نام آزمون: مفاهیم حد

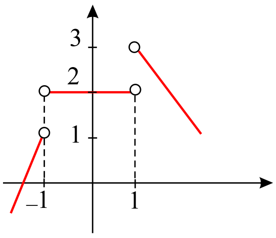
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - حاصل $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^-} (\frac{۱+x}{۱+\sin x})$ کدام است؟

۲ - با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) - \lim_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟



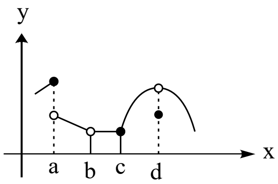
۳ - فرض کنید $f(x)=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ ۱ & x<۱ \end{cases}$ می باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to ۱^-$ کدام است؟

۴ - حاصل $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

۵ - اگر $f(x)=\begin{cases} [x] & ; \quad x>-۱ \\ ۱-[x] & ; \quad x\leq -۱ \end{cases}$، آن گاه حاصل $\lim_{x\to ۰} f(x^۲-۱)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

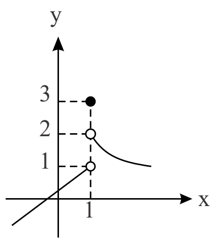
۶ - حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{x-۲}{\cos ۲x+۱}$ کدام است؟

۷ - نمودار تابع f به صورت زیر است. این تابع در چند نقطه از نقاط $\{a,b,c,d\}$ حد ندارد؟



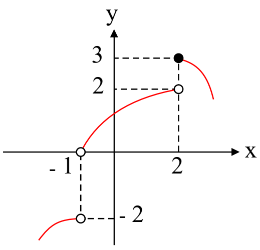
۸ - حاصل $\lim_{x\to(-۱)^-} \left(\left[\frac{۵}{x-۱}\right]+\left[\frac{-۵}{x+۲}\right]\right)$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۹ - نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت شکل زیر است. حاصل $\lim_{x\to ۴^+} f(\frac{۱}{۲x-۷})$ کدام است؟



۱۰- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} \left[\dfrac{۳۶}{۱+۴x}\right]$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

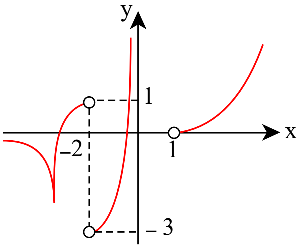
۱۱- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(۱-x)$ کدام است؟



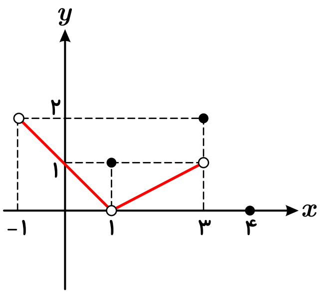
۱۲- اگر $f(x+\dfrac{\pi}{۴}) = \dfrac{[x]-۱}{۱-\tan x}$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} f(x)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱۳- اگر $f(x) = \begin{cases} ax-۱ & x<۱ \\ x^۲+۲a & x\geq ۱ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) - \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -۱$ ، مقدار a کدام است؟

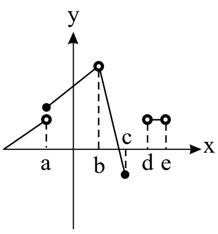
۱۴ - اگر نمودار f به صورت زیر باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



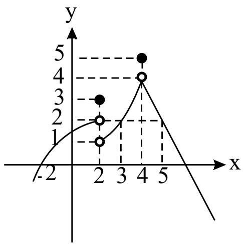
۱۵ - با توجه به نمودار تابع f، کدام گزینه صحیح است؟



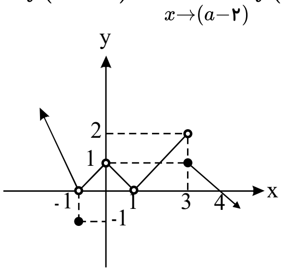
۱۶ - کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد تابع f که نمودار آن در شکل مقابل آورده شده است، درست است؟



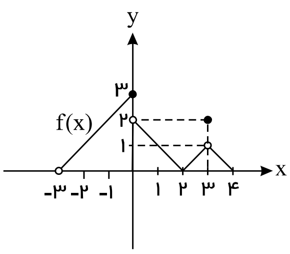
۱۷ـ شکل زیر مربوط به نمودار تابع $f(x)$ است. حاصل عبارت $A=\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)+\lim_{x\to۴} f(x)+\lim_{x\to۲^+} f(x)$ کدام است؟



