



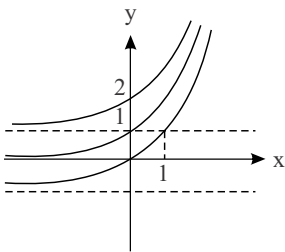
علی هاشمی

نام آزمون: فصل سوم حسابان ۱

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

- ۱- تحت شرایط ایده آل، جرم یک توده معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم باکتری وجود دارد.
- الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.
- ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت بر آورد کنید.



- ۲- نمودار توابع $y = 2^x$, $y = 2^x + 1$ و $y = 2^x - 1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x$, $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a > 1$)

- ۳- داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10(0.8)^t$ به دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

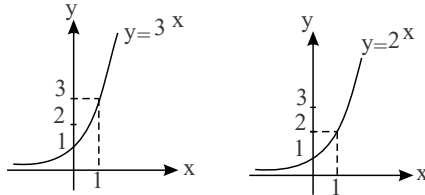
- ۴- الف) سه عدد بین اعداد $3^{\sqrt{10}}$, $3^{2.5}$ پیدا کنید.

ب) نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

پ) اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آنگاه چه رابطه‌ای بین x, y, z برقرار است؟ ($a > 1$)

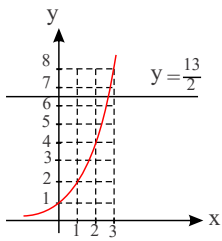


۵- ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.



الف) $3^{1-\sqrt{2}}$ (ب) $2^{1,25}$ (پ) $3^{\frac{2}{3}}$

۶- الف) در شکل زیر خط $y = \frac{13}{2}$ نمودار $y = 2^x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟



ب) خط $y = \sqrt{7}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y = 2^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

۷- در تصفیه آب، داخل فیلترها لایه تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی‌ها باقی

می‌ماند. اگر داخل این فیلترها دو لایه قرار دهیم، آنگاه $0.7 \times 0.7 = 0.49$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به دست می‌آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟



۸- با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$\log_{10} 0.01, \log_6 \frac{1}{6}, \log_2 \sqrt{2}, \log_2 \sqrt[3]{2^2}$$

۹- نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ با هم مقایسه کنید.

۱۰- الف) خط $y = 27$ نمودار تابع $y = 3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y = 10$ نمودار تابع $y = (0.1)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱۱- نمودار دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ را رسم کنید و سپس آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

۱۲- عبارت درست را با \checkmark و عبارت غلط را با \times علامت بزنید.

لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است.

تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند.

اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d, b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد.

اگر $0 < a < b$ و $a > b$ آن گاه $\log_a a < \log_a b$



۱۳- الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$ برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟ ($\log 2 \simeq 0.301$)

۱۴- نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به ۰.۱ گرم کاهش می‌یابد؟

۱۵- گزینه‌های درست را با \checkmark و گزینه‌های نادرست را با \times علامت بزنید.

$$\log 5 = \log 3 + \log 2 \quad \square \quad \log_a a \times \log_a b = 1 \quad \square$$

۱۶- نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند، چقدر است؟

۱۷- عبارات زیر را ساده کنید. ($\log 3 \simeq 0.4771, \log 2 \simeq 0.301$)



الف

$$\log(18 \times 375)$$

ب

$$\log \sqrt{0,75}$$

پ

$$\log_r \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}}$$

۱۸ - درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

**الف**

$$(b \neq 1, a, b > 0) a^{\log_b a} = a$$

ب

$$(d \neq 1, a, b, c, d > 0) \log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c$$

پ

$$\log x \log y = \log x + \log y$$

ت

لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

۱۹ - معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.



الف

$$\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0$$

ب

$$\log_2(12b - 21) - \log_2(b^2 - 3) = 2$$

پ

$$\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 1) = -1$$

۲۰- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف

$$y = 1 + \log_2 x$$



ب

$$y = -3^x - 2$$

پ

$$y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$$



پاسخنامه تشریحی

۱ - الف) اگر جرم اولیه ۱۰۰ میلی گرم را M و جرم باکتری‌ها پس از t ساعت را با $m(t)$ نشان دهیم، داریم:

$$m(1) = 2M \quad \text{جرم پس از دو ساعت} \quad m(2) = 2m(1) = 2 \times 2M = 2^2 M$$

