نام آزمون: محاسبه حد توابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - حاصل حد $\dfrac{\log_{۲}^{x} - \log_{x}^{۲}}{\log_{۲}^{(\frac{x}{۲})^{۲}}}$ وقتی $x \to ۲$ کدام است؟

۲ - اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \dfrac{x-۱}{۲x}$ آنگاه $\lim\limits_{x \to ۲^{-}} g(f(x))$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۳ - اگر $f(x+۲) = \dfrac{\cos \pi x}{۱ + \sin \pi x}$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۳} f(x)$ کدام است؟

۴ - اگر $\lim\limits_{x \to ۱^{+}} \dfrac{\sqrt{۱ - \cos \pi x}}{x^{۲} + ax} = +\infty$ ، حاصل حد چپ این عبارت در $x = ۰$ کدام است؟

۵ - حاصل $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱۲^{x} - ۳^{x} + ۴^{x} - ۱}{۱۶^{x} - ۱}$، کدام است؟

۶ - حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|-2x^2-x+1|}-\frac{4}{4x^2-1}\right)$ کدام است؟

۷ - حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-1)^{[x]}}{\sin x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۸ - حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}$ کدام است؟

۹ - قدرمطلق تفاضل حد چپ و حد راست تابع f به معادله‌ی $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{|x-1|}$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟

۱۰ - حد چپ تابع $f(x)=\frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ در نقطه ی $x=3$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

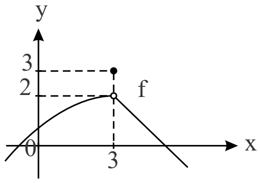
۱۱ - حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{[x]-\sin^2 x}{1+\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$ کدام است؟ ($[\ ]$، علامت جزء صحیح است.)

۱۲ - اگر $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ باشد و در اطراف $x=1$ داشته باشیم $\dfrac{f(x)-2}{1-x}<0$ کدام گزینه می‌تواند نمودار تابع f در اطراف $x=1$ باشد؟

۱۳ - تابع $f(x)=\sqrt{x-3+2b}$ در $x=a$ حد ندارد. ولی $f(a)=2-b$، مقدار $2a+3b$ کدام است؟

۱۴ - اگر $f(x)$ یک تابع خطی باشد، $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$ و $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=4$. حاصل $\lim\limits_{x\to 5}(2f(x)+1)$ کدام است؟

۱۵ - حاصل $A=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{1+\cos^3 x}{1+\sin(\frac{\pi}{2}+x)}+\dfrac{|\cos x|}{\sin(x-\frac{3\pi}{2})}\right)$ کدام است؟



۱۶ - با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{f^{۳}(x)-۸}{|f(x)-۲|}$ کدام است؟

۱۷ - اگر $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{ax^{۲}+۲x+b}=۲$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x-\sqrt{x+۲}}{x+\dfrac{۲}{x}-۳}$ کدام است؟

۱۹ - اگر در تابع f داشته باشیم $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۳$، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۲۰ - در بازه‌ی $\left[۰,\dfrac{۱}{۲}\right]$ همواره $\sqrt{x}-x<g(x)<\dfrac{۲x-\sqrt{x}}{۴x-۱}$ است. $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۴}} g(x)$ کدام است؟

۲۱- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+a)[x]$، اگر $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۲۲- در بازه‌ی $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]-\{1\}$ همواره $\frac{\sin \pi x}{1-x}\leq f(x)\leq g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin \pi x}{1-x}-g(x)\right)=0$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ برابر کدام است؟

۲۳- اختلاف حد چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{[-x]+3}{[x]+2}$ در $x=-3$ ، کدام است؟ ($[]$، نماد جزء صحیح است.)

