نام آزمون: تابع لگاریتمی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی


۱- اگر $\log ۲۰ = a$ و $\log ۳۰ = b$، مقدار $\log ۱۵$ برحسب $a$ و $b$ کدام است؟

۲- اگر $A = \log \frac{۴}{۵} + \log \frac{۵}{۶} + \log \frac{۶}{۷} + \cdots + \log \frac{۳۹۹}{۴۰۰}$، و $B = (\log_{۱۵} ۱۶)(\log_{۱۴} ۱۵) \cdots (\log_{۲} ۳)$ حاصل $\frac{A}{B}$ کدام است؟

۳- اگر $\log_{۵}^{(x+۱)} + \log_{۵}^{(x-۱)} = ۱$ باشد، حاصل $\log_{۳۶}^{x}$ کدام است؟

۴- نمودار تابع $f(x) = ۲^{x+۱} - ۳$ محور طول‌ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\log_{۲} x \times \log_{۲} ۴x = ۳$ کدام است؟

۶- نمودار تابع $f(x)=۳-\log_{۲}(x+۲)$ از کدام‌یک از نواحی مختصاتی نمی‌گذرد؟

۷- نمودار تابع $y=\log_{۰/۵}^{x}$ و تابع معکوس آن در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۸- اگر $\log_{\sqrt{x}}^{(x+۳)}-۱=\log_{x}^{(۲x+۶)}$ باشد، آنگاه حاصل $\log_{۲۷}^{\sqrt[۴]{x}}$ کدام است؟

۹- با توجه به دو معادلهٔ $۲^{x}\times ۱۶^{y}=۳۲$ و $\log_{۳}^{(x+y)}=۲-\log_{۳}^{۲}$، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱۰- اگر $\log ۲\simeq ۰/۳$ و $\log ۶\simeq ۰/۷۸$ باشد، حاصل $\log ۱۵$ کدام است؟

۱۱- حاصل $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\log_{۴}^{۲۵}+۲}$ کدام است؟

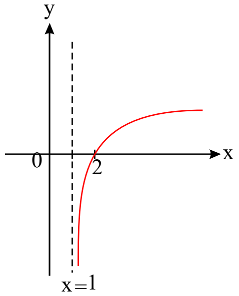
۱۲ - دامنهٔ تابع $f(x)=\log_a^{(x+b)}$ برابر $(2,+\infty)$ است. اگر $f(\frac{7}{3})=-1$ باشد، $a-b$ کدام است؟

۱۳ - اگر $3^{2x}-2\times 3^{x}=-1$ و $\log_{81}^{9\sqrt{3}}=\frac{y}{8}$ باشد، حاصل $\log_{(x+y)}^{5y}$ کدام است؟

۱۴ - اگر $x_1$ و $x_2$ جواب‌های معادلهٔ $\log_3^{(9^x+18)}=2+x$ باشند، مقدار $|x_2-x_1|$ کدام است؟

۱۵ - مقدار $A=25^{\log_5^{\sqrt{3}}}+2\log_3^2\times 2\log_4^{\sqrt{3}}+\log\sqrt[5]{0/001}$ کدام است؟

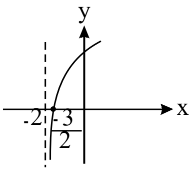
۱۶ - نمودار تابع $y=\log_2^{(x-a)}+b$ به‌صورت مقابل است. $a+b$ کدام است؟



۱۷ - تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_{۲}^{(bx-۵)}$ از نقاط $(۲,۷)$ و $(۳,۹)$ می‌گذرد. $f(۷)$ کدام است؟

۱۸ - اگر $\log_{۲}^{۳} = a$ باشد، حاصل $\log_{۶}^{۱۸}$ کدام است؟

۱۹ - اگر نمودار تابع $f(x) = \log_{۴}^{ax+b}$ به‌صورت مقابل باشد، مقدار $f(۱۴)$ کدام است؟




۲۰ - اگر $\log_{b}^{a} \times \log_{۳}^{b} = ۵$ باشد، در این صورت مقدار $a$ همواره کدام است؟ $(a \neq b\,,\ a,b > ۰)$

۲۱ - از معادلات $\log x = ۲\log y - \log ۳$ و $۳^{x-۳} \times ۹^{y-x} = ۱$، حاصل $x+y$ کدام است؟

۲۲- اگر $\log_{x^{۲}}^{x^{۴}+۸x^{۲}+۱۶} = ۱ + \log_{\sqrt{x}}^{\sqrt{۵}}$، مقدار $x$ کدام است؟

۲۳- حاصل $[x]+[۲x]+[۳x]$ به ازای $x = \log ۸$ کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

۲۴- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $\log_{۴}^{x} + ۲\log_{x}^{۸} = ۴$ باشند، مقدار $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ کدام است؟

۲۵- اگر $\log(۲^{x}+۸) = \log ۲ + x\log ۲$، آنگاه حاصل $\dfrac{\log_{x}^{۳}+۳}{\log_{۳}^{x}+۱}$ برابر کدام است؟

۲۶- مجموع مربعات جواب‌های معادله‌ی $\log_{۲}^{۴x^{۲}+۸x+۴} = \log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲x+۸}} + ۳$ برابر است با:

۲۷ - حاصل $\log_{2\sqrt[3]{4\sqrt{2}}} \sqrt[6]{8\sqrt{32}}$ برابر کدام است؟

۲۸ - معادله‌ی لگاریتمی $\log(3x+1)+2\log\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log(x^2-2x+1)+\log(x+2)$ را در نظر بگیرید اگر $\alpha$ ریشه‌ی این معادله باشد، حاصل $\log_5^{(4\alpha+13)}$ کدام است؟

۲۹ - اگر $x=1$ یک جواب معادله‌ی $\log_2^{x+a}=\log_2^{\frac{2}{x}}+2$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۳۰ - از تساوی $\log_{x-1}^{x^2-2x+5}=1+\log_{x-1}^{5}$، مقدار لگاریتم $x+20$ در پایه‌ی ۱۲۵، کدام است؟

۳۱ - حاصل عبارت $9^{\log_3 \sqrt{5}}+\log_{0/2}^{625}$ کدام است؟

۳۲ - در معادله‌ی لگاریتمی $\log(x^2+x-20)-\log(x-4)=\log(2x-47)$، مقدار $x$ کدام است؟

۳۳- اگر $\log ۲ = k$، آن‌گاه حاصل $A = \frac{۱}{۲}\log(۷+۲\sqrt{۶}) + \log(\sqrt{۶}-۱)$ کدام است؟

۳۴- اگر $\log_{۲}^{(x^{۳}+۵)} = ۵$، آن‌گاه حاصل $\log_{۵}^{(x^{۲}-۴)}$ کدام است؟

۳۵- نمودار دو تابع با معادله‌های $y = \log(x^{۲}-۱)$ و $y = ۱+\log(x+۱)$ یکدیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند؟

۳۶- اگر $\log_{۴}^{x+۱} = \log_{۳}^{\sqrt{۳}} + \log_{۲}^{\sqrt{x-۱}}$، آن‌ گاه حاصل $\log_{۴}^{۳x-۱}$ کدام است؟

۳۷- معادله‌ی $\log_{۲}^{(۳x-۱)^{۳}} + \log_{\sqrt[۳]{۲}}^{(x-۵)} = ۳\log_{۴}^{۲۵}$ چند ریشه دارد؟

۳۸- اگر $\log_{۱۶}^{۶} = a$، حاصل $\log_{۱۲}^{۶۴}$ کدام است؟

۳۹- اگر $\log_{۲} x = ۲$ و $\log_{\sqrt{۲}} y = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\log_{xy} ۲\sqrt{۲}$ کدام است؟