$$m(3) = 2m(2) = 2 \times 2^2 M = 2^3 M \quad \text{جرم پس از سه ساعت}$$

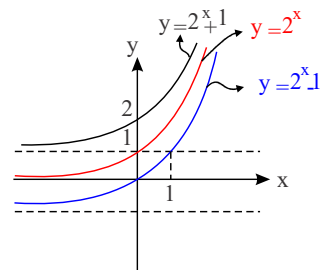
به همین ترتیب داریم:

$$m(t) = 2^t \cdot M \Rightarrow m(t) = 100 \times 2^t$$

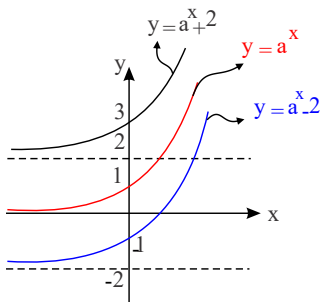
(ب)

$$t = 20 \Rightarrow m(20) = 100 \times 2^{20} = 100 \times 1048576 = 104857600 \text{ mgr}$$

- ۲



برای رسم $y = a^x + 2$ باید نمودار $y = a^x$ را ۲ واحد بالا ببریم و همچنین برای رسم $y = a^x - 2$ باید نمودار $y = a^x$ را ۲ واحد پایین ببریم. ($a > 1$)



- ۳

الف) $t = 8 \Rightarrow A(8) = 10(0,8)^8 = 1,677 \text{ mgr}$

ب) $t = 0 \Rightarrow A(0) = 10(0,8)^0 = 10, t = 1 \Rightarrow A(1) = 10 \times (0,8) = 8$

$$\text{مقدار دفع شده} = 10 - 8 = 2 \Rightarrow \frac{\text{مقدار دفع شده}}{\text{مقدار اولیه}} \times 100 = \frac{2}{10} \times 100 = 20$$

(الف - ۴)

$$\sqrt{10} \approx 3,16 \Rightarrow 2,5 < 2,6 < 2,7 < 3 < \sqrt{10} \Rightarrow 3^{2,5} < 3^{2,6} < 3^{2,7} < 3^3 < 3\sqrt{10}$$

(ب) باید پایه‌ها را در دو طرف نامعادله یکسان کنیم.

$$4^{2x-1} > \frac{1}{1024} \Rightarrow (2^2)^{2x-1} > \frac{1}{2^{10}} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-10} \Rightarrow 4x - 2 > -10$$

$$\Rightarrow 4x > -8 \Rightarrow x > -2$$

(ب)

$$a^x > a^y > a^z \xrightarrow{a>1} x > y > z$$

- ۵

الف) از روی نمودار $3^1 - \sqrt{2} \rightarrow 3^1 - \sqrt{2} = 0,7$ ماشین حساب $\Rightarrow 3^1 - \sqrt{2} = 0,634$

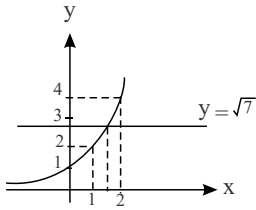
ب) از روی نمودار $2^{1,25} \rightarrow 2^{1,25} = 2,2$ ماشین حساب $\Rightarrow 2^{1,25} = 2,378$

پ) از روی نمودار $3^2 \rightarrow 3^2 = 5,1$ ماشین حساب $\Rightarrow 3^2 = 5,196$



۶ - الف) طبق شکل طول نقطه برخورد خط $y = \frac{13}{2}$ با نمودار $y = 2^x$ عددی بین ۲ و ۳ می باشد.

$$2^x = \frac{13}{2} \Rightarrow 2^2 < \frac{13}{2} < 2^3 \Rightarrow 2^2 < 2^x < 2^3 \Rightarrow 2 < x < 3$$



ب) طول نقطه برخورد خط $y = \sqrt{7}$ و $y = 2^x$ عددی بین ۱ و ۲ می باشد. زیرا: $2^x = \sqrt{7}$

$$2^1 < \sqrt{7} < 2^2 \Rightarrow 2^1 < 2^x < 2^2 \Rightarrow 1 < x < 2$$

۷ - الف) درصد ناخالصی های باقیمانده در آب تابعی از تعداد لایه ها می باشد، اگر تعداد t لایه استفاده شود و درصد ناخالصی های باقی مانده را با $f(t)$ نشان دهیم، داریم:

$$f(t) = (0.7)^t$$

ب) بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی ها از بین برود، یعنی ناخالصی های باقی مانده کمتر از ۴ درصد می باشد یعنی داریم:

$$f(t) \leq \frac{4}{100} \Rightarrow (0.7)^t \leq 0.04 \Rightarrow \log_{(0.7)}(0.7)^t \geq \log_{(0.7)}(0.04) \Rightarrow t \geq \log_{(0.7)}(0.04) \Rightarrow t \geq 9.02$$

حداقل ۱۰ لایه باید قرار داد.

