نام آزمون: تابع لگاریتمی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - در بازه‌ی $(a,b)$ نامعادله‌ی $\log_{2}^{x} < \log_{5}^{x}$ برقرار است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۲ - اگر $\log_{x}^{(3x-1)} + \log_{x}^{(x+1)} = 2$ باشد، حاصل $\log_{2}^{(x^{2}+x+\frac{7}{2})}$ کدام است؟

۳ - عدد $\log_{0.5} 1.5$ در کدام بازهٔ قرار دارد؟

۴ - اگر $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ و $\log_{16}^{2x} + \log_{4}^{y} = 1$ ، مقدار $y$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

۵ - از دو معادلهٔ دومجهولی $2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2\log 3 + \log x$، مقدار $y$ کدام است؟

۶ - از دستگاه معادلات $\begin{cases}\log(x^2+4y^2)=2\log\sqrt{2}+\log 23\\ \log x+\log y=2\log 3-\log 2\end{cases}$، حاصل لگاریتم $x+2y$ در مبنای ۱۶ کدام است؟

۷ - دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\log_2^{ax+b}$ بازه‌ی $(\frac{1}{3},+\infty)$ است. اگر $f(1)=2$ ، آن‌گاه مقدار $f(3)$ کدام است؟

۸ - جدول زیر مربوط به یک تابع نمایی است. مقدار تابع به‌ازای $x=\frac{3}{2}$ کدام است؟

| $x$ | ۳ | ۶ | ۹ |
|---|---|---|---|
| $y$ | ۹ | ۸۱ | ۷۲۹ |

۹ - نمودار تابع $y=-\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{4^{-x}}$ کدام است؟

۱۰ - اگر $f(x)=3-2\log_4(\dfrac{2}{x-10})$ باشد، آنگاه $f(42)-f(14)$ کدام است؟

۱۱ - اگر $\log_x^{(x+2)} - \log_x^{(4-x)} = 1$ باشد، حاصل $\log_5^{(x+3)}$ کدام است؟

۱۲ - اگر $\log_6^2 = a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_3^{18}$ کدام است؟

۱۳ - اگر نمودار تابع $f\left(x\right) = \log_a^x$ از نقطهٔ $\left(4,2\right)$ بگذرد، حاصل $4^{\log_{a+2}^{(a+1)}}$ کدام است؟

۱۴ - اگر $x = \sqrt{85}$ باشد، مقدار $A = \left[\log_2^{[x]}\right]$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱۵ - اگر $\left(x-1\right)^{\sqrt{2}} = 2$ باشد، حاصل $\log_8^{\sqrt{x-1}}$ کدام است؟ $\left(x > 1\right)$

۱۶ -- هم زمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای جوّ کاهش می‌یابد. اگر بین فشار هوا برحسب پاسکال $\left(P\right)$ و ارتفاع برحسب متر $\left(h\right)$ رابطهٔ $h = 15500\left(5 - \log_{10} P\right)$ برقرار باشد، فشار هوا در ارتفاع ۱۵۵۰۰ متری از سطح زمین چند پاسکال است؟

۱۷ - کدام‌یک از نامساوی‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

۱۸ - نمودار تابع $y = \log_a (x - ۲)$ از نقطهٔ $(\frac{۱۷}{۴}, -۲)$ عبور می‌کند، مقدار $a$ کدام است؟

۱۹ - اگر $\log ۳ = b$ و $\log ۲ = a$، حاصل $\log \frac{\sqrt{۷۵}}{۷۲}$ برحسب $a$ و $b$ کدام است؟

۲۰ - مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\log_۲ x + ۳\log_x ۲ = \log_۳ ۸۱$ کدام است؟

۲۱ - مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\left(۲^x - ۳^{\log_۳ ۵}\right)\left(۴^x - ۵^{\log_۵ ۳}\right) = ۰$ کدام است؟