۴۰- اگر $۵^{b} = B$ باشد، حاصل $\log_{۶۲۵}\sqrt{۱۲۵B^{۳}}$ کدام است؟

۴۱- اگر $۲^{x-۱} + ۲^{x+۲} = \frac{۹}{۸}$، آن‌گاه حاصل لگاریتم $\left|x^{۳} - ۱\right|$ در پایه‌ی ۳ کدام است؟

۴۲- اگر $\begin{vmatrix} \log x & \log ۲ \\ \log ۲ & \log x \end{vmatrix} = \log ۲٫۵$ باشد، مقدار $x$ کدام می‌تواند باشد؟

۴۳- اگر $\log ۱۲۵ = ۹k$ باشد، مقدار $\log \sqrt[۳]{۰٫۳۲}$ برحسب $k$ کدام است؟

۴۴ - نمودارهای دو تابع $f(x) = \frac{۱}{۲}\log\frac{۱}{x}$ و $g(x) = \log\sqrt{x}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۴۵ - اگر $\log(x-۱) = ۲\log ۲ - \log(x-۳)$ باشد، حاصل $\log_{۵}^{(x-۲)}$ کدام است؟

۴۶ - اگر $\begin{cases} \log_{۳}^{x} + \log_{۳}^{y} = ۲ \\ x^{۲} + y^{۲} = ۴۶ \end{cases}$ مقدار لگاریتم $\sqrt{x+y}$ در پایه‌ی ۸ چقدر است؟

۴۷ - اگر حاصل عبارت $A = ۲^{(\log_{\sqrt{۲}}^{۴} - \log_{۲}^{x})}$ برابر با یک باشد، آن گاه مقدار $\log_{\frac{۱}{۲}}^{\sqrt[۳]{x}}$ کدام است؟

۴۸ - اگر $\log ۲ = m$ و $\log ۳ = n$، حاصل $\log_{۵۴}^{\sqrt{۱۲۵}}$ بر حسب $m$ و $n$ کدام است؟

۴۹- اگر $\log_{x-۱}^{۳x-۱} = ۳$ ، آنگاه $\log_{\frac{۱}{۳}}^{۲x+۳}$ چقدر است؟

۵۰- لگاریتم عددی در پایه‌ی ۴ برابر $\frac{۱۵}{۴}$ است. لگاریتم مجذور معکوس این عدد در پایه‌ی ۸ کدام است؟

۵۱- نمودار تابع به معادله‌ی $y = ۲ - \log_{۱۰}^{(x+۱۰)}$ ، محور $x$ها را با طول $x_۰$ و محور $y$ها را با عرض $y_۰$ قطع می‌کند. حاصل $x_۰ + y_۰$ کدام است؟

۵۲- هر گاه $\log_{x}^{۲۵} + \log_{۵}^{۲۵x^۲} = ۷$ باشد، آنگاه $\log_{۱۶}^{(x^۲+۳)}$ کدام می‌تواند باشد؟

۵۳- اگر $A = \sqrt{۲} - ۱ \ , \ B = \sqrt{۲} + ۱$ حاصل $\log_{۲}(-\sqrt[۵]{A^۲ - B^۲})$ کدام است؟

۵۴- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \log \frac{۱-x}{۱+x}$ کدام است؟

۵۵ - اگر $0 < b < 1$ باشد کدام گزینه صحیح است؟

۵۶ - حاصل $\log_9^{3\sqrt[4]{27}}$ کدام است؟

۵۷ - جواب معادلهٔ لگاریتمی $\log(x+2) + \log(x^2 - 2x + 1)\frac{1}{2} = \log\sqrt{x-2}\,2 + \log(3x+1)$ کدام است؟

۵۸ - جواب معادله‌ی $2\log x - \log(x+2) = 1$ کدام است؟

۵۹ - معادله‌ی $\log(x-7) + \log x = \log(x+1) + \log(x-2)$ چند ریشه دارد؟

۶۰-اگر $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ و $g(x) = \log(x + ۲)$ کدام عدد عضو دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ است؟

# پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ قدم اول ساده‌سازی داده‌های مسئله می‌باشد.

$$\log ۲۰ = a \rightarrow \log^{۲\times۱۰} = a \rightarrow \log^{۲} + \log^{۱۰} = a \rightarrow \log^{۲} = a - ۱$$

$$\log ۳۰ = b \rightarrow \log^{۳\times۱۰} = b \rightarrow \log^{۳} + \log^{۱۰} = b \rightarrow \log^{۳} = b - ۱$$

باید توجه داشت می‌توان $\log^{۵}$ را هم به شکل زیر محاسبه کرد:

$$\log^{۵} = \log^{\frac{۱۰}{۲}} = \log^{۱۰} - \log^{۲} = ۱ - (a - ۱) = ۲ - a$$

هم می‌توان خواسته مسئله را به شکل زیر نوشت:

$$\log^{۱۵} = \log^{۳\times۵} = \log^{۳} + \log^{۵} = b - ۱ + ۲ - a = b - a + ۱$$

۲ - گزینه ۱ برای محاسبهٔ عبارت $A$ از خاصیت زیر استفاده می‌نماییم:

$$\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$$

$$A = \log^{\frac{۴}{۵}} + \log^{\frac{۵}{۶}} + \cdots + \log^{\frac{۳۹۹}{۴۰۰}} = \log^{(\frac{۴}{۵}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۶}{۷}\times\cdots\times\frac{۳۹۹}{۴۰۰})} = \log^{(\frac{۴}{۴۰۰})} = \log^{(\frac{۱}{۱۰۰})} = \log_{۱۰}^{۱۰^{-۲}} = -۲$$

برای محاسبهٔ عبارت $B$ داریم:

$$\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$$

$$B = \log_{۱۵}^{۱۶} \times \log_{۱۴}^{۱۵} \times \cdots \times \log_{۲}^{۳} = \log_{۲}^{۱۶} = \log_{۲}^{۲^{۴}} = ۴$$

پس داریم:

$$\frac{A}{B} = \frac{-۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$$

۳ - گزینه ۱

$$\log_{۵}^{(x+۱)(x-۱)} = ۱ \Rightarrow x^{۲} - ۱ = ۵ \Rightarrow x^{۲} = ۶ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۶} \text{ قق} \\ x = -\sqrt{۶} \text{ غق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{۳۶}^{x} = \log_{۳۶}^{\sqrt{۶}} = \frac{۱}{۴}\log_{۶}^{۶} = \frac{۱}{۴}$$

۴ - گزینه ۳ برای محاسبهٔ نقطهٔ برخورد نمودار با محور $x$ها کافیست که $y$ را صفر در نظر بگیریم.

$$y = ۲^{x+۱} - ۳ \xrightarrow{y=۰} ۲^{x+۱} - ۳ = ۰ \rightarrow ۲^{x+۱} = ۳ \xrightarrow{\log_{۲}^{()}} \log_{۲}^{۲^{x+۱}} = \log_{۲}^{۳}$$

$$\rightarrow x + ۱ = \log_{۲}^{۳} \rightarrow x = \log_{۲}^{۳} - ۱ \rightarrow x = \log_{۲}^{۳} - \log_{۲}^{۲} = \log_{۲}^{\frac{۳}{۲}}$$

۵ - گزینه ۱ برای حل معادله از خاصیت زیر استفاده می‌نماییم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_{۲} x(\log_{۲} ۴x) = ۳ \rightarrow \log_{۲} x(\log_{۲} ۴ + \log_{۲} x) = ۳$$

برای راحتی یک تغییر متغیر اعمال می‌نماییم:

$$\log_{۲} x = A$$

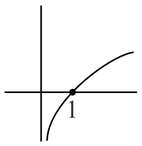
$$A(۲ + A) = ۳ \rightarrow A^{۲} + ۲A = ۳ \rightarrow A^{۲} + ۲A - ۳ = ۰$$

$$\rightarrow (A + ۳)(A - ۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} A = -۳ \rightarrow \log_{۲} x = -۳ \rightarrow x = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۸} \\ A = ۱ \rightarrow \log_{۲} x = ۱ \rightarrow x = ۲ \end{cases}$$

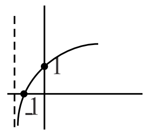
هر دو جواب قابل قبول است و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$۲ + \frac{۱}{۸} = \frac{۱۷}{۸}$$

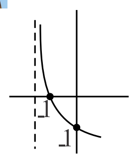
۶ - گزینه ۳ برای رسم ابتدا باید نمودار $y = \log_{۲}^{x}$ رسم نماییم.



