ - ۱	۳۲ - ۲	۳۹ - ۳	۴۶ - ۱
۵ - ۲	۱۲ - ۳	۱۹ - ۲	۲۶ - ۳	۳۳ - ۲	۴۰ - ۲	۴۷ - ۴
۶ - ۴	۱۳ - ۲	۲۰ - ۳	۲۷ - ۲	۳۴ - ۳	۴۱ - ۲	۴۸ - ۴
۷ - ۱	۱۴ - ۱	۲۱ - ۴	۲۸ - ۳	۳۵ - ۱	۴۲ - ۴	۴۹ - ۲