- ۸

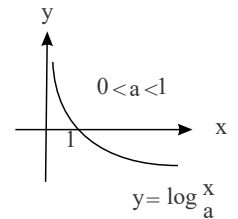
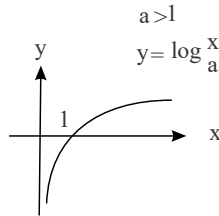
$$\log_{10} 0.7 \cdot 1 = x \Rightarrow 10^x = 0.7 \Rightarrow 10^{-2} = 0.7 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \log_{10} 0.7 = -2$$

$$\log_6 \frac{1}{6} = x \Rightarrow 6^x = \frac{1}{6} = 6^{-1} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \log_6 \frac{1}{6} = -1$$

$$\log_2 \sqrt{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 \sqrt[3]{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$$

- ۹



در تابع $y = \log_a x$ با شرط $a > 1$ با افزایش x مقدار y هم افزایش می یابد ولی هنگامی که $0 < a < 1$ با افزایش x مقدار y کاهش می یابد.

۱۰ - الف)

$$y = 27, y = 3^x \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

نقطه برخورد، نقطه $(3, 27)$ می باشد.

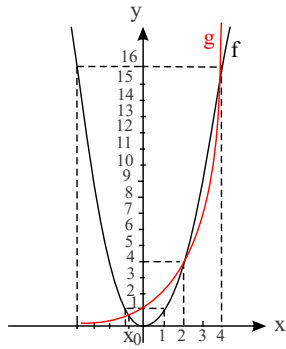
ب)

$$y = 10, y = (0.7)^x = 10 \Rightarrow (10^{-2})^x = 10$$

$$\Rightarrow 10^{-2x} = 10 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

نقطه برخورد، نقطه $(-\frac{1}{2}, 10)$ می باشد.

- ۱۱



- نمودار f بالاتر از g قرار دارد. $x < x_0 \Rightarrow$
- نمودار g بالاتر از f قرار دارد. $x_0 < x < 2 \Rightarrow$
- نمودار f بالاتر از g قرار دارد. $2 < x < 4 \Rightarrow$
- نمودار g بالاتر از f قرار دارد. $x > 4 \Rightarrow$

۱۲ - مورد اول: نادرست \times مثال نقض: $\log_{(0,5)}(0,5) = 1$

مورد دوم: درست \checkmark

مورد سوم: درست \checkmark

مورد چهارم: نادرست \times تابع $y = \log x$ هیچگاه محور y ها را قطع نمی‌کند.

مورد پنجم: درست \checkmark

مورد ششم: نادرست \times

مثال نقض:

$$a = 100, b = 10 \Rightarrow \log_{10} a = 2, \log_{10} b \Rightarrow \log_{10} a > \log_{10} b$$

۱۳ - الف)

$$m(t) = 2^t \Rightarrow m = 2^t \Rightarrow t = \log_2 m \Rightarrow m = \log_2 t \Rightarrow m^{-1}(t) = \log_2 t$$

تابع وارون این تابع یعنی $m^{-1}(t) = \log_2 t$ زمانی که جرم باکتری‌ها برابر t گرم می‌باشد را به دست می‌آورد.

ب)

$$m^{-1}(5000) = \log_2 5000 = \log_2 5 \times 10^3 = \log_2 5 + 3 \log_2 10 = \frac{\log 5}{\log 2} + \frac{3 \log 10}{\log 2}$$

$$= \frac{1 - \log 2}{\log 2} + \frac{3}{\log 2} = \frac{1 - 0,301}{0,301} + \frac{3}{0,301} = 2,32 + 9,96 = 12,28$$

۱۴ - الف)

$$M = 1, T = 4 \Rightarrow m(t) = M \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{t}{4}}}$$

ب)

$$m(t) = 0,01 \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{t}{4}}} = 0,01 = \frac{1}{100} \Rightarrow 2^{\frac{t}{4}} = 100$$

$$\Rightarrow \log 2^{\frac{t}{4}} = \log 100 \Rightarrow \frac{t}{4} \log 2 = \log 10^2 = 2 \Rightarrow t = \frac{8}{\log 2} \Rightarrow t = \frac{8}{0,301} = 26,57$$

۱۵ - $\log_a a \times \log_a b = 1$ درست است.