۱۸ـ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع f در $x=a$ حد نداشته باشد، حاصل عبارت $\lim_{x\to(a-۲)} f(x)+f(a-۴)-$ کدام است؟

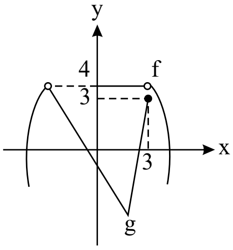


۱۹ـ با توجه به نمودار تابع f، حاصل $A=\lim_{x\to۳} f(x)+\lim_{x\to۰^-} f(x)+\lim_{x\to(-۳)^+} f(x)$ کدام است؟



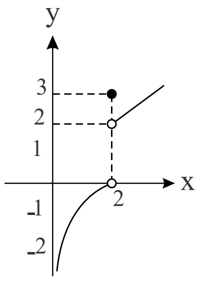
مفاهیم حد

۲۰ - اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورت مقابل باشند، حاصل $\lim\limits_{x \to ۳^-} (f-g)(x)$ کدام است؟



۲۱ - کدام‌یک از توابع زیر در نقاط $\frac{۳\pi}{۲}$ و $x = \frac{\pi}{۲}$ حد ندارد؟

۲۲ - برای تابع f که نمودار آن داده شده، حاصل $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) + \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) + f(۲)$ کدام است؟

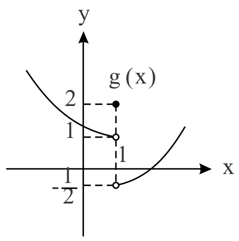


۲۳ - اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۱ & , \quad x > ۲ \\ ax - b & , \quad x < ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = ۴$ باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

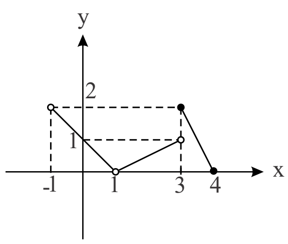
۲۴ – به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{[x]-۲|x|}{x-۱} & , \quad x<۰\\ bx+a-۱ & , \quad x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ دارای حد است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۲۵ – اگر تابع g یک سهمی با رأس $(۰,۳)$ باشد و تابع $f(x)=\begin{cases}|x|-۷ & , \quad x\geq ۲\\ g(x) & , \quad x<۲\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ حد داشته باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ کدام است؟

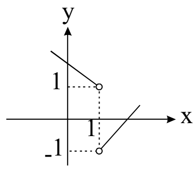
۲۶ – هرگاه $\lim\limits_{x\to ۱^+}(۲f(x)+۱)=۵$ باشد، با توجه به نمودار تابع g حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{\sqrt{(f^۳-۲g)(x)}}{(f\cdot g)(x)+۳}$ کدام است؟



۲۷ – با توجه به شکل زیر کدام گزینه صحیح است؟



۲۸- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(۱-x) + \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟



۲۹- چه تعداد از توابع زیر در نقطهٔ $x=۰$ حد ندارند؟

الف) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & , \quad x\neq ۰ \\ ۰ & , \quad x=۰ \end{cases}$

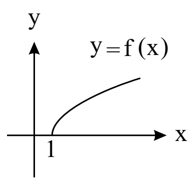
ب) $f(x)=\begin{cases} ۱ & , \quad x>۰ \\ -۱ & , \quad x<۰ \end{cases}$

پ) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x>۰ \\ -\sqrt{-x} & , \quad x<۰ \end{cases}$

ت) $f(x)=\begin{cases} ۲x^۲ & , \quad x\geq ۰ \\ ۰ & , \quad x<۰ \end{cases}$

۳۰- اگر $f(x)=\begin{cases} x+۳ & , \quad x\geq ۰ \\ ۲x+۲ & , \quad x<۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x-۱ & , \quad x\geq ۰ \\ x & , \quad x<۰ \end{cases}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

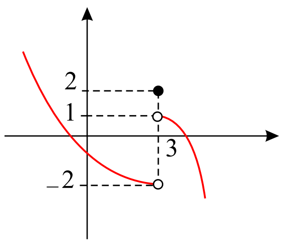
۳۱- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ است. کدام یک از موارد زیر درست است؟