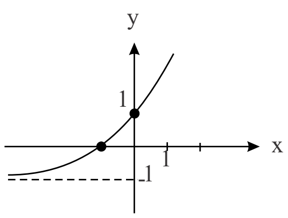
۲۲ - نمودار تابع $f(x) = -log_۲(x - ۱)$ به کدام شکل است؟

۲۳ - اگر $۲log(\sqrt{۲}m) - log۱ = ۳log۲ + log(m+۱)$ باشد، آن‌گاه مقدار $m$ کدام است؟

۲۴ - اگر $\log_{۱۲}^{۳} = a$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{۲۷}}^{۸}$ کدام است؟

۲۵ - اگر $\log_{۳}^{a^۲} + ۲\log_{\sqrt{۳}}^{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}\log_{\sqrt{۳}}^{(۵+a)}$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای $a$ کدام است؟

۲۶ - نمودار تابع $y = ۲^{x+b} - ۲a$ به صورت مقابل است. در این صورت $a+b$ کدام است؟




۲۷ - عرض نقطهٔ برخورد دو تابع $y = \log_{۵}^{(x+۲)}$ و $y = ۱ - \log_{۵}^{(x-۲)}$ کدام است؟

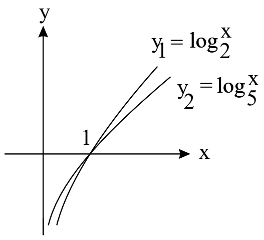
**۲۸ - حاصل عبارت $\sqrt{۲^{۳+\log_{۲} ۶}}$ کدام است؟**

**۲۹ - ریشهٔ معادلهٔ $\log_{۰/۵} \log_{۰/۲}(۲-x) = -۱$ کدام است؟**

**۳۰ - نمودار توابع $f(x) = \log_{۳}(x+۱)$ و $g(x) = x - ۱$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟**

# پاسخنامه تشریحی

۱ – گزینه ۱ از مقایسه‌ی نمودار دو تابع با معادله‌های $y_۱=\log_۲^x$ و $y_۲=\log_۵^x$، معلوم می‌شود که بزرگ‌ترین بازه‌ای که نامعادله‌ی مورد نظر سؤال در آن برقرار است (۰ , ۱) است.




۲ – گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_b^a=c\to a=b^c\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log_x^{۳x-۱}+\log_x^{x+۱}=۲\to\log_x^{(۳x-۱)(x+۱)}=۲\xrightarrow{\text{تعریف}}(۳x-۱)(x+۱)=x^۲$$

$$\to ۳x^۲+۳x-x-۱=x^۲\to ۲x^۲+۲x=۱\to x^۲+x=\frac{۱}{۲}$$

پس: $\log_۲^{x^۲+x+\frac{۷}{۲}}=\log_۲^{\frac{۱}{۲}+\frac{۷}{۲}}=\log_۲^{\frac{۸}{۲}}=\log_۲^۴=\log_۲^{۲^۲}=۲$

۳ – گزینه ۳ برای تعیین محدوده ابتدا عبارت را ساده‌تر می‌نماییم.

$$\log_{۰/۵}^{۱/۵}=\log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}}=\log_{۲^{-۱}}^{\frac{۳}{۲}}=-\log_۲^{\frac{۳}{۲}}$$

حال مشخص می‌نماییم عدد $\frac{۳}{۲}$ بین چه توان‌هایی از ۲ قرار دارد.

$$۲^۰<\frac{۳}{۲}<۲^۱\xrightarrow{\log_۲^{\bigcirc}}۰<\log_۲^{\frac{۳}{۲}}<۱\xrightarrow{\times(-۱)}-۱<-\log_۲^{\frac{۳}{۲}}<۰$$

