

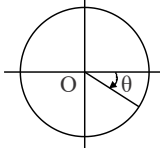
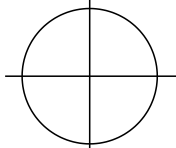
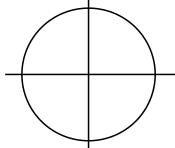
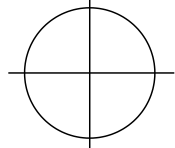
علی هاشمی

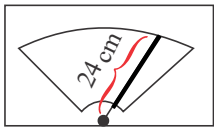
نام آزمون: فصل چهارم حسابان ۱

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.

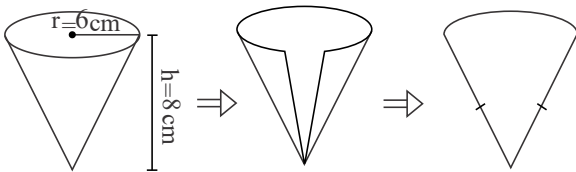
			
$\theta = -\frac{\pi}{6}$	$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} =$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$	$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6}$
انتهای کمان در ربع چهارم است.	انتهای کمان در ربع ... است.	انتهای کمان در ربع ... است.	انتهای کمان در ربع ... است.



۲- طول برف پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه 120° طی می‌کند.
($\pi \simeq 3,14$)

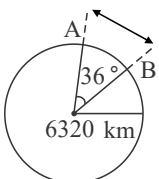
الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

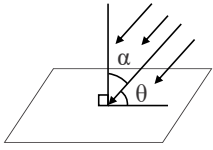
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟



۳- شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6\text{cm}$ و ارتفاع آن $h = 8\text{cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

۴- فاصله دو نقطه A و B از کره زمین که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبرو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.





۵- شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر) اگر شدت نور را با I نشان دهیم، رابطه $I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را نشان می‌دهد.

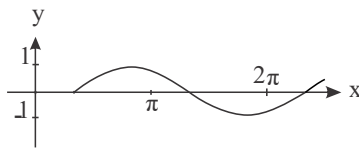
الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

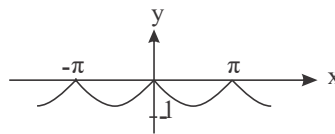
پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).
(با کمی تغییر)

۶- توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

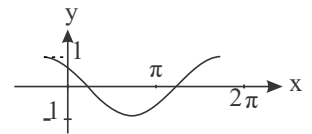
پ) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$

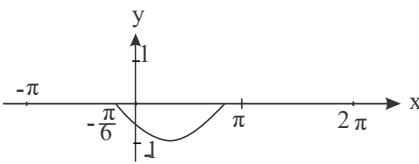


الف) $y = -|\sin x|$

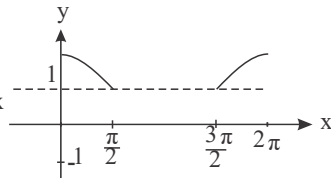


۷- در هریک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

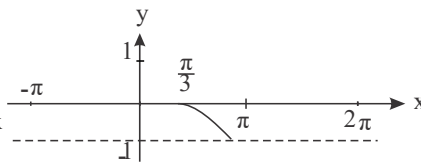
پ) $y = 1 + |\cos x|$



ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$



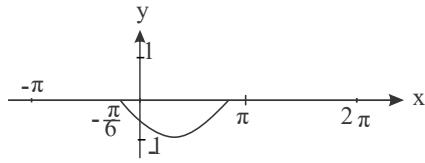
الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$



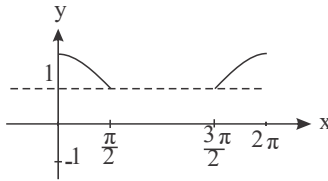


۸- با توجه به نمودارهای زیر، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

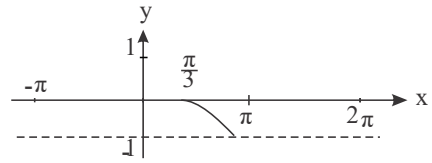
پ) $y = 1 + |\cos x|$



ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

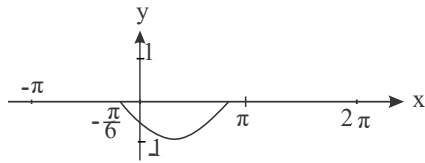


الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$

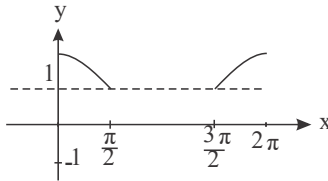


۹- با توجه به نمودارهای زیر، کدامیک از توابع مثلثاتی داده شده در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟

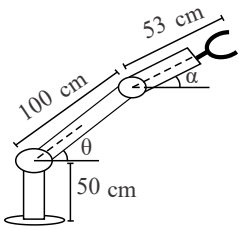
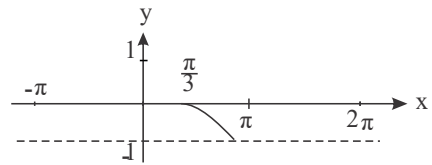
پ) $y = 1 + |\cos x|$



ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$



الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$



۱۰- در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبرو در نظر می‌گیرند.