۳۲- اگر $g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\neq ۴ \\ ۵ & x=۴ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)$ کدام است؟

۳۳- تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=۱$ حد ندارد؛ ولی در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد. کدام شکل می‌تواند نمودار این تابع باشد؟

۳۴- شکل مقابل نمودار تابع f است حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)+\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)+f(۳)$ کدام است؟



۳۵- اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۴x^۳+x^۲-۱}{۳x^۲-ax-b}=+\infty$، حاصل $a+b^۳$ کدام است؟

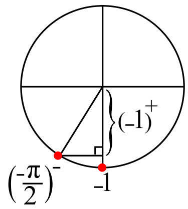
۳۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^۲-ax+۱ & , \quad |x|\leq ۱ \\ x+b & , \quad |x|>۱ \end{cases}$ در تمام نقاط حد دارد. مقدار $۲b-a$ کدام است؟

۳۷- اگر $f(x+۱)=\dfrac{۱}{x^۲-۱}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$ کدام است؟

۳۸- تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۲b & ; \quad x>۳ \\ ax^۲+bx+۲ & ; \quad x<۳ \end{cases}$ مفروض است. اگر ۶ $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=$ و ۲ $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۴ وقتی $x \to (-\frac{\pi}{۲})^-$ در این صورت $\sin x$ در ناحیه‌ی سوم با مقادیر بیشتر از -۱ به عدد -۱ نزدیک می‌شود.



$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^-} (\frac{۱+x}{۱+\sin x}) = \frac{۱-\frac{\pi}{۲}}{۱+\underbrace{(-۱)^+}_{-۰/۹}} = \frac{\text{عدد منفی}}{۰^+} = -\infty$$

۲ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۳\,,\quad \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x) - \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۳ - ۱ = ۲$$

۳ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(۰)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می‌شود.

۴ ـ گزینه ۳

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} \frac{\tan x}{\frac{۱}{\tan x}} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} \tan^۲ x = (-\infty)^۲ = +\infty$$

$(\frac{\pi}{۲})^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

۵ ـ گزینه ۱

$$x \to ۰ \Rightarrow x^۲ \to ۰^+ \Rightarrow x^۲ - ۱ \to (-۱)^+$$

پس: $\lim_{x\to ۰} f(x^۲-۱) = \lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} [x] = [(-۱)^+] = -۱$

۶ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{x-۲}{\cos ۲x + ۱} = \frac{\frac{\pi}{۲}-۲}{۰^+} = \frac{\text{عددی منفی}}{۰^+} = -\infty$$

در مسائل حدی هر جا سینوس و کسینوس -۱ شدند منظور $(-۱)^+$ است، پس در مخرج داریم: $(-۱)^+ + ۱ = ۰^+$

۷ ـ گزینه ۴ حد راست و چپ تابع در نقطه به طول $x=a$ با هم متفاوت‌اند؛ پس تابع در این نقطه حد ندارد. در نقطه به طول $x=b$ تابع تعریف نشده است، ولی حد راست و چپ با هم برابرند؛ پس تابع در این نقطه حد دارد. در نقطه به طول $x=c$ هم تابع حد دارد.

در نقطه به طول $x=d$ مقدار تابع و حد تابع با هم برابر نیست ولی چون حد راست و چپ با هم برابرند، پس تابع در این نقطه حد دارد.

۸ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to(-۱)^-} ([\frac{۵}{x-۱}] + [\frac{-۵}{x+۲}]) = [\frac{۵}{(-۱)^- - ۱}] + [\frac{-۵}{(-۱)^- + ۲}]$$

$$= [\frac{۵}{-۲-\epsilon}] + [\frac{-۵}{۱-\varepsilon}] = [-۲/۵] + [-۵-\varepsilon] = -۳ + (-۶) = -۹$$

۹ ـ گزینه ۱ ابتدا باید بررسی نماییم عبارت مقابل تابع f به سمت چه عددی میل می‌نماید:

$$x \to ۴^+ : x > ۴ \xrightarrow{\times ۲} ۲x > ۸ \to ۲x - ۷ > ۱ \xrightarrow{\text{وارون}} \frac{۱}{۲x-۷} < ۱$$

حال یک تغییر متغیر انجام می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۲x-۷} = t \to \begin{cases} x \to ۴^+ \\ \frac{۱}{۲x-۷} = t \to ۱^- \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۴^+} f(\frac{۱}{۲x-۷}) = \lim_{t\to ۱^-} f(x) = ۱$$