$\log 5 = \log 3 + \log 2$ نادرست است، زیرا: $\log 5 = \log 3 + \log 2 = \log 6 \neq \log 5$

۱۶ -

$$T = 30, M = 128mgr \Rightarrow m(t) = M \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$t = 300 \rightarrow m(300) = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{300}{30}} = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{128}{1024} = 0,125mgr$$

۱۷ -

الف

$$\log(18 \times 375) = \log(3^2 \times 2 \times 5^3 \times 3) = \log(3^3 \times 2 \times 5^3)$$

$$= \log 3^3 + \log 2 + \log 5^3 = 3 \log 3 + \log 2 + 3 \log 5$$

$$= 3 \log 3 + \log 2 + 3(1 - \log 2) = 3 \log 3 - 2 \log 2 + 3$$

$$= 3 \times 0,4771 - 2 \times 0,301 + 3 = 3,8293$$



ب

$$\log \sqrt{0.75} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2^2 = \frac{1}{2} \log 3 - \log 2$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.4771 - 0.301 = -0.06245$$

پ

$$\log_2 \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{2}} = \log_2 \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[3]{2}} = \log_2 \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \log_2 2^{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = \log_2 2^{\frac{5}{12}} = \frac{5}{12} \log_2 2 = \frac{5}{12}$$

- 18

الف

$$a^{\log_b a} = a \Rightarrow \log_b a = 1 \Rightarrow a = b \quad \text{نادرست}$$

در حالت کلی ممکن است a و b برابر نباشند. پس این رابطه نادرست است.

ب

$$\log_d abc = \log_d (ab)c = \log_d ab + \log_d c = \log_d a + \log_d b + \log_d c \quad \text{درست}$$

پ

نادرست. ضرب دو عبارت در حالت کلی، با مجموع آن‌ها برابر نمی‌باشد.

ت

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1 \quad \text{نادرست. بعنوان مثال } \log_2 \frac{1}{2} \text{ عددی منفی است.}$$

- 19

الف

$$\log_2 m^2 - \log_2 m - 3 = 0 \Rightarrow 2 \log_2 m - \log_2 m = 3 \Rightarrow \log_2 m = 3$$

$$\Rightarrow m = 2^3 \Rightarrow m = 8 \quad \text{قابل قبول}$$

ب

$$\log_2 (12b - 21) - \log_2 (b^2 - 3) = 2 \Rightarrow \log_2 \left(\frac{12b - 21}{b^2 - 3} \right) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 2^2 = 4 \Rightarrow 4b^2 - 12 = 12b - 21 \Rightarrow 4b^2 - 12b - 12 + 21 = 0$$

$$\Rightarrow 4b^2 - 12b + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow (2b - 3)^2 = 0 \Rightarrow 2b - 3 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$b = \frac{3}{2}$ غیر قابل قبول است زیرا عبارت مقابل لگاریتم منفی می‌شود. پس معادله جواب ندارد.

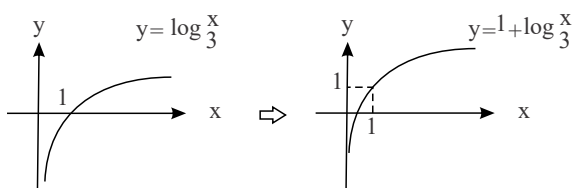
پ

$$\log_{\frac{1}{10}} (x^2 - 1) = -1 \Rightarrow x^2 - 1 = \left(\frac{1}{10} \right)^{-1} = 10 \Rightarrow x^2 = 11 \Rightarrow x = \pm \sqrt{11}$$

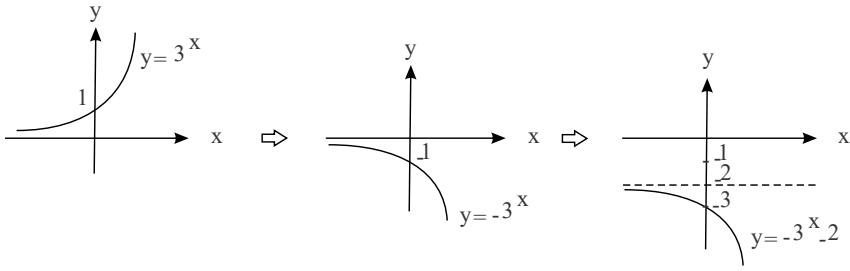
هر دو جواب قابل قبول هستند.

- 20

الف



ب



پ