الف) ارتفاع نوک گیره این ربات را از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید.
 $(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع 23.5 cm مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



۱۱- فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = \frac{-12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۱۲- مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف

$$\sin(300^\circ) =$$

ب

$$\cot(75^\circ) =$$

پ

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$



ت

$$\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) =$$

ث

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$$

ج

$$\tan(-84^\circ) =$$

چ

$$\tan(-15^\circ) =$$

ح

$$\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) =$$

**خ**

$$\tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) =$$

۱۳ - درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (زوایا بر حسب رادیان هستند).

الف

$$\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$$

ب

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos \theta = 1$$

پ

$$\cos Y = \cos(-Y)$$



ت

$$\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$$

۱۴ - مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\cos 15^\circ$$

ب

$$\tan 105^\circ$$

پ

$$\sin \frac{\pi}{12}$$

۱۵ - با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که:



الف

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ب

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



پاسخنامه تشریحی

- ۱

$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
انتهای کمان در ربع سوم است.	انتهای کمان در ربع اول است.	انتهای کمان در ربع دوم است.

۲ - الف)

$$D = 12^\circ \Rightarrow \frac{12^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$$

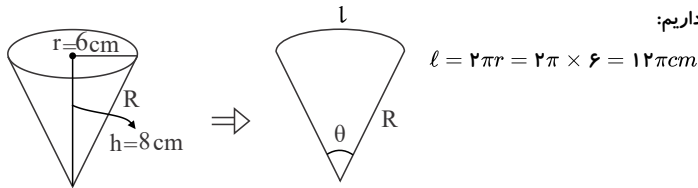
ب)

$$r = 24\text{cm}, \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ رادیان} \Rightarrow \ell = r \cdot \alpha = 24 \times \frac{2\pi}{3} = 16\pi$$

$$\Rightarrow \ell = 16 \times 3,14 = 50,24\text{cm}$$

۳ -

طول کمان مقابل به زاویه θ در قطاع حاصل همان محیط قاعده مخروط است و داریم:



$$R^2 = r^2 + h^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow R = 10 \Rightarrow \theta = \frac{\ell}{R} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} \text{ رادیان}$$

۴ -

در این سوال باید طول کمان مقابل به زاویه 36° را در دایره‌ای به شعاع 6320km بیابیم.

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5} \text{ رادیان} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{5}$$

$$\ell = r \cdot \alpha = 6320 \times \frac{\pi}{5} = 1264\pi = 1264 \times 3,14 = 3968,96\text{km}$$

۵ - الف) با توجه به شکل α و θ متمم هستند یعنی:

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$I = k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = k \sin \theta$$

ب)

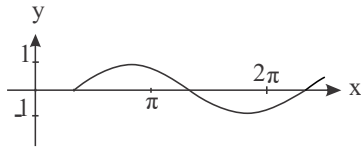
$$\theta = 0 \rightarrow I = k \sin 0 = k \times 0 = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{6} = \frac{k}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{3} = \frac{k\sqrt{3}}{2}$$

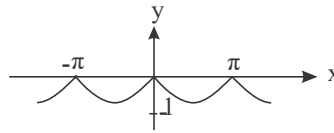
پ) بیشترین مقدار I زمانی است که $\sin \theta$ برابر یک باشد یعنی:

$$\sin \theta = 1 \Rightarrow I_{\text{man}} = k, \quad \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

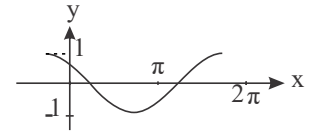
۶ -



$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$



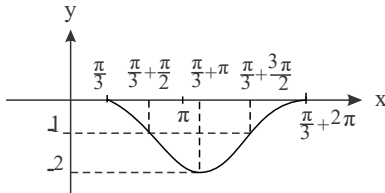
$$y = -|\sin x|$$



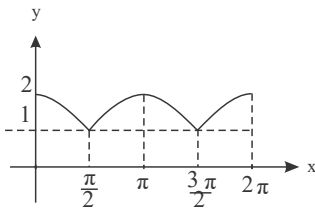
$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

- ۷

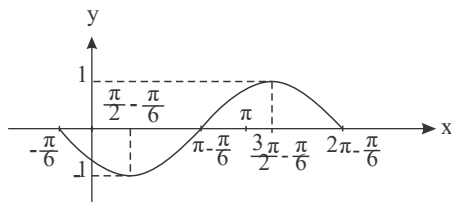
شکل سمت راست مربوط به تابع (ب) یعنی $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ می باشد.