۱۰ - گزینه ۲

$$x>۲ \Rightarrow ۱+۴x>۹ \Rightarrow \frac{۱}{۱+۴x}<\frac{۱}{۹} \Rightarrow \frac{۳۶}{۱+۴x}<۴ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}[\frac{۳۶}{۱+۴x}]=[۴^-]=۳$$

۱۱ - گزینه ۴

$$x\to ۲^- \Rightarrow x<۲ \Rightarrow -x>-۲ \Rightarrow ۱-x>-۱$$

پس وقتی $x\to ۲^-$ آنگاه $۱-x\to (-۱)^+$ و در نتیجه:

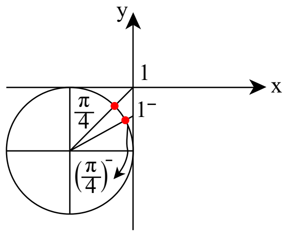
$$\lim_{x\to ۲^-} f(۱-x)=\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=f(-۱^+)=۰$$

۱۲ - گزینه ۲

دقت کنید که $x+\frac{\pi}{۴}=(\frac{\pi}{۲})^- \to x=(\frac{\pi}{۴})^-$ است.

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} f(x) = \lim_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-} f(x+\frac{\pi}{۴}) = \lim_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-} \frac{[x]-۱}{۱-\tan x} = \frac{۰-۱}{۱-۱^-} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

دقت کنید: $\underbrace{\left[(\frac{\pi}{۴})^-\right]}_{\text{بین صفر و یک}}=۰ \, , \, \tan(\frac{\pi}{۴})^-=۱^-$



۱۳ - گزینه ۲ با توجه به تابع داده‌شده و انتخاب ضابطهٔ مناسب، حدهای راست و چپ تابع را در $x=۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax-۱)=a-۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\left(x^۲+۲a\right)=۱+۲a$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۱ \Rightarrow (۱+۲a)-(a-۱)=-۱ \Rightarrow a=-۱-۲=-۳$$

۱۴ - گزینه ۴

به بررسی ۴ گزینه می‌پردازیم.

گزینه‌ی اول $\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۰$ گزینه‌ی سوم $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

گزینه‌ی دوم $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=+\infty$ گزینه‌ی چهارم $\lim_{x\to (-۲)^+} f(x)=-۳$

۱۵ - گزینه ۴ تابع برای $x>۴$ تعریف نشده است پس گزینهٔ یک نادرست است.

$\lim_{x\to ۱} f(x)=۰$ پس گزینهٔ دو نادرست است.

$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=۲$ و $\lim_{x\to ۳^-} f(x)=۱$ پس $\lim_{x\to ۳} f(x)$ وجود ندارد بنابراین گزینهٔ سه نادرست است.

$\lim_{x\to ۰} f(x)=۱$ پس گزینهٔ چهار درست است.

۱۶ - گزینه ۳ تابع f در $x=a$ هم حدراست و هم حد چپ دارد پس گزینهٔ ۱ نادرست است.

تابع f در $x=c$ فقط حد چپ دارد پس گزینهٔ ۲ نادرست است.

تابع f در $x=b$ دارای حد چپ و راست برابر است و حد دارد پس گزینهٔ ۳ درست است.

تابع f در $x=d$ فقط حد راست دارد پس گزینهٔ ۴ نادرست است.

۱۷ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۱ \ ، \ \lim_{x\to ۴} f(x)=۴ \ ، \ \lim_{x\to (-۲)^+} f(x)=۰ \Rightarrow A=۱+۴+۰=۵$$

۱۸ - گزینه ۱ با توجه به شکل حد چپ و راست تابع f در $x=۳$ برابر نیستند، پس تابع f در $x=۳$ حد ندارد و $a=۳$.

$$\Rightarrow -f(a-۴)+\lim_{x\to (a-۲)} f(x)=-f(۳-۴)+\lim_{x\to (۳-۲)} f(x)=-f(-۱)+\lim_{x\to ۱} f(x)=-(-۱)+۰=۱$$

۱۹ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to (-۳)^+} f(x)=۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=۳ \quad , \quad \lim_{x\to ۳} f(x)=۱$$

$$\to A=\lim_{x\to (-۳)^+} f(x)+\lim_{x\to ۰^-} f(x)+\lim_{x\to ۳} f(x)=۰+۳+۱=۴$$

۲۰ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۳^-}(f-g)(x)=\lim_{x\to ۳^-} f(x)-\lim_{x\to ۳^-} g(x)=۴-۳=۱$$

۲۱ - گزینه ۲ با توجه به نمودار فقط گزینهٔ دوم در این دو نقطه فاقد حد است، زیرا حد چپ و راست در این نمودار در این دو نقطه وجود دارند ولی با هم برابر نیستند.

