نام آزمون: محاسبه حد توابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x^2-3x+2}$ کدام است؟

۲ - حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{6}{x^2-2x} - \dfrac{x+1}{x-2}\right)$، کدام است؟

۳ - حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x|-1}{x^3+|x|-2}$ کدام است؟

۴ - حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x|-1}{x^3+|x|-2}$ کدام است؟

۵ - اگر $2\cos x \le f(x) \le 2+x^2$ باشد و تابع f در R حد داشته باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{f(x)}$ کدام است؟

۶ - حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}$ کدام است؟

۷ - اگر به ازای هر x، داشته باشیم $\cos x \leq 5-2f(x) \leq 1-x^2$ ، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ کدام است؟

۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$ کدام است؟

۹ - حد چپ تابع $f(x)=[2x-|x|]$ در $x=-1$ کدام است؟

۱۰ - در تابع $f(x)=\dfrac{|x^2-x-2|}{x^2-4}$ قدر مطلق تفاضل حد چپ و حد راست آن در $x=2$ کدام است؟

۱۱ - اگر به ازای هر x داشته باشیم $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2\cos x$ ، حد تابع $f(x) = \dfrac{x-1}{g(x)}$ در $x = 0$ کدام است؟

۱۲ - حد راست $f(x) = \dfrac{x}{2x + [x]}$ چه‌قدر از حد چپ آن در $x = 0$ بیش‌تر است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱۳ - اگر $f(x) = x^2[x]$ ، حاصل $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ کدام است؟([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱۴ - اگر در تابع $f(x) = \begin{cases} x - a & x \geq 1 \\ x^2 + 2a & x < 1 \end{cases}$ مقدار حد راست در $x = 1$ ، نصف حد چپ در این نقطه باشد، a کدام است؟

۱۵ - اگر داشته باشیم $4 - x^2 \leq f(x) \leq \sqrt{x^3 + 8}$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ کدام است؟

۱۶ - کدام‌یک از موارد زیر در مورد تابع $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ درست است؟

۱۷- اگر $f(x)=\dfrac{|x+۲|}{-x-۲}$ باشد، آنگاه چند مورد زیر نادرست است؟

الف) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=۱$

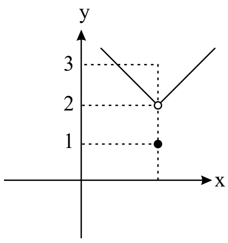
ب) $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=-۱$

پ) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ وجود ندارد.

ت) $\lim\limits_{x\to -۳} f(x)=۱$

۱۸- در کدام گزینه تساوی داده شده با توجه به شکل نادرست است؟

۱۹- نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر $g(x)=(x-۲)^۲+۱$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}[f(x)+g(x)]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)



۲۰- اگر تابع f در نقطهٔ $x=۵$ حد داشته باشد و بدانیم $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{۴f(x)-۳}{۲f(x)+۱}=۷$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ کدام است؟

۲۱ - به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)$ در $x=2$ حد دارد؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

$$f(x)=a\left[\frac{x}{2}\right]+2ax\left[-\frac{x}{2}\right]-\left[x^2\right]$$

۲۲ - حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^2-4}$ کدام است؟

۲۳ - حاصل $A=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+2\sin x\ \cos x}{[x]\cos^2 x+\sin^2 x}\times\dfrac{2}{\cos x+\sin x}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۲۴ - اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x^2-a} & , \quad x\geq 1\\ \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} & , \quad -2<x<1\\ b\,[x]+\frac{|x+2|}{x+2} & , \quad x\leq -2\end{cases}$ در $x=1$ و $x=-2$ حد داشته باشد، مقدار $2a\times b$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۲۵ - حاصل $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x+\sqrt{x+12}}$ کدام است؟

۲۶- اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+3x-b}{5x^2+x-6}=2$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۲۷- اگر $f(2x+3)=\dfrac{3x^2+x-2}{1-x^2}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

۲۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-7x+6}{2x^3-3x^2+1}$ کدام است؟