۴ – گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^n}^a=\frac{۱}{n}\log_k^a\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_b^a=c\to a=b^c}$

$$۳^{x-۱}+۳^{x+۱}=۹۰\to ۳^x\times ۳^{-۱}+۳^x\times ۳=۹۰\to ۳^x(۳^{-۱}+۳)=۹۰\to ۳^x(\frac{۱}{۳}+۳)=۹۰$$

$$\to ۳^x(\frac{۱۰}{۳})=۹۰\to ۳^x=\frac{۹۰}{\frac{۱۰}{۳}}=۲۷=۳^۳\to x=۳$$

$$\log_{۱۶}^{۲x}+\log_۴^y=۱\xrightarrow{x=۳}\log_{۱۶}^۶+\log_۴^y=۱\to\log_{۴^۲}^۶+\log_۴^y=۱\to\frac{۱}{۲}\log_۴^۶+\log_۴^y=۱$$

$$\to\log_۴^{\sqrt{۶}}+\log_۴^y=۱\to\log_۴^{\sqrt{۶}y}=۱\to\sqrt{۶}y=۴\to y=\frac{۴}{\sqrt{۶}}\times\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}}=\frac{۴\sqrt{۶}}{۶}=\frac{۲}{۳}\sqrt{۶}$$

۵ – گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

$$۲^{x-۷}\times ۴^{x+y}=۱\to ۲^{x-۷}\times(۲^۲)^{x+y}=۱\to ۲^{x-۷+۲x+۲y}=۱\to ۲^{۳x+۲y-۷}=۱\to ۳x+۲y-۷=۰$$

$$\log y=۲\log ۳+\log x\to\log y=\log ۹+\log x\to\log y=\log ۹x\to y=۹x$$

پس: $\begin{cases}۳x+۲y=۷\\ y=۹x\end{cases}\to ۳x+۱۸x=۷\to ۲۱x=۷\to x=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=۹(\frac{۱}{۳})=۳$

۶ – گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a\ ,\ \log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}}$

$$\begin{cases}\log(x^۲+۴y^۲)=\overbrace{۲\log\sqrt{۲}}^{\log(\sqrt{۲})^۲}+\log ۲۳\Rightarrow\log(x^۲+۴y^۲)=\log ۴۶\Rightarrow x^۲+۴y^۲=۴۶\\ \log x+\log y=۲\log ۳-\log ۲\Rightarrow\log xy=\log\frac{۹}{۲}\Rightarrow xy=\frac{۹}{۲}\end{cases}$$

$$(x+2y)^2 = x^2+4y^2+4xy = 46+4(\frac{9}{2}) = 64 \Rightarrow x+2y=8$$

بنابراین:

$$\log_{16}^{x+2y} = \log_{16}^{8} = \log_{2^4}^{2^3} = \frac{3}{4} = 0.75$$

۷ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\log_b^a = c \to b^c = a \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع داده شده کافی است جلوی لگاریتم را بزرگتر از صفر قرار دهید.

$$ax+b>0 \to ax>-b \xrightarrow[a\ \text{مثبت است}]{\text{طبق دامنه‌ی تعریف داده شده،}} x>-\frac{b}{a} \xrightarrow{x>\frac{1}{3}} -\frac{b}{a} = \frac{1}{3} \to a=-3b$$

$$f(1)=2 \to \log_2^{a+b}=2 \xrightarrow{\text{تعریف}} a+b=2^2 \to a+b=4 \xrightarrow{a=-3b} -2b=4 \to b=-2 \ , \ \ a=6$$

پس : $f(x)=\log_2^{6x-2} \to f(3)=\log_2^{16}=\log_2^{2^4}=4$

۸ - گزینه ۳ با توجه به بیان مسئله که تابع نمائی داریم، فرم کلی تابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=ka^x$$

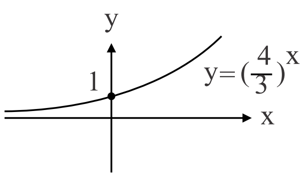
$$\begin{matrix} f(6)=ka^6=81 \\ f(3)=ka^3=9 \end{matrix} \to \frac{f(6)}{f(3)} = a^3 = 9 \to a=\sqrt[3]{9}$$