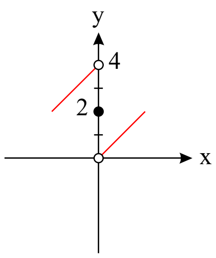
۲۴- اگر $f(x)=\frac{[x]}{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ باشند، آن‌گاه حد تابع $\frac{g}{f}$ در $x=0$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۲۵- اگر $f(x)=\begin{cases}3x+1 & ,\ x>1\\ x+1 & ,\ x=1\\ x^2+2 & ,\ x<1\end{cases}$ و $g(x)=3-x$ باشند، حد تابع $(fog)(x)$ وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟

۲۶- اگر به ازای هر x در بازه‌ی $[-1,1]$ داشته باشیم $3\cos^2 x \le 2f(x)-4 \le 3-x^2$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x+2)}{\cos(\pi x)}$ کدام است؟

۲۷- اگر $f(x)=\dfrac{3-\tan^2 x}{2\cos(\frac{\pi}{6}+x)}$، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} f(x)$ کدام است؟

۲۸- اگر شکل زیر مربوط به تابع $g(x)$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}$ کدام است؟



۲۹- حد عبارت $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ وقتی $x \to (\frac{\pi}{2})^+$، کدام است؟

۳۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x+6}-4}{6-3x}$ کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱

می‌دانیم $\log_x^2 = \frac{1}{\log_2^x}$ پس:

$$\log_2^x - \frac{1}{\log_2^x} = \frac{(\log_2^x)^2 - 1}{\log_2^x} = \frac{(\log_2^x - 1)(\log_2^x + 1)}{\log_2^x}$$

از طرفی:

$$\log_2^{(\frac{x}{2})^2} = 2\log_2^{\frac{x}{2}} = 2(\log_2^x - \log_2^2) = 2(\log_2^x - 1)$$

داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_2^x - \log_x^2}{\log_2(\frac{x}{2})^2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\log_2^x - 1)(\log_2^x + 1)}{2(\log_2^x - 1)\times \log_2^x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_2^x + 1}{2\log_2^x} = \frac{1+1}{2\times 1} = 1$$

۲ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 2^-} g(f(x)) = \lim_{x\to 2^-}\frac{[x]-x-1}{2([x]-x)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{1-x-1}{2(1-x)} = \frac{1-2-1}{2(1-2)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

۳ ـ گزینه ۲ وقتی $x \to 1$ میل کند، آنگاه $x + 2 \to 3$ میل می‌کند، بنابراین:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x+2)$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\cos \pi x}{1+\sin \pi x} = \frac{\cos \pi}{1+\sin\pi} = \frac{-1}{1+0} = -1$$

۴ ـ گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\lim_{u\to 0}(1-\cos u) \sim \frac{u^2}{2}}$

چون جواب حد، بی‌نهایت شده است پس مخرج کسر حتماً برابر صفر است.

$$x^2 + ax = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + a = 0 \to a = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos \pi x}}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{\pi^2 x^2}{2}}}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\pi|\overbrace{x}^{-}|}{\sqrt{2}}}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-\pi x}{\sqrt{2}}}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\pi}{\sqrt{2}(x-1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

۵ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0}\frac{12^x - 3^x + 4^x - 1}{16^x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{3^x(4^x-1) + (4^x - 1)}{(4^x-1)(4^x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{3^x+1}{4^x+1} = \frac{2}{2} = 1$$

۶ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|-2x^2-x+1|} - \frac{4}{4x^2-1}\right) \overset{|f|=|-f|}{=\!=\!=} \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{|2x^2+x-1|} - \frac{4}{4x^2-1}\right)$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{\underbrace{|(2x-1)(x+1)|}_{+}} - \frac{4}{4x^2-1}\right) = \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3}{(2x-1)(x+1)} - \frac{4}{(2x+1)(2x-1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{3(2x+1) - 4(x+1)}{(2x-1)(2x+1)(x+1)}\right) = \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{2x-1}{(2x-1)(2x+1)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left(\frac{1}{(2x+1)(x+1)}\right) = \frac{1}{(2)(\frac{3}{2})} = \frac{1}{3}$$

توجه کنید که عبارت $2x^2 + x - 1$ چون به ازای $x = -1$ برابر صفر است پس بر $x + 1$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۲+x-۱ & x+۱ \\ \cline{2-2} \underline{-۲x^۲-۲x} & ۲x-۱ \\ -x-۱ & \\ \underline{x+۱} & \\ ۰ & \end{array} \qquad \Rightarrow ۲x^۲+x-۱=(x+۱)(۲x-۱)$$

۷ – گزینه ۳ به خاطر وجود جزء صحیح باید حد راست و حد چپ را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(-۱)^{[۰^+]}}{۰^+}=\frac{(-۱)^۰}{۰^+}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{(-۱)^{[۰^-]}}{۰^-}=\frac{(-۱)^{-۱}}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

پس $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}=+\infty$ است.