۲۹- حد تابع $f(x)=\dfrac{x^2-\sqrt{2x^2-x^3}}{3-\sqrt{1-4x}}$ وقتی $x\to -2$ کدام است؟

۳۰- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}}\dfrac{1+\cot x}{1+\tan x}$ کدام است؟

علی هاشمی

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt[۳]{۵x-۲}-۲}{x^۲-۳x+۲} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام صورت کسر را باید گویا و مخرج را تجزیه نمائیم

$$\lim \frac{\sqrt[۳]{۵x-۲}-۲}{x^۲-۳x+۲} \times \frac{(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)}{(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)}$$

$$\lim \frac{\overbrace{(۵x-۲-۸)}^{۵x-۱۰}}{(x-۲۰(x-۱)(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)}$$

$$\lim \frac{۵(\cancel{x-۲})}{(\cancel{x-۲})(x-۱)(\sqrt[۳]{(۵x-۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۵x-۲}+۴)} = \frac{۵}{۱۲}$$

۲ ـ گزینه ۱ برای رسیدن به مبهم شناخته شده ÷ باید بین دو کسر مخرج مشترک گرفت.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۶}{x^۲-۲x} - \frac{x+۱}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{۶-(x+۱)x}{x(x-۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{-x^۲-x+۶}{x(x-۲)}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{-\cancel{(x-۲)}\,(x+۳)}{\cancel{(x-۲)}\,x} = -\frac{۵}{۲}$$

۳ ـ گزینه ۲ در همسایگی $x=۱$ داخل قدر مطلق، مثبت است یعنی $|x|=x$ برای استخراج عامل صفرشونده مخرج می‌توان آن را بر عامل صفرشونده $(x-۱)$ تقسیم نمود:

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۳x^۲+۴ & x-۲ \\ \cline{2-2} & x^۲-x-۲ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{|x|-۱}{x^۳+|x|-۲} = \lim \frac{(x-۱)}{x^۳+x-۲} = \lim \frac{\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}\,(x^۲+x+۲)} = \frac{۱}{۴}$$

۴ ـ گزینه ۲ در همسایگی $x=۱$ داخل قدر مطلق، مثبت است یعنی $|x|=x$ است.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{x^۳+x-۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{۳x^۲+۱} = \frac{۱}{۴}$$

۵ ـ گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۰} \cos x = ۲(۱) = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۰} ۲+x^۲ = ۲+۰ = ۲ \end{array}\right. \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to ۰} f(x) = ۰$$

پس: $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x+۱}{f(x)} = \dfrac{۰+۱}{۲} = \dfrac{۱}{۲}$

۶ ـ گزینه ۱

حد داده شده را به دو حد $\frac{۰}{۰}$ تبدیل می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱} \left(\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)\cdot(\sqrt[۳]{x}-۱)}\right) = \lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱} \times \lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}} \times \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} \times \frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = ۲\times ۳ = ۶$$

۷ ـ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۰}(۱-x^۲) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۰} \cos x = ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to ۰}(۵-۲f(x)) = ۱ \to ۵-۲\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱ \to ۲\lim_{x\to ۰} f(x) = ۴ \to \lim_{x\to ۰} f(x) = ۲$$

۸ ـ گزینه ۴

روش اول:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+4\cos 2x}{2}=\frac{-1+4(1)}{2}=\frac{3}{2}$$

روش دوم: می‌دانیم: $\boxed{\lim_{u\to 0}\cos u\sim 1-\frac{u^2}{2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-(1-\frac{4x^2}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{2}$$

۹ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}[2x-|x|]\xrightarrow{x<0}\lim_{x\to(-1)^-}[2x+x]=\lim_{x\to(-1)^-}[3x]=[3(-1)^-]=[-3^-]=-4$$

۱۰ ـ گزینه ۳

تابع داده‌شده به صورت $f(x)=\frac{|(x-2)(x+1)|}{x^2-4}$ است.