۲۲ - گزینه ۳ با توجه به نمودار داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۲)=۳ \\ \lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲ \\ \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۰ \end{array}\right\} f(۲)+\lim_{x\to ۲^+} f(x)+\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۳+۲+۰=۵$$

۲۳ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۳x^۲-۱)=۳\times ۲^۲-۱=۱۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax-b)=۲a-b$$

$$\xrightarrow{f \text{ در } x=۲ \text{ حد دارد}} ۲a-b=۱۱ \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=۴\Rightarrow \lim_{x\to -۱}(ax-b)=۴\Rightarrow -a-b=۴\Rightarrow a+b=-۴ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \begin{cases} ۲a-b=۱۱ \\ a+b=-۴ \end{cases} \Rightarrow ۳a=۷\Rightarrow a=\frac{۷}{۳}$$

$$\xrightarrow{a+b=-۴} \frac{۷}{۳}+b=-۴\Rightarrow b=\frac{-۱۹}{۳}\Rightarrow a-b\Rightarrow \frac{۷}{۳}-(-\frac{۱۹}{۳})=\frac{۲۶}{۳}$$

۲۴ - گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{[x]-۲|x|}{x-۱}=\frac{-۱-۰}{۰-۱}=۱$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} bx+a-۱=a-۱$$

$$\xrightarrow{f \text{ در } x=۰ \text{ حد دارد}} a-۱=۱\Rightarrow a=۲$$

۲۵ - گزینه ۲

$$g(x)=ax^۲+bx+c\Rightarrow x_s=\frac{-b}{۲a}=۰\Rightarrow b=۰$$

$$g(x)=ax^۲+c\xrightarrow{s(۰,۳)} ۳=۰+c\Rightarrow c=۳\Rightarrow g(x)=ax^۲+۳$$

$$\begin{cases} |x|-۷ \quad , \quad x\geq ۲\to \lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(|x|-۷)=۲-۷=-۵ \\ ax^۲+۳ \quad , \quad x<۲\to \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax^۲+۳)=۴a+۳ \end{cases}$$

چون f در $x=۲$ حد دارد، پس حد چپ و راست برابرند.

$$۴a+۳=-۵\Rightarrow ۴a=-۸\Rightarrow a=-۲\Rightarrow g(x)=-۲x^۲+۳$$

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=\lim_{x\to -۱} g(x)=\lim_{x\to -۱}(-۲x^۲+۳)=۱$$

۲۶ - گزینه ۲ ابتدا باید با استفاده از قضایای حد، حد تابع f را محاسبه نماییم:

$$\lim_{x\to ۱^+} ۲f(x)+۱=۵\to \lim_{x\to ۱^+} ۲f(x)=۴\to \lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲$$

با توجه به نمودار، حد تابع g برابر است با:

$$\lim_{x\to ۱^+} g(x)=-\frac{۱}{۲}$$

اما محاسبهٔ مقدار عبارت خواسته شده:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{(f^۳-۲g)(x)}}{(f\times g)(x)+۳}=\frac{\sqrt{(\lim_{x\to ۱^+} f(x))^۳-۲(\lim_{x\to ۱^+} g(x))}}{\lim_{x\to ۱^+} f(x)\times \lim_{x\to ۱^+} g(x)+۳}$$

$$=\frac{\sqrt{(۲)^۳-۲(-\frac{۱}{۲})}}{۲(-\frac{۱}{۲})+۳}=\frac{\sqrt{۸+۱}}{-۱+۳}=۱/۵$$

۲۷ - گزینه ۴

$\lim_{x\to ۴} f(x)$: وجود ندارد (حد راست ندارد)

$\lim_{x\to ۱} f(x)=۰$

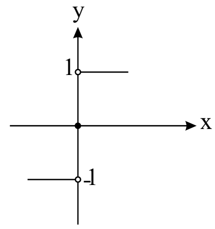
$\lim_{x\to ۳} f(x)$: وجود ندارد (حد چپ و راست برابر نیستند)

۲۸ - گزینه ۱ ابتدا باید وضعیت عبارت $(۱-x)$ را مشخص نماییم.