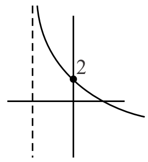

$y = \log_{۲}^{x}$




$y = \log_{۲}^{(x+۲)}$




$y = -\log_{۲}^{(x+۲)}$

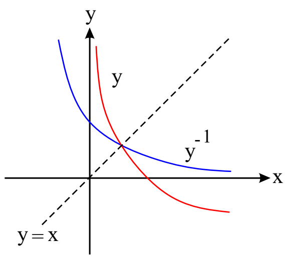



$y = -\log_{۲}^{(x+۲)} + ۳$

**۷ ـ گزینه ۲**

نمودار تابع $y = \log_{۰/۵}^{x}$ و معکوس آن $y^{-1} = (۰/۵)^x$ به‌صورت مقابل است.

مشاهده می‌کنیم دو نمودار روی نیمساز ربع اول ($y = x$) یک نقطهٔ تقاطع دارند.




**۸ ـ گزینه ۲**

$$\log_{\sqrt{x}}^{(x+۳)} - ۱ = \log_{x}^{(۲x+۶)}$$

$$\to \log_{x}^{(x+۳)^۲} - \log_{x}^{x} = \log_{x}^{(۲x+۶)} \to \log_{x}\frac{(x+۳)^۲}{x} = \log_{x}^{(۲x+۶)}$$

$$\to \frac{(x+۳)^۲}{x} = ۲x + ۶ \to x^۲ + ۶x + ۹ = ۲x^۲ + ۶x \to x^۲ - ۹ = ۰ \to \begin{cases} x = ۳ \ (\text{قابل‌قبول}) \\ x = -۳ \ (\text{غیرقابل‌قبول}) \end{cases}$$

$$\to \log_{۲۷}^{\sqrt[۴]{x}} \overset{x=۳}{=\!=\!=} \log_{۲۷}^{\sqrt[۴]{۳}} = \log_{۳^۳}^{۳^{\frac{۱}{۴}}} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۱}}\log_{۳}^{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

**۹ ـ گزینه ۳**

$$\log_{۳}^{(x+y)} = ۲ - \log_{۳}^{۲} \to \log_{۳}^{(x+y)} = \log_{۳}^{۹} - \log_{۳}^{۲} \to \log_{۳}^{(x+y)} = \log_{۳}^{\frac{۹}{۲}}$$

$$\to x + y = \frac{۹}{۲} \quad (۱)$$

$$۲^x \times ۱۶^y = ۳۲ \to ۲^x \times \left(۲^۴\right)^y = ۲^۵ \to ۲^x \times ۲^{۴y} = ۲^۵ \to ۲^{x+۴y} = ۲^۵ \to x + ۴y = ۵ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} ۲x + ۲y = ۹ \\ x + ۴y = ۵ \end{cases} \xrightarrow{\times(-۲)} \begin{cases} -۴x - ۴y = -۱۸ \\ x + ۴y = ۵ \end{cases}$$

$$-۳x = -۱۳ \to x = \frac{۱۳}{۳}$$

$$\to \frac{۱۳}{۳} + y = \frac{۹}{۲} \to y = \frac{۹}{۲} - \frac{۱۳}{۳} \to y = \frac{۱}{۶}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱۳}{۳}\,,\, y=\frac{۱}{۶}} \frac{x}{y} = \frac{\frac{۱۳}{۳}}{\frac{۱}{۶}} \to \frac{x}{y} = ۲۶$$

**۱۰ ـ گزینه ۲**

می‌دانیم $\log_{k}^{a} + \log_{k}^{b} = \log_{k}^{ab}$ و $\log ۵ = ۱ - \log ۲$ است.

$$\log ۶ = \log(۲ \times ۳) = \log ۲ + \log ۳ \to \log ۳ = \log ۶ - \log ۲ = ۰/۷۸ - ۰/۳ = ۰/۴۸$$

پس: $\log ۱۵ = \log ۵ + \log ۳ = ۱ - \log ۲ + \log ۳ = ۰/۷ + ۰/۴۸ = ۱/۱۸$

**۱۱ - گزینه ۱**

می‌دانیم $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$ و $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$ و $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$ است.

$$(\frac{1}{2})^{\log_4^{25}+2} = (\frac{1}{2})^{\log_{2^2}^{5^2}+2} = (\frac{1}{2})^{\log_2^5+2} = (\frac{1}{2})^{\log_2^5+\log_2^4}$$

$$= (\frac{1}{2})^{\log_2^{20}} = 20^{\log_2^{\frac{1}{2}}} = 20^{\log_2^{2^{-1}}} = 20^{-1} = \frac{1}{20} = 0.05$$

**۱۲ - گزینه ۳**

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = \log_a^{(x+b)} \to x+b>0 \to x>-b \\ D_f = (2,+\infty) \to x>2 \end{array}\right\} \to \boxed{b=-2}$$

$$\to f(x) = \log_a^{(x-2)} \quad , \quad f(\frac{7}{3}) = -1 \to -1 = \log_a^{(\frac{7}{3}-2)}$$

$$\to \log_a^{\frac{1}{3}} = -1 \to a^{-1} = \frac{1}{3} \to \boxed{a=3} \to a-b=5$$

**۱۳ - گزینه ۴**

می‌دانیم $\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$ است.

$$3^{2x} - 2\times 3^x = -1 \to (3^x)^2 - 2\times(3^x) + 1 = 0 \to (3^x-1)^2 = 0 \to 3^x = 1 \to x = 0$$

$$\log_{81}^{9\sqrt{3}} = \frac{y}{8} \to \log_{3^4}^{3^2\times 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{8} \to \log_{3^4}^{3^{\frac{5}{2}}} = \frac{y}{8} \to \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{y}{8} \to \frac{5}{8} = \frac{y}{8} \to y = 5$$

$$\log_{(x+y)}^{5y} = \log_5^{25} = \log_5^{5^2} = 2$$

**۱۴ - گزینه ۱**

می‌دانیم $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$ و $\log_b^a = c \to b^c = a$ است.