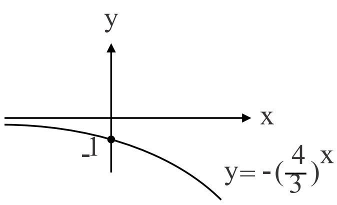
$$f(3)=k(\sqrt[3]{9})^3=9 \to k=1 \to f(x)=(\sqrt[3]{9})^x$$

$$f(\frac{3}{2})=(\sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

۹ - گزینه ۳ قبل از رسم باید ضابطهٔ تابع تا حد امکان ساده شود.

$$y=-\frac{(\frac{1}{3})^x}{4^{-x}} = -((\frac{1}{3})^x \times 4^x) = -(\frac{4}{3})^x$$




۱۰ - گزینه ۱ برای محاسبه کافیست مقادیر مورد نظر را در تابع جایگذاری نماییم:

$$f(x)=3-2\log_4^{(\frac{2}{x-10})}$$

$$f(42)=3-2\log_4^{(\frac{2}{32})} = 3-2\log_4^{4^{-2}} = 3+4=7$$

$$f(14)=3-2\log_4^{(\frac{2}{4})} = 3-2\log_{2^2}^{2^{-1}} = 3-2\times(-\frac{1}{2}) = 3+1=4$$

$$f(42)-f(14)=7-4=3$$

۱۱ - گزینه ۲ با توجه به اینکه مبنای هر دو لگاریتم $x$ می‌باشد، می‌توان معادله را به شکل زیر تغییر داد:

$$\log_x^{x+2}-\log_x^{4-x}=1 \to \log_x^{(\frac{x+2}{4-x})}=1 \to \frac{x+2}{4-x}=x$$

$$\to x+2=(4-x)\,x \to x+2=4x-x^2 \to x^2-3x+2=0$$

$$\to (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{غ ق ق} \\ x=2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله اولیه می‌توان ریشه‌های قابل قبول را مشخص نمود. حال مقدار $x=2$ را در عبارت مورد نظر جایگذاری می‌نماییم:

$$\log_5^{(x+3)} \overset{x=2}{=} \log_5^5 = 1$$

۱۲ - گزینه ۴ ابتدا باید داده اولیه را ساده نماییم:

$$\log_6^2 = a \to \log_2^6 = \frac{1}{a} \to \log_2^2+\log_2^3 = \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow ۱+\log_{۲}^{۳}=\frac{۱}{a}\rightarrow \log_{۲}^{۳}=\frac{۱}{a}-۱=\frac{۱-a}{a}\rightarrow \log_{۳}^{۲}=\frac{a}{۱-a}$$

حال باید خواسته مسئله را به فرم ساده‌تری بنویسیم:

$$\log_{۳}^{۱۸}=\log_{۳}^{۲\times ۳^{۲}}=\log_{۳}^{۲}+\log_{۳}^{۳^{۲}}=\log_{۳}^{۲}+۲$$

$$=\frac{a}{۱-a}+۲=\frac{a+۲-۲a}{۱-a}=\frac{۲-a}{۱-a}$$

۱۳ – گزینه ۱ نقطهٔ $(۴,۲)$ در تابع $f(x)=\log_{a}^{x}$ صدق می‌کند. بنابراین:

$$f(۴)=\log_{a}^{۴}=۲$$

$$\Rightarrow a^{۲}=۴\Rightarrow \begin{cases} a=۲ & \text{ق ق} \\ a=-۲ & \text{غ ق ق} \end{cases} \xrightarrow{a=۲} ۴^{\log_{a+۲}^{a+۱}}=۴^{\log_{۴}^{۳}}=۳$$