۸ – گزینه ۳ اگر صورت و مخرج بصورت ضرب باشند و تعداد جملات آنها برابر باشد آن عبارت را به ضرب چند جمله تبدیل می‌کنیم و هر کدام را بطور جداگانه رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{\sqrt[۴]{x}-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)}\times\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt[۴]{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}+۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt[۴]{x}-۱)}=۲\times ۴=۸$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)\cdot(\sqrt[۴]{x}-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}\times\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^۳}}}=۲\times ۴=۸$$

۹ – گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{\underbrace{|x-۱|}_{+}}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۴x-۱}{۱}=۳ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۲x^۲-x-۱}{\underbrace{|x-۱|}_{-}}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۲x^۲-x-۱}{-(x-۱)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۴x-۱}{-۱}=-۳ \end{array}\right\}\Rightarrow |-۳-(۳)|=|-۶|=۶$$

۱۰ – گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{[۳^-]})\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\overbrace{|x-۳|}^{-}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

۱۱ – گزینه ۲ باید توجه داشت که در محاسبهٔ حدود هرگاه به جزء صحیح برخورد نماییم، باید عدد معادل آن را شناسایی و جایگذاری نماییم.

$$\pi=۳/۱۴\to\frac{\pi}{۲}=۱/۵۷\to[x]=[\frac{\pi}{۲}]=[۱/۵۷]=۱$$

اما می‌توان $\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$ را هم به فرم ساده‌تری تبدیل نمود:

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+x)=-\sin x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{[x]-\sin^۲x}{۱+\cos(\frac{\pi}{۲}+x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲x}{۱-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۱+\sin x)=۲$$

۱۲ – گزینه ۲ اگر از سمت راست به $x=۱$ نزدیک شویم در این صورت $x-۱>۰$ پس در نامساوی داده شده مخرج $۱-x<۰$ در نتیجه باشد $f(x)-۲>۰$ باشد در نتیجه اگر $x\to ۱^+$ آنگاه $f(x)\to ۲^+$ همچنین اگر از سمت چپ به $x=۱$ نزدیک شویم در این صورت $x-۱<۰$ پس $۱-x>۰$ در نتیجه در نامساوی $\frac{f(x)-۲}{۱-x}<۰$ باید

$\circ < f(x) - ۲$ باشد، یعنی $x \to ۱^-$ آنگاه $f(x) \to ۲^-$. بنابراین گزینهٔ «۲» می‌تواند درست باشد.

۱۳ - گزینه ۴ نکته: دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{x-m}$ به‌صورت $(m, +\infty)$ است. این تابع به ازای هر $x \in [m, +\infty)$ دارای حد است، ولی در $x = m$ حد ندارد؛ زیرا در این نقطه فقط حد راست دارد. در این نقطه داریم: $f(m) = \circ$

با توجه به نکتهٔ بالا، تابع $f(x) = \sqrt{x - ۳ + ۲b} = \sqrt{x - (۳ - ۲b)}$ فقط در $x = ۳ - ۲b$ حد ندارد و در این نقطه داریم: $f(۳ - ۲b) = \circ$

طبق فرض، این نقطه برابر $x = a$ و مقدار تابع در این نقطه برابر $f(a) = ۲ - b$ است. پس:

$$\begin{cases} ۲ - b = \circ \Rightarrow b = ۲ \\ a = ۳ - ۲b \xrightarrow{b=۲} a = -۱ \end{cases}$$

بنابراین:
$$۲a + ۳b = ۲(-۱) + ۳(۲) = ۴$$

۱۴ - گزینه ۳

نکته: $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

نکته: اگر $f(x) = k$ یک تابع ثابت باشد، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$

نکته: ضابطهٔ هر تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax + b$ است.