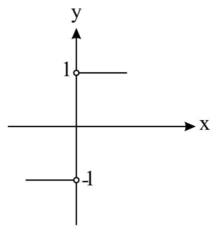
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)+\lim_{x\to ۰^+} f(۱-x)=-۱+(۱)=۰$$

۲۹ - گزینه ۲ نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

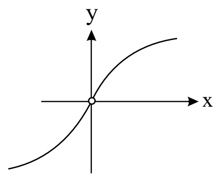
$$\text{الف)}\ f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & , \quad x\neq ۰\\ ۰ & , \quad x=۰\end{cases}$$



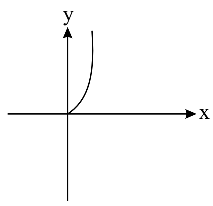
$$\text{ب)}\ f(x)=\begin{cases}۱ & , \quad x>۰\\ -۱ & , \quad x<۰\end{cases}$$



$$\text{پ)}\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & , \quad x>۰\\ -\sqrt{-x} & , \quad x<۰\end{cases}$$



$$\text{ت)}\ f(x)=\begin{cases}۲x^۲ & , \quad x\geq ۰\\ ۰ & , \quad x<۰\end{cases}$$



از روی نمودارهای رسم شده مشخص است که توابع موارد (الف) و (ب) در نقطهٔ $x=۰$ حد ندارند.

۳۰ - گزینه ۲

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۳\\ \lim_{x\to ۰^-} f(x)=۲\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)\ \text{وجود ندارد:}$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۰^+} f(x)=-۱\\ \lim_{x\to ۰^-} g(x)=۰\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۰} g(x)\ \text{وجود ندارد:}$$

$$(f+g)(x)=\begin{cases}۲x+۲ & , \quad x\geq ۰\\ ۳x+۲ & , \quad x<۰\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۰}(f+g)(x)=۲$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases}۴ & , \quad x\geq ۰\\ x+۲ & , \quad x<۰\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۰}(f-g)(x)=\ \text{حد ندارد}$$

۳۱ - گزینه ۳ نکته: فرض کنیم $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a,x_۰)$ تعریف‌شده باشد؛ می‌گوییم حد چپ $f(x)$ در $x=x_۰$ برابر ℓ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=\ell$، هرگاه بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به ℓ نزدیک کرد، به‌شرطی که مقادیر x از سمت چپ به اندازهٔ کافی به $x_۰$ نزدیک شوند.

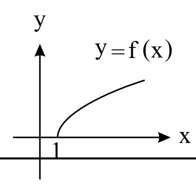
نکته: فرض کنیم $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(x_۰,b)$ تعریف‌شده باشد؛ می‌گوییم حد راست $f(x)$ در $x=x_۰$ برابر ℓ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=\ell$، هرگاه بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به ℓ نزدیک کرد، به‌شرطی که مقادیر x از سمت راست به اندازهٔ کافی به $x_۰$ نزدیک شوند.

نکته: فرض کنیم $f(x)$ در بازه‌ای مانند (a,b) شامل $x_۰$ (به‌جز احتمالاً در خود $x_۰$) تعریف‌شده باشد؛ می‌گوییم حد تابع $f(x)$ در $x=x_۰$ برابر ℓ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to x_۰} f(x)=\ell$، هرگاه بتوان مقادیر $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به ℓ نزدیک کرد، به‌شرطی که مقادیر x (از سمت چپ و راست) به اندازهٔ کافی به $x_۰$ نزدیک شوند؛ به عبارت دیگر $\lim_{x\to x_۰} f(x)=\ell$، اگر و تنها اگر:

$$\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=\ell\ .$$

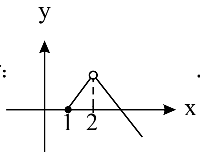
با توجه به شکل مقابل می‌توان فهمید $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ و در نتیجه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد، همچنین $\lim_{x\to ۰^+} f(x)$ موجود نیست؛ ولی داریم:

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۰$$



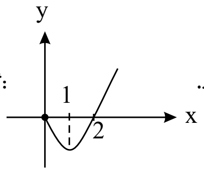
۳۲ - گزینه ۲ نکته: $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$، اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell$.