۱۴ – گزینه ۳

$$۸۱<۸۵<۱۰۰\Rightarrow ۹<\sqrt{۸۵}<۱۰\Rightarrow \left[\sqrt{۸۵}\right]=۹\Rightarrow \log_{۲}^{\left[\sqrt{۸۵}\right]}=\log_{۲}^{۹}$$

$$۸<۹<۱۶\Rightarrow ۲^{۳}<۹<۲^{۴}\Rightarrow \log_{۲}^{۲^{۳}}<\log_{۲}^{۹}<\log_{۲}^{۲^{۴}}$$

$$\Rightarrow ۳<\log_{۲}^{۹}<۴\Rightarrow \left[\log_{۲}^{۹}\right]=۳$$

بنابراین:

$$\left[\log_{۲}^{\left[\sqrt{۸۵}\right]}\right]=۳$$

۱۵ – گزینه ۱ برای محاسبه مقدار لگاریتم مورد نظر ابتدا باید با استفاده از داده‌های مسئله $\sqrt{x-۱}$ را بسازیم:

$$(x-۱)^{\sqrt{۲}}=۲\xrightarrow{(\ )^{\sqrt{۲}}}(x-۱)^{۲}=۲^{\sqrt{۲}}\xrightarrow{\sqrt[۴]{}}\sqrt{(x-۱)}=\sqrt[۴]{۲^{\sqrt{۲}}}$$

هم اکنون معادل $\sqrt{x-۱}$ را جایگذاری می‌نماییم:

$$\log_{۸}^{\sqrt{x-۱}}=\log_{۸}^{\sqrt[۴]{۲^{\sqrt{۲}}}}=\log_{۲^{۳}}^{(۲)^{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}{۳}\log_{۲}^{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۲}$$

۱۶ – گزینه ۴ نکته: با فرض $a,b>۰$ و $b\neq ۱$ داریم:

$$\log_{a}^{b}=x\Leftrightarrow a=b^{x}$$

با قرار دادن $h=۱۵۵۰۰$ در رابطهٔ $h=۱۵۵۰۰\left(۵-\log_{۱۰}P\right)$ خواهیم داشت:

$$۱۵۵۰۰=۱۵۵۰۰\left(۵-\log_{۱۰}P\right)\Rightarrow ۱=۵-\log_{۱۰}P\Rightarrow \log_{۱۰}P=۴\Rightarrow P=۱۰^{۴}$$

۱۷ – گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $۲<\log_{۲}^{۷}<۳\Rightarrow ۲^{۲}<۷<۲^{۳}\Rightarrow ۴<۷<۸$ (صحیح)

گزینهٔ ۲: $-۱<\log_{\frac{۱}{۳}}۲<۰\Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱}>۲>\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۰}\Rightarrow ۳>۲>۱$ (صحیح)

گزینهٔ ۳: $۲<\log_{\sqrt{۲}}۲٫۵<۳\Rightarrow \left(\sqrt{۲}\right)^{۲}<۲٫۵<\left(\sqrt{۲}\right)^{۳}\Rightarrow ۲<۲٫۵<۲\sqrt{۲}$ (صحیح)

گزینهٔ ۴: $-۳<\log_{۰٫۵}^{۳}<-۲\Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳}>۳>\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}\Rightarrow ۲^{۳}>۳>۲^{۲}\Rightarrow ۸>۳>۴$ که صحیح نمی‌باشد.

نکته: اگر $۰<a<۱$، عدد $a$ هر چه به توان بزرگتری برسد، کوچک‌تر می‌شود.

۱۸ – گزینه ۲ برای محاسبه مقدار $a$ کافیست مختصات نقطه مورد نظر را در تابع جایگذاری نماییم، زیرا مختصات نقطه‌ای که روی منحنی قرار دارد در معادلهٔ منحنی صدق می‌نماید.

$$y=\log_{a}^{(x-۱)}\xrightarrow{\left(\frac{۱۷}{۴},-۲\right)}\log_{a}^{\left(\frac{۱۷}{۴}-۲\right)}=-۲$$

$$a^{-۲}=\frac{۹}{۴}\rightarrow a^{۲}=\frac{۴}{۹}\rightarrow a=\pm\frac{۲}{۳}$$

چون $a$ مبنای لگاریتم می‌باشد،بنابراین مقدار منفی قابل قبول نمی‌باشد و فقط $a=\frac{۲}{۳}$ صحیح است.