ضابطهٔ تابع خطی $f(x)$ به‌صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳} f(x) = ۴ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳} (ax+b) = ۴ \Rightarrow ۳a + b = ۴ \\ \lim\limits_{x\to -۳} f(x) = ۴ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -۳} (ax+b) = ۴ \Rightarrow -۳a + b = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \circ \\ b = ۴ \end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x) = ۴$ است. پس:

$$\lim_{x\to ۵} (۲f(x) + ۱) = ۲(۴) + ۱ = ۹$$

۱۵ - گزینه ۱

نکته: $a^۳ + b^۳ = (a+b)(a^۲ - ab + b^۲)$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{۱ + \cos^۳ x}{۱ + \sin(\frac{\pi}{۲} + x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{(۱+\cos x)(۱ - \cos x + \cos^۲ x)}{۱ + \cos x}$$

$$= \lim_{x\to\pi} (۱ - \cos x + \cos^۲ x) = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

$$x \to \pi \Rightarrow \cos x < \circ \Rightarrow |\cos x| = -\cos x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi} \frac{|\cos x|}{\sin(x - \frac{۳\pi}{۲})} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\cos x}{\cos x} = -۱ \Rightarrow A = ۳ - ۱ = ۲$$

۱۶ - گزینه ۳ با توجه به نمودار تابع f می‌توان نوشت $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = ۲$، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f^۳(x) - ۸}{|f(x) - ۲|} = \lim_{x\to ۳} \frac{f^۳(x) - ۸}{(f(x) - ۲)} = \frac{\circ}{\circ}$$

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\cancel{(f(x) - ۲)}\,(f^۲(x) + ۴ + ۲f(x))}{-\cancel{(f(x) - ۲)}} = \frac{(۲)^۲ + ۴ + ۲(۲)}{-۱} = -۱۲$$

۱۷ - گزینه ۴ قدم اول جایگذاری عدد می‌باشد باتوجه به این که صورت کسر عدد صفر شده و جواب حد عدد غیر صفر می‌باشد، مخرج کسر باید به ازای $x = ۱$ برابر صفر شود:

$$ax^۲ + ۲x + b \overset{x=۱}{=\!=} \circ$$

$$a + b + ۲ = \circ \to b = -۲ - a$$

در مرحله‌ی بعد مخرج را با استفاده از تقسیم تجزیه می‌نمائیم:

$$\begin{array}{l|l} ax^۲ + ۲x + b & x - ۱ \\ \cline{2-2} & ax + a + ۲ \\ \hline \circ & \end{array}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{(x-۲)(\cancel{x-۱})}{(ax + a + ۲)(\cancel{x-۱})} = \frac{-۱}{۲a + ۲} = ۲ \to ۴a + ۴ = -۱ \to a = -\frac{۵}{۴}$$

$$b = -۲ - a = -۲ + \frac{۵}{۴} = -\frac{۳}{۴}$$

$$a - b = -\frac{۱}{۲}$$

۱۸ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x - \sqrt{x + ۲}}{x + \frac{۲}{x} - ۳} = \frac{\circ}{\circ}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{\frac{x^۲-۳x+۲}{x}}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-x-۲}{\frac{x^۲-۳x+۲}{x}}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x(\cancel{x-۲})(x+۱)}{(\cancel{x-۲})(x-۱)(x+\sqrt{x+۲})}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

۱۹ - گزینه ۴ نکته: $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$، اگر و تنها اگر: $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=\ell$

طبق فرض $\lim_{x\to ۲}f(x)=۳$، پس از نکتهٔ بالا نتیجه می گیریم:
$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=۳$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

تذکر: وجود یا عدم وجود حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ هیچ ارتباطی به مقدار تابع در این نقطه ندارد.

۲۰ - گزینه ۲

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}(\sqrt{x}-x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}\\&\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{۲x-\sqrt{x}}{۴x-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{۲-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۴}=\frac{۱}{۴}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}}\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}g(x)=\frac{۱}{۴}$$

۲۱ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)-\lim_{x\to ۲^-}f(x)=۳\Rightarrow(۲+a)[۲^+]-(۲+a)[۲^-]=۳$$
$$\Rightarrow(۲+a)(۲)-(۲+a)(۱)=۳\Rightarrow ۴+۲a-۲-a=۳\Rightarrow a=۱$$

۲۲ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sin\pi x}{۱-x}-g(x)=۰\to\lim_{x\to ۱}\frac{\sin\pi x}{۱-x}=\lim_{x\to ۱}g(x)$$
$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sin\pi x}{۱-x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{\pi\cos\pi x}{-۱}=\pi\Rightarrow\lim_{x\to ۱}\frac{\sin\pi x}{۱-x}=\lim_{x\to ۱}g(x)=\pi$$

طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x\to ۱}f(x)=\pi$ می‌باشد.