شکل وسط مربوط به تابع (پ) یعنی $y = 1 + |\cos x|$ می باشد.



شکل سمت چپ مربوط به تابع (الف) یعنی $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ می باشد.



- ۸

الف) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

بیشترین $y = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = -(-1) = 1$

کمترین $y = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

ب) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

بیشترین $y = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi$

کمترین $y = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi$

پ) $y = 1 + |\cos x|$

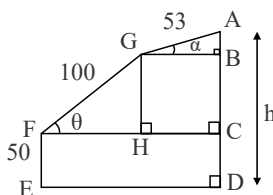
بیشترین $y = 2 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi$

کمترین $y = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

۹ - هیچ کدام از توابع در بازه $(0, \pi)$ یک به یک نمی باشند.

- ۱۰

الف)



$$\triangle GAB : \sin \alpha = \frac{AB}{53} \Rightarrow AB = 53 \sin \alpha$$

$$\triangle FGH : \sin \theta = \frac{GH}{100} \Rightarrow GH = 100 \sin \theta$$

$$\Rightarrow BC = GH = 100 \sin \theta$$

$$CD = EF \Rightarrow CD = 50$$

$$h = AB + BC + CD \Rightarrow h = 50 + 53 \sin \alpha + 100 \sin \theta$$

فصل چهارم حسابان ۱

ب)



$$h = ۲۳,۵, \alpha = -۳۰ \Rightarrow ۵۰ + ۵۳ \sin(-۳۰) + ۱۰۰ \sin \theta = ۲۳,۵$$

$$۵۰ - ۵۳ \times \frac{1}{۲} + ۱۰۰ \sin \theta = ۲۳,۵ \Rightarrow ۱۰۰ \sin \theta = ۲۳,۵ - ۵۰ + ۲۶,۵$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ \sin \theta = ۰ \Rightarrow \sin \theta = ۰ \Rightarrow \theta = ۰$$

(۱۱ - الف)

$$\cos \alpha = \frac{۴}{۵} \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{۳}{۵}$$

$$\cos \beta = -\frac{۱۲}{۱۳} \rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۲۵}{۱۶۹} \Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\beta \text{ ربع دوم}} \sin \beta = \frac{۵}{۱۳}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{۳}{۵} \times \left(-\frac{۱۲}{۱۳}\right) + \frac{۴}{۵} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{-۳۶ + ۲۰}{۶۵} = -\frac{۱۶}{۶۵}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{۴}{۵} \times \left(-\frac{۱۲}{۱۳}\right) + \frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{-۴۸ + ۱۵}{۶۵} = -\frac{۳۳}{۶۵}$$

(ب)

$$\left. \begin{aligned} ۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲} \\ \frac{\pi}{۲} < \beta < \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{۲} < \alpha + \beta < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \pi < \alpha + \beta < \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\sin(\alpha + \beta) < ۰$$

$\alpha + \beta$ در ناحیه سوم قرار دارد.

- ۱۲

الف

$$\sin(۳۰۰^\circ) = \sin(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin(-۶۰^\circ) = -\sin ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ب

$$\cot(۷۵^\circ) = \cot(۲ \times ۳۶^\circ + ۳^\circ) = \cot ۳^\circ = \sqrt{۳}$$

پ

$$\cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = \cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ت

$$\cos\left(-\frac{۲۳\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲۳\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲۴\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(۶\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \cos \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ث

$$\sin\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = -\sin \frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ج

$$\tan(-۸۴^\circ) = -\tan(۸۴^\circ) = -\tan(۲ \times ۳۶^\circ + ۱۸^\circ - ۶^\circ) = -\tan(۱۸^\circ - ۶^\circ) = -(-\tan ۶^\circ) = \tan ۶^\circ = \sqrt{۳}$$

چ

$$\tan(-۱۵^\circ) = -\tan(۱۵^\circ) = -\tan(۱۸^\circ - ۳^\circ) = \tan ۳^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

ح

$$\cos\left(\frac{۹\pi}{۴}\right) = \cos\left(۲\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = \cos \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



خ

$$\tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

- ۱۳

الف

درست است. $\cos\theta + \cos(\pi - \theta) = \cos\theta - \cos\theta = 0$

ب

نادرست است. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta + \cos\theta = 1$

پ

درست است. $\cos\gamma = \cos(-\gamma) \Rightarrow \cos\gamma = \cos\gamma$

ت

درست است. $\tan(\pi - \theta) = \tan\pi - \tan\theta \Rightarrow -\tan\theta = 0 - \tan\theta = -\tan\theta$

در مورد (د) توجه کنید که در این مورد استثناء درست است، یعنی این شیوه در موارد مشابه قابل تعمیم نمی‌باشد بعنوان مثال رابطه زیر نادرست است.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\frac{\pi}{2} - \tan\theta$$

- ۱۴

الف

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ب

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} = \frac{1 + 3 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

پ

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{4\pi - 3\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

- ۱۵

الف

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

ب

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$