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\overbrace{|(x-2)(x+1)|}^{+}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)}=\frac{2+1}{2+2}=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overbrace{|(x-2)(x+1)|}^{-}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)}=\frac{-(2+1)}{2+2}=-\frac{3}{4}$$

پس قدر مطلق تفاضل این دو حد برابر $\frac{6}{4}$ یا ۱٫۵ است.

۱۱ ـ گزینه ۳ باتوجه به نامساوی $2-x^2\le g(x)\le 2\cos x$ حد تابع g را در $x=0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0}(2-x^2)=2\\ \lim_{x\to 0}2\cos x=2\end{cases}\xrightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}}\lim_{x\to 0}g(x)=2$$

پس داریم: $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{g(x)}=-\frac{1}{2}$

۱۲ ـ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{2x-1}=\frac{0}{0-1}=0$$

بنابراین حد راست از حد چپ $\frac{1}{2}$ بیشتر است.

۱۳ ـ گزینه ۴ روش اول: حد داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2[x]-1}{x-1}\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

روش دوم:

می‌دانیم: $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'_+(1)\xrightarrow{[1^+]=1}f(x)=x^2\to f'(x)=2x\to f'_+(1)=2$

۱۴ ـ گزینه ۴

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-a)=1-a\\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+2a)=1+2a\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-}f(x)\Rightarrow 1-a=\frac{1}{2}(1+2a)\Rightarrow 1-a=\frac{1}{2}+a\Rightarrow 2a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

۱۵ ـ گزینه ۲

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1}(4-x^2)=3\\ \lim_{x\to 1}\sqrt{x^3+8}=3\end{cases}\xrightarrow{\text{فشردگی}}\lim_{x\to 1}f(x)=3$$

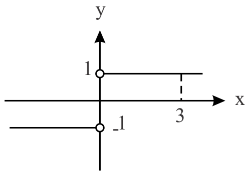
۱۶ ـ گزینه ۴

نکته: $|x|=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$

ابتدا با توجه به نکتهٔ بالا، ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

پس نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل است و داریم:



$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^+} f(x)=۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=-۱$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۷ – گزینه ۳ با توجه به وجود قدرمطلق باید دو حالت حد را بررسی نماییم.

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x+۲|}{x-۲}=\lim\frac{x+۲}{-(x+۲)}=-۱$$

$$\lim_{x\to -۲^-}\frac{(x+۲)}{(x+۲)}=\lim\frac{-(x+۲)}{-(x+۲)}=+۱$$

با توجه به عدم برابری حد چپ و راست، تابع در $x=-۲$ حد ندارد.

$$\lim_{x\to -۳}\frac{|x+۲|}{-x-۲}=\lim\frac{-(x+۲)}{-(x+۲)}=+۱$$

با توجه به محاسبات بالا موارد (پ) و (ت) صحیح می‌باشد.

۱۸ – گزینه ۳ در گزینهٔ «۳» با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۳\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۳=-۲$$

۱۹ – گزینه ۴ با توجه به وجود جزء صحیح باید مقدار عبارات درون جزء صحیح را با مقادیر تعیین نماییم.

با توجه نمودار $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۲^+$

برای تابع $g(x)$ داریم:

پس:

$$x\to ۲\Rightarrow (x-۲)^۲\to ۰^+$$

$$\lim_{x\to ۲} g(x)=\lim_{x\to ۲}(x-۲)^۲+۱=۱^+$$

و نهایتاً داریم:

$$\lim_{x\to ۲}[f(x)+g(x)]=\lim\left[۲^+ +۱^+\right]=\lim\left[۳^+\right]=۳$$

۲۰ – گزینه ۴ برای راحتی محاسبات فرض می‌نماییم $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=t$ باشد. حال با استفاده از قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۴f(x)-۳}{۲f(x)+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۵}۴f(x)-۳}{\lim\limits_{x\to ۵}۲f(x)+۱}$$

$$=\frac{۴\lim\limits_{x\to ۵} f(x)-۳}{۲\lim\limits_{x\to ۵} f(x)+۱}=\frac{۴t-۳}{۲t+۱}=۷\to ۱۴t+۷=۴t-۳\to ۱۰t=-۱۰\to t=-۱$$