۲۳ - گزینه ۴

حد راست : $\lim_{x\to(-۳)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۳)^+}\frac{[-x]+۳}{[x]+۲}=\frac{[۳^-]+۳}{[(-۳)^+]+۲}=\frac{۲+۳}{-۳+۲}=\frac{۵}{-۱}=-۵$

حد چپ : $\lim_{x\to(-۳)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۳)^-}\frac{[-x]+۳}{[x]+۲}=\frac{[۳^+]+۳}{[(-۳)^-]+۲}=\frac{۳+۳}{-۴+۲}=\frac{۶}{-۲}=-۳$

اختلاف حد چپ و راست $=|-۵-(-۳)|=|-۲|=۲$

۲۴ - گزینه ۴

$$\frac{g}{f}=\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{[x]}{x}}=\frac{۱}{[x]}$$

دامنه‌ی تعریف این تابع به صورت $R-[۰,۱)$ است یعنی حد راست تابع در $x=۰$ تعریف نشده است پس تابع در $x=۰$ حد ندارد.

۲۵ - گزینه ۴ ابتدا حد تابع $g(x)$ را وقتی $x\to ۲^-$ را بدست می‌آوریم و سپس حد تابع $f(x)$ را به ازای حد بدست آمده حساب می کنیم.

$$\lim_{x\to ۲^-}g(x)=۳-۲^-=۱^+$$
$$\lim_{x\to ۲^-}f(g(x))=\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(۳x+۱)=۴$$

۲۶ - گزینه ۲

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to ۰}(۳\cos^۲x)=۳\\&\lim_{x\to ۰}(۳-x^۲)=۳\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{فشردگی}}\lim_{x\to ۰}(۲f(x)-۴)=۳\to\lim_{x\to ۰}۲f(x)=۷\to\lim_{x\to ۰}f(x)=\frac{۷}{۲}\to\lim_{x\to -۲}f(x+۲)=\frac{۷}{۲}$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f(x+۲)}{\cos\pi x}=\frac{\frac{۷}{۲}}{\cos(-۲\pi)}=\frac{\frac{۷}{۲}}{\cos ۲\pi}=\frac{۷}{۲}$$

۲۷ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{۳-\tan^۲x}{۲\cos(\frac{\pi}{۶}+x)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{-۲\tan x(۱+\tan^۲x)}{-۲\sin(\frac{\pi}{۶}+x)}=\frac{-۲\sqrt{۳}(۱+۳)}{-۲(۱)}=\frac{-۸\sqrt{۳}}{-۲}=۴\sqrt{۳}$$

۲۸ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}=\frac{4-4}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{0}$$

عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}\times\frac{\sqrt{g(x)}+2}{\sqrt{g(x)}+2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(4-g(x))(\sqrt{g(x)}+2)}{g(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(g(x)-4)(\sqrt{g(x)}+2)}{g(x)-4}=\lim_{x\to 0^-}-(\sqrt{g(x)}+2)=-(\sqrt{4}+2)=-4$$

۲۹ - گزینه ۴ می‌توان برای رفع ابهام از روابط مثلثاتی استفاده نمود. بدین منظور مخرج کسر را در مزدوج ضرب کنید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}=\frac{\cancel{\cos}\, x(1+\sin x)}{\cancel{\cos^2}\, x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

۳۰ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x+6}-4}{6-3x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim\frac{\sqrt{5x+6}-4}{6-3x}\times\frac{\sqrt{5x+6}+4}{\sqrt{5x+6}+4}=\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{5x+6-16}^{5x-10}}{-3(x-2)(\sqrt{5x+6}+4)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{5\,\cancel{(x-2)}}{-3\,\cancel{(x-2)}\,(\sqrt{5x+6}+4)}=-\frac{5}{14}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۲	۱۱ - ۲	۱۶ - ۳	۲۱ - ۱	۲۶ - ۲
۲ - ۱	۷ - ۳	۱۲ - ۲	۱۷ - ۴	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۳	۱۳ - ۴	۱۸ - ۴	۲۳ - ۴	۲۸ - ۴
۴ - ۴	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۴	۲۴ - ۴	۲۹ - ۴
۵ - ۱	۱۰ - ۲	۱۵ - ۱	۲۰ - ۲	۲۵ - ۴	۳۰ - ۱