گزینهٔ ۲:



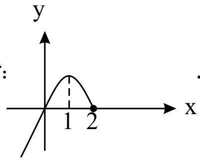
در $x=۱$ حد ندارد؛ ولی در $x=۲$ حد دارد. ✓

گزینهٔ ۳:



در $x=۱$ و $x=۲$ حد دارد. ×

گزینهٔ ۴:



در $x=۱$ و $x=۲$ حد دارد. ×

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۳۴ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۱\ ,\ \lim_{x\to ۳^-} f(x) = -۲\ ,\ f(۳)=۲$$

جمع این سه مقدار برابر یک می‌شود.

۳۵ ـ گزینه ۲ صورت کسر به ازای $x=۱$ برابر ۴ است و چون جواب حد برابر $+\infty$ شده است بنابراین مخرج کسر باید ۰^+ باشد یا به بیان دیگر، مخرج باید دارای ریشه‌ی مضاعف ۱ باشد یا به صورت $۳(x-۱)^۲$ باشد.

$$۳x^۲-ax-b=۳(x-۱)^۲ \Rightarrow ۳x^۲-ax-b=۳x^۲-۶x+۳ \to a=۶, b=-۳$$

پس : $a+b^۳=۶-۲۷=-۲۱$

۳۶ ـ گزینه ۳ ابتدا شرط تابع را ساده تر می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-ax+۱ & , \quad -۱\le x\le ۱ \\ x+b & , \quad x>۱ \text{ یا } x<-۱ \end{cases}$$

چون تابع در تمام نقاط حد دارد پس تابع در $x=۱$ و $x=-۱$ نیز حد دارد.

$$x=۱ \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (x+b) = ۱+b \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} (x^۲-ax+۱) = ۱-a+۱ = ۲-a \end{cases} \to ۱+b=۲-a \to a+b=۱$$

$$x=-۱ \begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۱)^+} (x^۲-ax+۱) = ۱+a+۱ = a+۲ \\ \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۱)^-} (x+b) = -۱+b \end{cases} \to a+۲=-۱+b \to a-b=-۳$$

از حل دستگاه $a=-۱$ و $b=۲$ بدست می آید پس $۲b-a=۵$ است.

۳۷ ـ گزینه ۲ روش اول:

باید $x+۱\to ۰^+$ میل کند پس $x\to(-۱)^+$ میل می کند.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} f(x+۱) = \frac{۱}{((-۱)^+)^۲-۱} = \frac{۱}{۱^- -۱} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

روش دوم: ابتدا $f(x)$ را مشخص می کنیم.

$$x+۱=t \to x=t-۱ \to f(t)=\frac{۱}{(t-۱)^۲-۱}=\frac{۱}{t^۲+۱-۲t-۱}=\frac{۱}{t^۲-۲t} \to f(x)=\frac{۱}{x^۲-۲x}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x(x-۲)} = \frac{۱}{۰^+(-۲)} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

۳۸ ـ گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = ۶ \to \lim\limits_{x\to ۳^+} (ax+۲b) = ۶ \to ۳a+۲b=۶ \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = ۲ \to \lim\limits_{x\to ۳^-} (ax^۲+bx+۲) = ۲ \to ۹a+۳b=۰ \end{array}\right\} \to b=۶\ ,\ a=-۲$$

پس $a+b=۴$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۷ - ۴	۱۳ - ۲	۱۹ - ۴	۲۵ - ۲	۳۱ - ۳	۳۷ - ۲
۲ - ۲	۸ - ۴	۱۴ - ۴	۲۰ - ۳	۲۶ - ۲	۳۲ - ۲	۳۸ - ۴
۳ - ۱	۹ - ۱	۱۵ - ۴	۲۱ - ۲	۲۷ - ۴	۳۳ - ۲	
۴ - ۳	۱۰ - ۲	۱۶ - ۳	۲۲ - ۳	۲۸ - ۱	۳۴ - ۲	
۵ - ۱	۱۱ - ۴	۱۷ - ۴	۲۳ - ۱	۲۹ - ۲	۳۵ - ۲	
۶ - ۲	۱۲ - ۲	۱۸ - ۱	۲۴ - ۳	۳۰ - ۲	۳۶ - ۳	