$$\log_3^{(9^x+18)} = 2+x \to 3^{(2+x)} = 9^x + 18 \to 3^2\times 3^x = (3^2)^x + 18$$

$$\to 9\times 3^x = (3^x)^2 + 18 \xrightarrow{3^x=A} 9A = A^2 + 18 \to A^2 - 9A + 18 = 0$$

$$\to (A-3)(A-6) = 0 \begin{cases} A=3 \to 3^x = 3 \to x_1 = 1 \\ A=6 \to 3^x = 6 \to x_2 = \log_3^6 \end{cases}$$

$$|x_2 - x_1| = |\log_3^6 - 1| = |\log_3^6 - \log_3^3| = |\log_3^2| = \log_3^2$$

**۱۵ - گزینه ۳**

$$25^{\log_5^{\sqrt{3}}} = (5^2)^{\log_5^{\sqrt{3}}} = 5^{2\log_5^{\sqrt{3}}} = 5^{\log_5^{(\sqrt{3})^2}} = 5^{\log_5^3} = 3$$

$$2\log_3^2 \times 2\log_4^{\sqrt{3}} = \log_3^4 \times \log_4^3 = 1$$

$$\log^{\sqrt[5]{0.001}} = \log^{(10^{-3})^{\frac{1}{5}}} = \log^{10^{-\frac{3}{5}}} = -\frac{3}{5}$$

$$\to A = 3 + 1 + (-\frac{3}{5}) = 4 - \frac{3}{5} = \frac{17}{5} = 3.4$$

**۱۶ - گزینه ۲**

$$\left.\begin{array}{r} y = \log_2^{(x-a)} + b \to x-a>0 \to x>a \\ D_f = (1,+\infty) \to x>1 \end{array}\right\} \to a=1$$

$$y(2) = 0 \longrightarrow \log_2^{2-a} + b = 0 \longrightarrow \log_2^1 + b = 0 \longrightarrow 0 + b = 0 \longrightarrow b = 0 \longrightarrow a+b = 1$$

۱۷ - گزینه ۴

$$f(x)=a+\log_2^{(bx-5)}$$

$$\begin{cases}(2,7)\rightarrow a+\log_2^{(2b-5)}=7\\ \\ (3,9)\rightarrow a+\log_2^{(3b-5)}=9\end{cases}\rightarrow \log_2^{(3b-5)}-\log_2^{(2b-5)}=9-7$$

$$\rightarrow \log_2^{\left(\frac{3b-5}{2b-5}\right)}=2\rightarrow \frac{3b-5}{2b-5}=4\rightarrow 3b-5=8b-20$$

$$\rightarrow 20-5=8b-3b\rightarrow 15=5b\rightarrow \boxed{b=3}$$

$$\rightarrow a+\log_2^1=7\rightarrow \boxed{a=7}\rightarrow f(7)=7+\log_2^{(21-5)}=7+\log_2^{2^4}=7+4=11$$

۱۸ - گزینه ۴

می‌دانیم $\log_k^{ab}=\log_k^a+\log_k^b$ و $\log_k^a=\dfrac{1}{\log_a^k}$ است.

$$\log_6^{18}=\log_6^{(3\times 6)}=\log_6^3+\log_6^6=\log_6^3+1=\frac{1}{\log_3^6}+1$$

$$=\frac{1}{\log_3^{3\times 2}}+1=\frac{1}{\log_3^3+\log_3^2}+1=\frac{1}{1+\log_3^2}+1=\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+1$$

$$=\frac{1}{\frac{a+1}{a}}+1=\frac{a}{a+1}+1=\frac{2a+1}{a+1}$$

۱۹ - گزینه ۲ دامنهٔ تابع $f$ به‌صورت $D_f=(-2,+\infty)$ می‌باشد پس ریشهٔ عبارت $ax+b$ برابر $-2$ می‌باشد:

$$a(-2)+b=0\rightarrow b=2a\quad(1)$$

باتوجه به شکل $f(-\frac{3}{2})=0\rightarrow \log_4(-\frac{3}{2}a+b)=0\rightarrow -\frac{3}{2}a+b=1\quad(2)$

$$\xrightarrow{(2),(1)}\begin{cases}b=2a\\ -\frac{3}{2}a+b=1\end{cases}\rightarrow -\frac{3}{2}a+2a=1\rightarrow \frac{a}{2}=1\rightarrow \boxed{a=2}\rightarrow \boxed{b=4}$$

$$\rightarrow f(x)=\log_4(2x+4)\rightarrow f(14)=\log_4^{32}=\log_{2^2}^{2^5}=\frac{5}{2}\log_2^2=\frac{5}{2}$$

۲۰ - گزینه ۲

$$\log_b^a\times\log_3^b=5\longrightarrow \frac{\log^a}{\log^b}\times\frac{\log^b}{\log^3}=5\longrightarrow \frac{\log^a}{\log^3}=5$$

$$\longrightarrow \log_3^a=5\longrightarrow a=3^5\longrightarrow \boxed{a=243}$$

۲۱ - گزینه ۴ می‌دانیم $\log_k^{\frac{a}{b}}=\log_k^a-\log_k^b$ و $\log_k^{a^n}=n\log_k^a$ است.

$$\begin{cases}\log x=2\log y-\log 3\\ 9^{y-x}\times 3^{x-3}=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\log x=\log y^2-\log 3\\ 3^{2(y-x)}\times 3^{x-3}=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\log x=\log(\frac{y^2}{3})\\ 3^{2y-x-3}=3^0\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}x=\frac{y^2}{3}\quad(1)\\ 2y-x-3=0\end{cases}\rightarrow 2y-\frac{y^2}{3}-3=0\rightarrow 6y-y^2-9=0$$

$$\rightarrow y^2-6y+9=0\rightarrow (y-3)^2=0\rightarrow y=3\xrightarrow{(1)} x=3$$

$$\rightarrow x+y=6$$

۲۲ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a \quad , \quad \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

$$\log_{x^2}^{x^4+8x^2+16}=1+\log_{\sqrt{x}}^{\sqrt{5}}\to \log_{x^2}^{(x^2+4)^2}=1+\log_{x^{\frac{1}{2}}}^{5^{\frac{1}{2}}}$$

$$\to \log_x^{x^2+4}=\log_x^x+\log_x^5\to \log_x^{x^2+4}=\log_x^{5x}\to x^2+4=5x$$

$$\to x^2-5x+4=0\to (x-1)(x-4)=0\to \begin{cases} x=1 & \text{غ ق ق (مبنا را یک می‌کند)}\\ x=4 & \text{ق ق}\end{cases}$$

۲۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$[\log 8]+[2\log 8]+[3\log 8]=[\log 8]+[\log 64]+[\log 512]$$

داریم : $1<8<10\to \log 1<\log 8<\log 10\to 0<\log 8<1\to [\log 8]=0$

$$10<64<100\to \log 10<\log 64<\log 10^2\to 1<\log 64<2\to [\log 64]=1$$

$$100<512<1000\to \log 10^2<\log 512<\log 10^3\to 2<\log 512<3\to [\log 512]=2$$

بنابراین : $[\log 8]+[\log 64]+[\log 512]=0+1+2=3$

۲۴ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a=\frac{1}{\log_a^k} \quad , \quad \log_k^{a^n}=n\log_k^a \quad , \quad \log_b^N=x\to b^x=N}$

$$\log_4^x+2\log_x^8=4\Rightarrow \log_{2^2}^x+2\log_x^{2^3}=4\Rightarrow \frac{1}{2}\log_2^x+6\log_x^2=4$$

$$\to \frac{1}{2}\log_2^x+\frac{6}{\log_2^x}=4\xrightarrow{t=\log_2^x}\frac{1}{2}t+\frac{6}{t}-4=0$$

$$\xrightarrow{\times 2t} t^2+12-8t=0\Rightarrow (t-6)(t-2)=0\Rightarrow \begin{cases} t=2\Rightarrow \log_2^x=2\Rightarrow x=2^2=4\Rightarrow \alpha=4\\ t=6\Rightarrow \log_2^x=6\Rightarrow x=2^6=64\Rightarrow \beta=64\end{cases}$$

بنابراین $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2+8=10$ است.