۱۹ – گزینه ۴ برای یافتن گزینه صحیح، با استفاده از خواص باید عبارت را ساده‌تر نماییم. ضمنا توجه داشته باشید که:

$$\log^{۵}=\log^{\left(\frac{۱۰}{۲}\right)}=\log^{۱۰}-\log^{۲}=۱-a$$

$$\log^{\left(\frac{\sqrt{۷۵}}{۷۲}\right)}=\log^{\left(\sqrt{۷۵}\right)}-\log^{(۷۲)}=\log^{۷۵^{\frac{۱}{۲}}}-\log^{۷۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\log^{(۵^۲\times ۳)} - \log^{۲^۳\times ۳^۲} = \frac{۱}{۲}(\log^{۵^۲} + \log^{۳}) - (\log^{۲^۳} + \log^{۳^۲})$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(۲\log^{۵} + \log^{۳}\right) - \left(۳\log^{۲} + ۲\log^{۳}\right)$$

$$\frac{۱}{۲}(۲\,(۱-a)+b) - (۳a+۲b) = (۱-a) + \frac{۱}{۲}b - ۳a - ۲b = ۱ - ۴a - \frac{۳}{۲}b$$

۲۰ – گزینه ۱  برای حل معادله ابتدا یک تغییر متغیر انجام می‌دهیم

$$\log_{۲}^{x} = t \to \log_{x}^{۲} = \frac{۱}{t}$$

$$\log_{۲}^{x} + ۳\log_{x}^{۲} = \log_{۳}^{۳^۴} \to t + \frac{۳}{t} = ۴ \xrightarrow[t\neq ۰]{\times t}$$

$$t^۲ + ۳ = ۴t \to t^۲ - ۴t + ۳ = ۰ \to (t-۱)(t-۳) = ۰ \to \begin{cases} t = ۱ \to \log_{۲}^{x} = ۱ \to x_۱ = ۲ & \text{ق ق} \\ t = ۳ \to \log_{۲}^{x} = ۳ \to x_۲ = ۸ & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$x_۱ + x_۲ = ۲ + ۸ = ۱۰$$

۲۱ – گزینه ۲  ابتدا با استفاده از خواص لگاریتم عبارت را ساده‌تر می‌نماییم

$$۳^{\log_{۳}^{۵}} = ۵^{\log_{۵}^{۳}} = ۵$$

$$۵^{\log_{۵}^{۳}} = ۳^{\log_{۳}^{۵}} = ۳$$

$$\left(۲^x - ۵\right)\left(۴^x - ۳\right) = ۰ \begin{cases} ۲^x - ۵ = ۰ \\ ۴^x - ۳ = ۰ \end{cases}$$

$$۲^x = ۵ \xrightarrow{\log_{۲}^{\bigcirc}} x_۱ = \log_{۲}^{۵}$$

$$۴^x = ۳ \xrightarrow{\log_{۴}^{\bigcirc}} x_۲ = \log_{۴}^{۳} = \log_{۲}^{\sqrt{۳}}$$

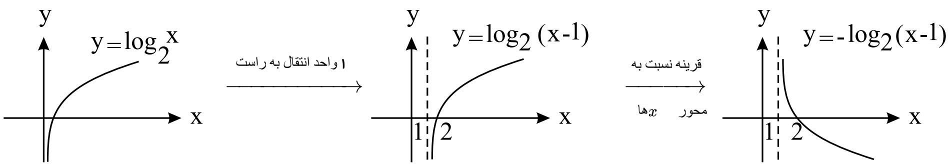
حال مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$x_۱ + x_۲ = \log_{۲}^{۵} + \log_{۲}^{\sqrt{۳}} = \log_{۲}^{۵\sqrt{۳}}$$

۲۲ – گزینه ۴  نکته: با فرض $a > ۰$، برای رسم نمودار تابع $y = f(x-a)$ ($y = f(x+a)$)، کافی است نمودار $y = f(x)$ را $a$ واحد به سمت راست (چپ) انتقال دهیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$، کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور $x$ها قرینه کنیم.