پس داریم: $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=-۱$

۲۱ – گزینه ۱ شرط وجود حد این است که، حد چپ و راست موجود و با هم برابر باشند. لذا باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه نماییم.

$$\lim_{x\to ۲^+} a\left[\frac{x}{۲}\right]+۲ax\left[-\frac{x}{۲}\right]-\left[x^۲\right]=\lim_{x\to ۲^+} a\left[\frac{۲^+}{۲}\right]+۲ax\left[-\frac{۲^+}{۲}\right]-\left[(۲^+)^۲\right]=$$

$$\lim_{x\to ۲^+} a\left[۱^+\right]+۲ax\left[-(۱^+)\right]-\left[۴^+\right]=\lim_{x\to ۲^+} a(۱)+a(۴)(-۲)-۴=a-۸a-۴=-۷a-۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} a\left[\frac{x}{۲}\right]+۲ax\left[-\frac{x}{۲}\right]-\left[x^۲\right]=\lim_{x\to ۲^-}(a\left[\frac{۲^-}{۲}\right]+۲ax\left[-\frac{۲^-}{۲}\right]-\left[(۲^-)^۲\right])$$

$$\lim_{x\to ۲^-} a\left[۱^-\right]+۲ax\left[-(۱^-)\right]-\left[۴^-\right]=\lim_{x\to ۲^-}(a(۰)+۲ax(-۱)-(۳))=۰-۴a-۳=-۴a-۳$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)\to -۷a-۴=-۴a-۳\to a=-\frac{۱}{۳}$$

۲۲ – گزینه ۳ قدم اول جایگذاری است که مبهم $\frac{۰}{۰}$ تولید می‌شود. حالا برای استخراج عامل صفر شوند. می‌توان از تجزیه و گویا کردن استفاده کرد.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳+x-۱۰}{x^۲-۴}=\frac{۰}{۰}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+x-10 & x-2 \\ \cline{2-2} -(x^3-2x^2) & x^2+2x+5 \\ \hline 2x^2+x-10 & \\ -(2x^2-4x) & \\ \hline 5x-10 & \\ -(5x-10) & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \to \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+5)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{13}{4}$$

۲۳ - گزینه ۴ قدم اول باید جزء صحیح را به عدد تبدیل نماییم.

باید توجه داشت که $\pi = 3/14$ پس داریم:

$$-1<-\frac{\pi}{4}<0 \to \left[-\frac{\pi}{4}\right]=-1$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{1+2\sin x\ \cos x}{-\cos^2 x+\sin^2 x}\times\frac{2}{\cos x+\sin x}$$

$$=\lim\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\ \cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}\times\frac{2}{\sin x+\cos x}$$

$$=\lim\frac{(\sin x+\cos x)^2\times 2}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)^2}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\sin x-\cos x}$$

$$\lim\frac{2}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

۲۴ - گزینه ۲ شرط وجود حد در یک نقطه، برابری حد چپ و راست در آن نقطه می‌باشد. ابتدا وجود حد در $x=1$ را بررسی مس‌نماییم.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{5x^2-a}=\sqrt{5-a}$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را تجزیه می‌نماییم.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(2x-1)}{(x+1)}=\frac{1}{2}$$

حال حد چپ و راست باید با هم برابر باشد.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^{-1}}f(x)\to\sqrt{5-a}=\frac{1}{2}\xrightarrow{(\ )^2}5-a=\frac{1}{4}\to a=5-1\to a=\frac{19}{4}$$

حال به بررسی وجود حد در $x=2$ می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim\frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}=\frac{15}{3}=5$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}b\,[x]+\frac{|x+2|}{x+2}=-3b-1$$

حال باید حد چپ و راست با هم برابر باشد:

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=-3b-1=5\to -3b=6\to b=-2$$

و مقدار نهایی برابر است با:

$$2a\times b=2\times(\frac{19}{4})(-2)=-19$$

۲۵ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x+\sqrt{x+12}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x+\sqrt{x+12}}\times\frac{x-\sqrt{x+12}}{x-\sqrt{x+12}}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)(x-\sqrt{x+12})}{x^2-x-12}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{(x+3)}\,(x-1)(x-\sqrt{x+12})}{\cancel{(x+3)}\,(x-4)}=\frac{(-4)(-6)}{-7}=-\frac{24}{7}$$

۲۶ - گزینه ۲ چون $x=1$ ریشه‌ی مخرج بوده و حاصل حد عدد شده است، پس $x=1$ ریشه‌ی صرت نیز می‌باشد پس معادله‌ی ۱ و سه به صورت زیر می‌باشد:

$$ax^2+3x-b\ \overset{x=1}{=\!=}\ 0\to a+3-b=0\to b=a+3$$

حال باید صورت را بر عامل $(x-1)$ تقسیم نمود:

$$\begin{array}{l|l} ax^2+3x-b & x-1 \\ \hline 0 & ax+a+3 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\,(ax+a+3)}{\cancel{(x-1)}\,(5x+6)}=\frac{2a+3}{11}=22a+3=22\to a=\frac{19}{2}$$

$$b=a+3\xrightarrow{a=\frac{19}{2}}b=\frac{25}{2}$$

پس می‌توان گفت: $a+b=22$

۲۷ ـ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{(3x+3)\to 1}f(2x+3)$$

حال برای اینکه $(2x+3)\to 1$ حل نماید باید $x\to -1$ نماید یعنی:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\,(3x-2)}{\cancel{(1+x)}\,(1-x)}=-\frac{5}{2}$$

۲۸ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-7x+6}{2x^3-3x^2+1}=\frac{0}{0}$$

کافیست صورت و مخرج را تجزیه نمائیم. برای تجزیه می‌توان صورت و مخرج را بر $(x-1)$ تقسیم نمائیم.

$$\begin{array}{l|l} x^3-7x+6 & x-1 \\ \hline 0 & x^2+x-6 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{l|l} 2x^3-3x^2+1 & x-1 \\ \hline 0 & 2x^2-x-1 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x^2+x-6)}{\cancel{(x-1)}\,(2x^2-x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-6}{(x-1)(2x+1)}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

۲۹ ـ گزینه ۴

$$\lim\frac{x^2-\sqrt{2x^2-x^3}}{3-\sqrt{1-4x}}=\frac{0}{0}$$

کافی است صورت و مخرج را گویا کنیم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-\sqrt{2x^2-x^3}}{3-\sqrt{1-4x}}\times\frac{x^2+\sqrt{2x^2-x^3}}{x^2+\sqrt{2x^2-x^3}}\times\frac{3+\sqrt{1-4x}}{3+\sqrt{1-4x}}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^4-2x^2+x^3)(3+\sqrt{1-4x})}{(9-1+4x)(x^2+\sqrt{2x^2-x^3})}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2(x^2+x-2)(3+\sqrt{1-4x})}{(4x+8)(x^2+\sqrt{2x^2-x^3})}$$

$$\lim\frac{x^2\,\cancel{(x+2)}\,(x-1)(3+\sqrt{1-4x})}{4\,\cancel{(x+2)}\,(x^2+\sqrt{2x^2-x^3})}=\frac{4(-3)(6)}{4\times 8}=-\frac{9}{4}$$

۳۰ ـ گزینه ۱ می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را استخراج و حذف کرد

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\cot x}{1+\tan x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\frac{\cos x}{\sin x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)\cos x}{(\sin x+\cos x)\sin x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\cot x=-1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۱	۱۱ - ۳	۱۶ - ۴	۲۱ - ۱	۲۶ - ۲
۲ - ۱	۷ - ۳	۱۲ - ۳	۱۷ - ۳	۲۲ - ۳	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۴	۱۳ - ۴	۱۸ - ۳	۲۳ - ۴	۲۸ - ۱
۴ - ۲	۹ - ۴	۱۴ - ۴	۱۹ - ۴	۲۴ - ۲	۲۹ - ۴
۵ - ۴	۱۰ - ۳	۱۵ - ۲	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۱