۲۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a \quad , \quad \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

$$\log(2^x+8)=\log 2+\log 2^x\to \log(2^x+8)=\log 2\times 2^x\to \log(2^x+8)=\log 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow 2^{x+1}=2^x+8\Rightarrow 2^{x+1}-2^x=8\Rightarrow 2^x(2^1-1)=8$$

$$\Rightarrow 2^x=8=2^3\Rightarrow x=3\Rightarrow \frac{\log_x^3+3}{\log_3^x+1}\overset{x=3}{=\!=}\frac{1+3}{1+1}=2$$

۲۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a \quad , \quad \log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}} \quad , \quad \log_b^N=x\to N=b^x}$

ابتدا باتوجه به ویژگی‌های لگاریتم، عبارت داده شده را ساده تر می کنیم.

$$\log_2^{4x^2+8x+4}=\log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2x+8}}+3\to \log_2^{4x^2+8x+4}=\log_{2^{\frac{1}{2}}}^{(2x+8)^{\frac{1}{2}}}+3$$

$$\log_2^{4x^2+8x+4}=\log_2^{2x+8}+3\to \log_2^{4x^2+8x+4}-\log_2^{2x+8}=3$$

$$\to \log_2^{\frac{4x^2+8x+4}{2x+8}}=3\xrightarrow{\text{تعریف}}\frac{4x^2+8x+4}{2x+8}=2^3=8$$

$$\Rightarrow 4x^2+8x+4=16x+64\Rightarrow x^2-2x-15=0\to (x-5)(x+3)=0\to x=5,-3$$

هر دو جواب ها قابل قبولند پس مجموع مربعات جوابها، برابر $25+9=34$ است.

۲۷ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{2\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}^{\sqrt[6]{8\sqrt{32}}}=\log_{2\sqrt[3]{2^2\times 2^{\frac{1}{2}}}}^{\sqrt[6]{2^3\sqrt{2^5}}}=\log_{2\sqrt[3]{2^{\frac{5}{2}}}}^{\sqrt[6]{2^3\times 2^{\frac{5}{2}}}}=\log_{2\times 2^{\frac{5}{6}}}^{\sqrt[6]{2^{\frac{11}{2}}}}=\log_{2^{\frac{11}{6}}}^{(2^{\frac{11}{2}})^{\frac{1}{6}}}=\log_{2^{\frac{11}{6}}}^{2^{\frac{11}{12}}}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{11}{6}}=\frac{1}{2}$$

**۲۸ – گزینه ۲** می دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log(3x+1)+2\log\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log(x^2-2x+1)+\log(x+2)$$
$$\rightarrow\log(3x+1)+\log\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\frac{1}{2}\log(x-1)^2+\log(x+2)$$
$$\rightarrow\log(3x+1)+\log(x-2)=\log(x-1)+\log(x+2)$$
$$\rightarrow\log(3x+1)(x-2)=\log(x-1)(x+2)\rightarrow 3x^2-6x+x-2=x^2+2x-x-2$$
$$\rightarrow 2x^2-6x=0\rightarrow 2x(x-3)=0\rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غ ق ق (در دامنه ی تعریف قرار ندارد)}\\ x=3 & \text{ق ق}\end{cases}$$
$$\log_5^{4\alpha+13}\overset{\alpha=3}{=\!=\!=}\log_5^{25}=\log_5^{5^2}=2$$

**۲۹ – گزینه ۴** می دانیم: $\boxed{\log_b^a=k\rightarrow a=b^k\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

چون $x=1$ جواب معادله است بنابراین در معادله صدق می کند.

$$x=1\xrightarrow{\text{صدق}}\log_2^{1+a}=\log_2^2+2\rightarrow\log_2^{1+a}=1+2\rightarrow\log_2^{1+a}=3$$
$$\xrightarrow{\text{تعریف}}1+a=2^3\rightarrow a=7$$

اکنون $a=7$ را در معادله قرار داده و آن را حل می‌کنیم.

$$\log_2^{x+7}=\log_2^{\frac{2}{x}}+2\rightarrow\log_2^{x+7}=\log_2^{\frac{2}{x}}+\log_2^4\rightarrow\log_2^{x+7}=\log_2^{\frac{8}{x}}$$
$$\rightarrow x+7=\frac{8}{x}\rightarrow x^2+7x=8\rightarrow x^2+7x-8=0$$
$$\rightarrow(x+8)(x-1)=0\rightarrow\begin{cases}x=-8 & \text{غ ق ق(در دامنه‌ی تعریف لگاریتم قرار ندارد)}\\ x=1\end{cases}$$

بنابراین معادله جواب دیگری ندارد.

**۳۰ – گزینه ۳** می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab},\log_{k^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_k^a}$

$$\log_{x-1}^{x^2-2x+5}=1+\log_{x-1}^5\rightarrow\log_{x-1}^{x^2-2x+5}=\log_{x-1}^{x-1}+\log_{x-1}^5$$
$$\rightarrow\log_{x-1}^{x^2-2x+5}=\log_{x-1}^{5x-5}\rightarrow x^2-2x+5=5x-5$$
$$\rightarrow x^2-7x+10=0\rightarrow(x-5)(x-2)=0\rightarrow\begin{cases}x=2 & \text{غق‌ق(در دامنه‌ی تعریف لگاریتم قرار ندارد)}\\ x=5\end{cases}$$
$$\log_{125}^{x+20}\overset{x=5}{=\!=\!=}\log_{125}^{25}=\log_{5^3}^{5^2}=\frac{2}{3}$$

**۳۱ – گزینه ۴** می دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a\ ,\ a^{\log_b^x}=x^{\log_b^a}}$

حاصل هر لگاریتم را جداگانه بدست آورده و سپس آنها را با هم جمع می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\log_{0.2}^{625}=\log_{\frac{2}{10}}^{5^4}=\log_{\frac{1}{5}}^{5^4}=\log_{5^{-1}}^{5^4}=-4\\[2ex] 9^{\log_3^{\sqrt{5}}}=\sqrt{5}^{\log_3^9}=\sqrt{5}^{\log_3^{3^2}}=\left(\sqrt{5}\right)^2=5\end{array}\right\}\rightarrow -4+5=1$$

**۳۲ – گزینه ۴** می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}}$

$$\log(x^2+x-20)-\log(x-4)=\log(2x-47)\rightarrow\log\frac{x^2+x-20}{x-4}=\log(2x-47)$$
$$\rightarrow\frac{(x+5)(x-4)}{x-4}=2x-47\rightarrow x+5=2x-47\rightarrow x=52$$

**۳۳ – گزینه ۳**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log 5=1-\log 2}$

$$A=\frac{1}{2}\log(7+2\sqrt{6})+\log(\sqrt{6}-1)=\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{6}+1\right)^2+\log(\sqrt{6}-1)$$
$$=\log(\sqrt{6}+1)+\log(\sqrt{6}-1)=\log\underbrace{\left(\sqrt{6}+1\right)(\sqrt{6}-1)}_{\text{مزدوج}}=\log(6-1)=\log 5=1-\log 2=1-k$$