با استفاده از نکات بالا، نمودار را رسم می‌کنیم.




۲۳ – گزینه ۳  برای حل معادله دو طرف باید به یک لگاریتم تبدیل شود. از طرفی $\log_{a}^{۱} = ۰$ می‌باشد.

$$۲\log\sqrt{۲m} - \log ۱ = ۳\log ۲ + \log(m+۱) \to \log\left(\sqrt{۲m}\right)^۲ - ۰ = \log ۲^۳ + \log(m+۱) \to$$

$$\log ۲m^۲ - \log(m+۱) = \log ۸ \to \log\left(\frac{۲m^۲}{m+۱}\right) = \log ۸ \to \frac{۲m^۲}{m+۱} = ۸ \to ۲m^۲ = ۸m + ۸ \to$$

$$m^۲ - ۴m - ۴ = ۰ \to (m-۲)^۲ = ۸ \to \begin{cases} m = +۲\sqrt{۲} + ۲ & \checkmark \\ m = -۲\sqrt{۲} + ۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله $m = -۲\sqrt{۲} + ۲$ برای لگاریتم وردی منفی تولید می‌نماید.

۲۴ – گزینه ۴  ابتدا داده مسئله را ساده می‌نماییم:

$$\log_{b}^{a} = \frac{۱}{\log_{a}^{b}} \to \log_{۱۲}^{۳} = a \to \log_{۳}^{۱۲} = \frac{۱}{a} \to \log_{۳}^{۲^۲\times ۳} = \frac{۱}{a} \to \log_{۳}^{۲^۲} + \log_{۳}^{۳} = \frac{۱}{a}$$

$$\to ۲\log_{۳}^{۲} + ۱ = \frac{۱}{a} \to \log_{۳}^{۲} = \frac{۱}{۲a} - \frac{۱}{۲}$$

برای محاسبه خواسته مسئله از خاصیت زیر استفاده می‌نماییم:

$$\log_{b}^{a} = \frac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}} \to \log_{\sqrt{۲۷}}^{۸} = \frac{\log_{۳}^{۸}}{\log_{۳}^{\sqrt{۲۷}}} = \frac{\log_{۳}^{۲^۳}}{\log_{۳}^{۳^{\frac{۳}{۲}}}} = \frac{۳\log_{۳}^{۲}}{\frac{۳}{۲}\times\log_{۳}^{۳}} = ۲\log_{۳}^{۲}$$

$$= 2(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a}$$

۲۵ – گزینه ۳ با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، داریم:

$$\log_3^{a^2} + 2\log_{(3)^{\frac{1}{2}}}^{(2)^{\frac{1}{2}}} = \log_3^{a^2} + \log_3^{4} = \log_3^{4a^2} \qquad (*)$$

طرف راست تساوی برابر است با:

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}^{(5+a)} = \log_3^{(5+a)} \qquad (**)$$

با مقایسهٔ روابط $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌گیریم:

$$\log_3^{4a^2} = \log_3^{(5+a)} \Rightarrow 4a^2 = 5 + a \Rightarrow 4a^2 - a - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

که هر دو مقدار به دست آمده، قابل قبول‌اند. بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای $a$ برابر است با:

$$-1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

۲۶ – گزینه ۲

روش اول: تابع از نقاط $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ می‌گذرد. پس:

$$(0, 1) \Rightarrow 1 = 2^b - 2a \quad (*)$$

$$(-1, 0) \Rightarrow 0 = 2^{-1+b} - 2a \Rightarrow 2a = 2^{-1+b}$$

$$\xrightarrow{(*)} 1 = 2^b - 2^{-1+b}$$

$$\Rightarrow 2^b(1 - 2^{-1}) = 1 \Rightarrow 2^b \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$2a = 2^{-1+b} \xrightarrow{b=1} 2a = 2^{\circ} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