دقت کنید: $(\sqrt{6}+1)^2=6+1+2\sqrt{6}=7+2\sqrt{6}$

۳۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_{b}^{N} = x \rightarrow N = b^{x}}$

$$\log_{۲}^{x^{۳}+۵} = ۵ \xrightarrow{\text{تعریف}} x^{۳}+۵ = ۲^{۵} \rightarrow x^{۳}+۵ = ۳۲ \rightarrow x^{۳} = ۲۷ \rightarrow x = ۳$$

$$\log_{۵}^{x^{۲}-۴} \overset{x=۳}{=\!=\!=} \log_{۵}^{۵} = ۱$$

۳۵ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\log_{k}^{a} - \log_{k}^{b} = \log_{k}^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_{b}^{N} = x \rightarrow N = b^{x}}$

کافی است دو تابع را تلاقی دهیم.

$$۱ + \log(x+۱) = \log(x^{۲}-۱) \rightarrow \log(x^{۲}-۱) - \log(x+۱) = ۱$$

$$\rightarrow \log\frac{x^{۲}-۱}{x+۱} = ۱ \rightarrow \log\frac{(x+۱)(x-۱)}{(x+۱)} = ۱ \rightarrow \log(x-۱) = ۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} x-۱ = ۱۰ \rightarrow x = ۱۱$$

بنابراین دو تابع در یک نقطه، همدیگر را قطع می‌کنند. (توجه کنید که $x = ۱۱$ چون در دامنه‌ی هر دو تابع قرار دارد، قابل قبول می‌باشد.)

۳۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^{m}}^{a^{n}} = \frac{n}{m}\log_{k}^{a} \ , \ \log_{k}^{a} - \log_{k}^{b} = \log_{k}^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_{b}^{N} = x \rightarrow N = b^{x}}$

$$\log_{۴}^{x+۱} = \log_{۳}^{\sqrt{۳}} + \log_{۲}^{\sqrt{x-۱}} \rightarrow \log_{۲^{۲}}^{x+۱} = \log_{۳}^{۳^{\frac{۱}{۲}}} + \log_{۲}^{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{x+۱} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{x-۱} \xrightarrow{\times ۲} \log_{۲}^{x+۱} = ۱ + \log_{۲}^{x-۱}$$

$$\rightarrow \log_{۲}^{x+۱} - \log_{۲}^{x-۱} = ۱ \rightarrow \log_{۲}^{\frac{x+۱}{x-۱}} = ۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{x+۱}{x-۱} = ۲ \rightarrow ۲x-۲ = x+۱ \rightarrow x = ۳$$

$$\log_{۴}^{۳x-۱} \overset{x=۳}{=\!=\!=} \log_{۴}^{۸} = \log_{۲^{۲}}^{۲^{۳}} = \frac{۳}{۲} = ۱٫۵$$

۳۷ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^{m}}^{a^{n}} = \frac{n}{m}\log_{k}^{a} \ , \ \log_{k}^{a} + \log_{k}^{b} = \log_{k}^{ab}}$

$$\log_{۲}^{(۳x-۱)^{۳}} + \log_{\sqrt[۳]{۲}}^{(x-۵)} = ۳\log_{۴}^{۲۵} \rightarrow ۳\log_{۲}^{۳x-۱} + \log_{۲^{\frac{۱}{۳}}}^{x-۵} = ۳\log_{۲^{۲}}^{۵^{۲}}$$

$$\rightarrow ۳\log_{۲}^{۳x-۱} + ۳\log_{۲}^{x-۵} = ۳\log_{۲}^{۵} \rightarrow \log_{۲}^{۳x-۱} + \log_{۲}^{x-۵} = \log_{۲}^{۵}$$

$$\rightarrow \log_{۲}^{(۳x-۱)(x-۵)} = \log_{۲}^{۵} \rightarrow ۳x^{۲} - ۱۵x - x + ۵ = ۵ \rightarrow ۳x^{۲} - ۱۶x = ۰$$

$$\rightarrow x(۳x-۱۶) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۱۶}{۳} \end{cases}$$

دقت کنید $x = ۰$ غیر قابل قبول است زیرا جلوی لگاریتم را منفی می‌کند بنابراین معادله یک ریشه دارد.

۳۸ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^{m}}^{a^{n}} = \frac{n}{m}\log_{k}^{a} \ , \ \log_{k}^{a} + \log_{k}^{b} = \log_{k}^{ab} \ , \ \log_{k}^{a} = \frac{۱}{\log_{a}^{k}}}$

$$\log_{۱۶}^{۶} = a \rightarrow \log_{۲^{۴}}^{۶} = a \rightarrow \frac{۱}{۴}\log_{۲}^{۶} = a \rightarrow \log_{۲}^{\overbrace{۶}^{۲\times ۳}} = ۴a \rightarrow \log_{۲}^{۲} + \log_{۲}^{۳} = ۴a$$

$$\rightarrow ۱ + \log_{۲}^{۳} = ۴a \rightarrow \log_{۲}^{۳} = ۴a - ۱$$

$$\log_{۱۲}^{۶۴} = \log_{۱۲}^{۲^{۶}} = ۶\log_{۱۲}^{۲} = \frac{۶}{\log_{۲}^{۱۲}} = \frac{۶}{\log_{۲}^{۴} + \log_{۲}^{۳}} = \frac{۶}{\log_{۲}^{۲^{۲}} + \log_{۲}^{۳}} = \frac{۶}{۲ + ۴a - ۱} = \frac{۶}{۴a+۱}$$

۳۹ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_{b} N = x \xrightarrow{\text{تعریف}} b^{x} = N \ , \ \log_{k^{m}} a^{n} = \frac{n}{m}\log_{k} a}$

$$\log_{۲} x = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} x = ۲^{۲} \ , \log_{\sqrt{۲}} y = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{تعریف}} y = (\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۲}} = (۲^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{\frac{۱}{۴}}$$

$$\log_{xy} ۲\sqrt{۲} = \log_{۲^{۲}\times ۲^{\frac{۱}{۴}}} ۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \log_{۲^{\frac{۹}{۴}}} ۲^{\frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۹}{۴}} = \frac{۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳}$$

۴۰ - گزینه ۲ روش اول:

$$۵^{b} = B \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} \log_{۵}^{B} = b$$

$$\log_{625}^{\sqrt{125}B^3} = \log_{625}^{\sqrt{125}} + \log_{625}^{B^3} = \log_{5^4}^{5^{\frac{3}{2}}} + \log_{5^4}^{B^3} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{1}} + \frac{3}{4}\log_5^B = \frac{3}{8} + \frac{3}{4}b = \frac{3+6b}{8}$$

روش دوم: اگر $b = 0$ باشد آن گاه $B = 1$ است.

$$\log_{625}^{\sqrt{125}B^3} \overset{B=1}{=\!=\!=} \log_{625}^{\sqrt{125}} = \log_{5^4}^{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{8}$$

فقط گزینه‌ی دوم است که اگر $b = 0$ باشد جواب برابر $\frac{3}{8}$ می‌شود.