روش دوم: با توجه به نمودار و معادله انتقال عمودی منحنی فقط به دلیل وجود عامل $-2a$ می‌باشد که مقدار برابر $-1$ است.

$$y = 2^{x+b} \underbrace{-2a}_{\text{انتقال عمودی}}$$

$$-2a = -1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2^{x+b} - 1$$

در این مرحله مختصات یکی از دو نقطه را در ضابطه تابع جایگذاری می‌نماییم:

$$y = 2^{x+b} - 1 \xrightarrow{A(0,1)} 1 = 2^b - 1 \rightarrow 2^b = 2 \rightarrow b = 1$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۲۷ – گزینه ۳

$$\log_5^{(x+2)} = 1 - \log_5^{(x-2)} \Rightarrow \log_5^{(x+2)} + \log_5^{(x-2)} = 1 \Rightarrow \log_5^{(x+2)(x-2)} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = 5 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

فقط $x = 3$ قابل قبول است.

$$x = 3 \Rightarrow y = \log_5^{3+2} = \log_5^5 = 1$$

۲۸ – گزینه ۴ برای حل سوال ابتدا یکی از خواص لگاریتم را یادآوری می‌نماییم:

$$a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

$$\sqrt{2^{3+\log_2^6}} = \sqrt{2^3 \times 2^{\log_2^6}} = \sqrt{8 \times 6^{\log_2^2}} = \sqrt{8 \times 6} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

۲۹ – گزینه ۳ برای حل معادله باید معادله از حالت رادیکالی خارج شود:

$\log_a^x = y \to x = a^y$

$\log_{۰٫۵}(\log_{۰٫۲}(۲ - x)) = -۱ \to \log_{۰٫۲}^{(۲-x)} = (۰٫۵)^{-۱} \to$

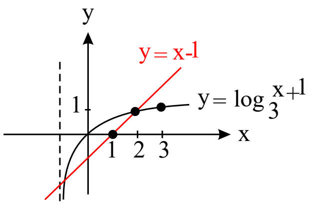
$\log_{۰٫۲}^{(۲-x)} = ۲ \to ۲ - x = (۰٫۲)^{۲} \to ۲ - x = ۰٫۰۴ \to x = ۱٫۹۶$

**با جایگذاری در معادله مشخص می‌شود که ریشه قابل قبول می‌باشد.**

**۳۰ - گزینه ۲**

**به دلیل اینکه دو تابع از یک جنس نیستند، روش‌های حل کلاسیک معادله پاسخگو نیست و باید دو تابع را در یک دستگاه رسم نمود.**

**با توجه به نمودار دو تابع همدیگر را در دو نقطه قطع کرده‌اند.**



# پاسخنامه کلیدی

| سؤال | پاسخ | سؤال | پاسخ | سؤال | پاسخ | سؤال | پاسخ | سؤال | پاسخ | سؤال | پاسخ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۶ | ۳ | ۱۱ | ۲ | ۱۶ | ۴ | ۲۱ | ۲ | ۲۶ | ۲ |
| ۲ | ۴ | ۷ | ۴ | ۱۲ | ۴ | ۱۷ | ۴ | ۲۲ | ۴ | ۲۷ | ۳ |
| ۳ | ۳ | ۸ | ۳ | ۱۳ | ۱ | ۱۸ | ۲ | ۲۳ | ۳ | ۲۸ | ۴ |
| ۴ | ۲ | ۹ | ۳ | ۱۴ | ۳ | ۱۹ | ۴ | ۲۴ | ۴ | ۲۹ | ۳ |
| ۵ | ۳ | ۱۰ | ۱ | ۱۵ | ۱ | ۲۰ | ۱ | ۲۵ | ۳ | ۳۰ | ۲ |