۴۱ ـ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$2^{x-1} + 2^{x+2} = \frac{9}{8} \to 2^x \times 2^{-1} + 2^x \times 2^2 = \frac{9}{8} \to 2^x(2^{-1} + 2^2) = \frac{9}{8}$$

$$\to 2^x(\frac{1}{2} + 4) = \frac{9}{8} \to 2^x(\frac{9}{2}) = \frac{9}{8} \to 2^x = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 2^{-2} \to x = -2$$

$$\log_3^{|x^3-1|} = \log_3^{|-8-1|} = \log_3^{|-9|} = \log_3^9 = \log_3^{3^2} = 2$$

۴۲ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log 5 = 1 - \log 2 \ , \ \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$

$$\begin{vmatrix} \log x & \log 2 \\ \log 2 & \log x \end{vmatrix} = (\log x)^2 - (\log 2)^2 = \log\frac{5}{2}$$

$$\to (\log x)^2 = (\log 2)^2 + \log 5 - \log 2 \Rightarrow (\log x)^2 = (\log 2)^2 + 1 - \log 2 - \log 2 \Rightarrow (\log x)^2 = (\log 2)^2 - 2\log 2 + 1$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = (1 - \log 2)^2 \xrightarrow{a^2=b^2 \to a=\pm b} \begin{cases} \log x = 1 - \log 2 = \log 5 \Rightarrow x = 5 \\ \log x = \log 2 - 1 = -\log 5 = \log 5^{-1} = \log\frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$x = 5$ و $x = \frac{1}{5}$ هر دو قابل قبول هستند، اما فقط $x = 5$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۴۳ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log 5 = 1 - \log 2}$

$$\log 125 = 9k \Rightarrow \log 5^3 = 9k \Rightarrow 3\log 5 = 9k \Rightarrow \log 5 = 3k \Rightarrow 1 - \log 2 = 3k \Rightarrow \log 2 = 1 - 3k$$

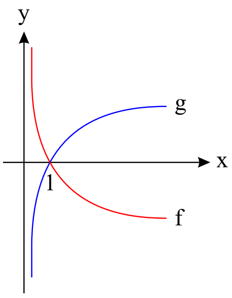
$$\log\sqrt[3]{0/32} = \log(\frac{32}{100})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log\frac{32}{100} = \frac{1}{3}(\log 32 - \log 100) = \frac{1}{3}(\log 2^5 - \log 10^2)$$

$$= \frac{1}{3}(5\log 2 - 2) = \frac{1}{3}(5(1 - 3k) - 2) = \frac{1}{3}(3 - 15k) = 1 - 5k$$

۴۴ ـ گزینه ۲

$$f(x) = -\frac{1}{2}\log x \quad x > 0 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{1}{2}\log x \quad x > 0$$

اولاً دامنه‌ی مشترک آن‌ها $(0 \ , \ +\infty)$ است. ثانیاً $f = -g$ پس نسبت به محور $x$ها قرینه‌ی هم‌اند.




۴۵ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log(x-3) + \log(x-1) = 2\log 2 \Rightarrow \log(x-3)(x-1) = \log 4 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{حل به روش } \Delta} \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} & \text{ق ق} \\ x = 2 - \sqrt{5} & \text{غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می‌کند)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_5^{(x-2)} = \log_5^{\sqrt{5}} = \log_5^{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

**۴۶ - گزینه ۱**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \;,\; \log_k^{a^n} = n\log_k^a \;,\; \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$\log_3^x + \log_3^y = 2 \Rightarrow \log_3^{xy} = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} xy = 3^2 = 9$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow (x+y)^2 = 46 + 18 = 64 \Rightarrow x + y = 8$$

$$\log_8^{\sqrt{x+y}} = \log_8^{\sqrt{8}} = \log_8^{8^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

**۴۷ - گزینه ۲**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \;,\; \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{\sqrt{2}}^4 - \log_2^x = \log_{2^{\frac{1}{2}}}^4 - \log_2^x = 2\log_2^4 - \log_2^x \Rightarrow \log_2^{16} - \log_2^x = \log_2^{\frac{16}{x}}$$

$$A = 2^{(\log_{\sqrt{2}}^4 - \log_2^x)} = 1 \Rightarrow 2^{\log_2^{\frac{16}{x}}} = 1 = 2^0 \xrightarrow{\log 1 = 0} \frac{16}{x} = 1 \Rightarrow x = 16$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\sqrt[3]{x}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\sqrt[3]{16}} = \log_{2^{-1}}^{\sqrt[3]{2^4}} = \log_{2^{-1}}^{2^{\frac{4}{3}}} = -\frac{4}{3}\log_2^2 = -\frac{4}{3}(1) = -\frac{4}{3}$$

**۴۸ - گزینه ۳**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^k} \;,\; \log_k^{a^n} = n\log_k^a \;,\; \log 5 = 1 - \log 2 \;,\; \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$\log_{54}^{\sqrt{125}} = \frac{\log\sqrt{125}}{\log 54} = \frac{\log\sqrt{5^3}}{\log(27 \times 2)} = \frac{\log 5^{\frac{3}{2}}}{\log 27 + \log 2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log 5}{3\log 3 + \log 2} = \frac{\frac{3}{2}(1 - \log 2)}{3\log 3 + \log 2} = \frac{\frac{3}{2}(1 - m)}{3n + m} = \frac{3 - 3m}{6n + 2m}$$

**۴۹ - گزینه ۴**

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \;,\; \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$\log_{x-1}^{3x-1} = 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} (x-1)^3 = 3x - 1 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3x - 1$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می کند)} \\ x = 3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{(2x+3)} = \log_{\frac{1}{3}}^9 = \log_{3^{-1}}^{3^2} = -2 \end{cases}$$

**۵۰ - گزینه ۴** می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

عدد مورد نظر را $a$ در نظر می‌گیریم، طبق فرض داریم:

$$\log_4^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \log_{2^2}^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \log_2^a = \frac{15}{2}$$

$$\log_8^{\frac{1}{a^2}} = \log_{2^3}^{a^{-2}} = \frac{-2}{3}\log_2^a = -\frac{2}{3}\left(\frac{15}{2}\right) = -5$$

**۵۱ - گزینه ۲** می‌دانیم: $\boxed{\log_b^N = x \to N = b^x}$

برای پیدا کردن مقدار $x_0$، معادله‌ی $y = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow 2 - \log_{10}^{(x_0 + 10)} = 0 \Rightarrow \log_{10}^{(x_0 + 10)} = 2 \Rightarrow x_0 + 10 = 10^2 \Rightarrow x_0 = 90$$

برای پیدا کردن مقدار $y_0$، مقدار $x = 0$ را در معادله‌ی تابع قرار می‌دهیم:

$x = ۰ \;\Rightarrow\; y_{۰} = ۲ - \log_{۱۰}^{(۰+۱۰)} = ۲ - ۱ = ۱$

پس: $x_{۰} + y_{۰} = ۹۰ + ۱ = ۹۱$

**۵۲ - گزینه ۲** می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \;,\; \log_k^a = \dfrac{۱}{\log_a^k} \;,\; \log_{k^m}^{a^n} = \dfrac{n}{m}\log_k^a \;,\; \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$\log_{۵}^{۲۵x^{۲}} + \log_x^{۲۵} = ۷$$

$$\Rightarrow \log_{۵}^{۵^{۲}} + \log_{۵}^{x^{۲}} + \log_x^{۵^{۲}} = ۷ \;\Rightarrow\; ۲ + ۲\log_{۵}^x + ۲\log_x^{۵} = ۷$$

$$\Rightarrow\; ۲(\log_{۵}^x + \log_x^{۵}) = ۵ \xrightarrow{\log_{۵}^x = t} ۲(t + \frac{۱}{t}) = ۵$$

$$\xrightarrow{\times t} ۲t^{۲} + ۲ = ۵t \;\Rightarrow\; ۲t^{۲} - ۵t + ۲ = ۰ \;\Rightarrow\; \Delta = ۲۵ - ۱۶ = ۹$$

$$\Rightarrow\; t = \frac{۵ \pm ۳}{۲ \times ۲} \;\Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \;\Rightarrow\; \log_{۵}^x = ۲ \;\Rightarrow\; x = ۵^{۲} = ۲۵ \\ t = \frac{۱}{۲} \;\Rightarrow\; \log_{۵}^x = \frac{۱}{۲} \;\Rightarrow\; x = ۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵} \end{cases}$$

$$x = \sqrt{۵} \;\Rightarrow\; x^{۲} + ۳ = ۵ + ۳ = ۸ \;\Rightarrow\; \log_{۱۶}^{(x^{۲}+۳)} = \log_{۱۶}^{۸} = \log_{۲^{۴}}^{۲^{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

جواب متناظر با، $x = ۲۵$ در بین گزینه‌ها نیست.

**۵۳ - گزینه ۲**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\sqrt[۵]{A^{۲} - B^{۲}} = \sqrt[۵]{(\sqrt{۲} - ۱)^{۲} - (\sqrt{۲} + ۱)^{۲}} = \sqrt[۵]{(۲ + ۱ - ۲\sqrt{۲}) - (۲ + ۱ + ۲\sqrt{۲})}$$

$$= \sqrt[۵]{-۴\sqrt{۲}} = -\sqrt[۵]{۲^{۲} \times ۲^{\frac{۱}{۲}}} = -\sqrt[۵]{۲^{\frac{۵}{۲}}} = -(۲^{\frac{۵}{۲}})^{\frac{۱}{۵}} = -۲^{\frac{۱}{۲}} = -\sqrt{۲}$$

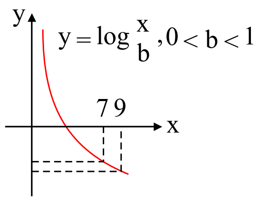
$$\log_{۲}(-\sqrt[۵]{A^{۲} - B^{۲}}) = \log_{۲}^{\sqrt{۲}} = \log_{۲}^{۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{۲}$$

**۵۴ - گزینه ۱** جلوی لگاریتم باید مثبت باشد.

$$\frac{۱ - x}{۱ + x} > ۰ \to \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۱ & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} > ۰ & & - & \text{ن} & + & ۰ & - & \end{array} \to -۱ < x < ۱ \to x \in (-۱\,,\,۱)$$

**۵۵ - گزینه ۲**

نمودار تابع $y = \log_b^x$ را با شرط $۰ < b < ۱$ رسم می کنیم که یک تابع نزولی است ( واضح است هرچه $x$ افزایش می‌یابد $y$ کاهش می یابد)




**۵۶ - گزینه ۳**

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \dfrac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{۹}^{۳\sqrt[۴]{۲۷}} = \log_{۳^{۲}}^{۳\times ۲۷^{\frac{۱}{۴}}} = \log_{۳^{۲}}^{۳\times (۳^{۳})^{\frac{۱}{۴}}} = \log_{۳^{۲}}^{۳^{۱}\times ۳^{\frac{۳}{۴}}} = \log_{۳^{۲}}^{۳^{\frac{۷}{۴}}} = \frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{۷}{۸}$$

**۵۷ - گزینه ۲**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \;,\; \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log(۳x + ۱) + ۲\log\sqrt{x - ۲} = \frac{۱}{۲}\log(x^{۲} - ۲x + ۱) + \log(x + ۲) \to \log(۳x + ۱) + ۲\log(x - ۲)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log(x - ۱)^{۲} + \log(x + ۲)$$

$$\to \log(۳x + ۱) + \log(x - ۲) = \log(x - ۱) + \log(x + ۲) \to \log(۳x + ۱)(x - ۲) = \log(x - ۱)(x + ۲) \to (۳x + ۱)(x - ۲) = (x - ۱)(x + ۲)$$

$$\to ۳x^{۲} - ۶x + x - ۲ = x^{۲} + ۲x - x - ۲ \to ۲x^{۲} - ۶x = ۰ \to ۲x(x - ۳) = ۰ \to \begin{cases} x = ۰ \text{ غ ق ق (زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را منفی می‌کند)} \\ x = ۳ \text{ ق ق} \end{cases}$$

**۵۸ - گزینه ۱**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \;,\; \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \;,\; \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$۲\log x - \log(x + ۲) = ۱ \;\to\; \log x^{۲} - \log(x + ۲) = ۱$$



$$\to \log\frac{x^{۲}}{x+۲}=۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{x^{۲}}{x+۲}=۱۰ \to x^{۲}-۱۰x-۲۰=۰$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۱۰۰+۸۰=۱۸۰ \begin{cases} x=\dfrac{۱۰+۶\sqrt{۵}}{۲}=۵+۳\sqrt{۵} \\ x=\dfrac{۱۰-۶\sqrt{۵}}{۲}=۵-۳\sqrt{۵} \quad \text{غ ق ق} \quad \text{(جلوی لگاریتم را منفی می‌کند)} \end{cases}$$

**۵۹ ـ گزینه ۱**

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

$$\log(x-۲)+\log(x+۱)=\log x+\log(x-۷)$$
$$\Rightarrow \log(x-۲)(x+۱)=\log x(x-۷) \Rightarrow (x-۲)(x+۱)=x(x-۷)$$
$$\Rightarrow x^{۲}-x-۲=x^{۲}-۷x \Rightarrow ۶x=۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

جواب $x=\frac{۱}{۳}$ غیر قابل قبول است چون جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

**۶۰ ـ گزینه ۲** $x=۳$ زیر رادیکال در تابع $f(x)$ را منفی می‌کند، پس عضو $D_f$ نیست.

$x=-۲$ جلوی لگاریتم در تابع $g(x)$ را صفر می‌کند، پس عضو $D_g$ نیست.

$x=-۱$ حاصل $g(x)$ را صفر می‌کند، پس در دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ قرار نمی‌گیرد.

بنابراین بین گزینه‌ها فقط $x=۱$ مناسب است.

تذکر: دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ در این تست به‌صورت $(-۲,۲]-\{-۱\}$ است. زیرا

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=x\le ۲\cap x>-۲-\{x=-۱\}=(-۲\,,\,۲\,]-\{-۱\}$$

# پاسخنامه کلیدی

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ - ۴ | ۱۰ - ۲ | ۱۹ - ۲ | ۲۸ - ۲ | ۳۷ - ۲ | ۴۶ - ۱ | ۵۵ - ۲ |
| ۲ - ۱ | ۱۱ - ۱ | ۲۰ - ۲ | ۲۹ - ۴ | ۳۸ - ۱ | ۴۷ - ۲ | ۵۶ - ۳ |
| ۳ - ۱ | ۱۲ - ۳ | ۲۱ - ۴ | ۳۰ - ۳ | ۳۹ - ۲ | ۴۸ - ۳ | ۵۷ - ۲ |
| ۴ - ۳ | ۱۳ - ۴ | ۲۲ - ۴ | ۳۱ - ۴ | ۴۰ - ۲ | ۴۹ - ۴ | ۵۸ - ۱ |
| ۵ - ۱ | ۱۴ - ۱ | ۲۳ - ۳ | ۳۲ - ۴ | ۴۱ - ۴ | ۵۰ - ۴ | ۵۹ - ۱ |
| ۶ - ۳ | ۱۵ - ۳ | ۲۴ - ۲ | ۳۳ - ۳ | ۴۲ - ۳ | ۵۱ - ۲ | ۶۰ - ۲ |
| ۷ - ۲ | ۱۶ - ۲ | ۲۵ - ۴ | ۳۴ - ۱ | ۴۳ - ۱ | ۵۲ - ۲ | |
| ۸ - ۲ | ۱۷ - ۴ | ۲۶ - ۲ | ۳۵ - ۲ | ۴۴ - ۲ | ۵۳ - ۲ | |
| ۹ - ۳ | ۱۸ - ۴ | ۲۷ - ۲ | ۳۶ - ۲ | ۴۵ - ۲ | ۵۴ - ۱ | |