نام آزمون: تابع لگاریتمی

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - از معادله‌ی $\log_{6}^{x-1} = 1 - \log_{6}^{2x}$، مقدار $\log_{27}^{x^2-x}$ کدام است؟

۲ - اگر $A = \dfrac{(4)^{0.75}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + 9^{0.25}$ باشد، حاصل $\log_A\left(\sqrt{2}-1\right)$ کدام است؟

۳ - اگر $a = \log_{4}^{b}$، آن‌گاه معادله‌ی $3^{x-a} = 2^{x^2}$ فقط یک جواب دارد. b کدام است؟

۴ - حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^{1+\log x} = 10^{6}$ کدام است؟

۵ - اگر $\log_{a}^{x} = 1 - 2\log_{a}^{3}$، آنگاه لگاریتم x در مبنای $\dfrac{\sqrt{a}}{3}$ کدام است؟

۶- با فرض $\log_{2}^{9} = x$ ، حاصل $\log_{6}^{2}$ کدام است؟

۷- اگر $\log 25 = A$، حاصل $\log(1+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\log(4-2\sqrt{3})$ کدام است؟

۸- اگر $\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1$ باشد لگاریتم عدد x در پایهٔ ۸ کدام است؟

۹- اگر لگاریتم a در پایه‌ی $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد آنگاه لگاریتم $(a^{3}+7)$ در پایه‌ی ۸ کدام است؟

۱۰- از تساوی $\log_{x}(x^{2}+4) = 1 + \log_{x}^{5}$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۲ کدام است؟

۱۱- اگر $4^{a} = 2\sqrt{2}$ باشد، لگاریتم $(4a+1)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱۲ - اگر $\log ۲ = k$ باشد، حاصل $\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱ + \sqrt{۵})$ کدام است؟

۱۳ - اگر $۴\sqrt{۲} = ۴^x$ و $۱ + \log\sqrt{x+۱} = \log y$ باشد مقدار y کدام است؟

۱۴ - اگر $\log ۳ + \log\sqrt[۴]{۳} = \log(۸۱)^k$، آنگاه لگاریتم $\frac{۵}{k}$ در پایهٔ ۲ کدام است؟

۱۵ - از معادلات $۲^x \times ۸^y = ۴$ و $\log x = \log ۲ + \log y$ مقدار x کدام است؟

۱۶ - اگر $\log_b a = \frac{۳}{۲}$ آنگاه $\log_{\sqrt{b}} ab^۲$ کدام است؟

۱۷ - از دو معادلهٔ $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$، لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱۸ - دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 - \log\left(x^2 - 3x\right)}$ کدام است؟

۱۹ - اگر $9^a = 27\sqrt{3}$ و $\log\sqrt{b} - \log(2-a) = 1$، مقدار b است؟

۲۰ - حاصل‌جمع جواب‌های معادله‌ی $\log_x^{5x} - \frac{1}{2}\log_5^{x^2} = 1$ کدام است؟

۲۱ - از معادله‌ی $\log_3(\log_2 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}}) = -2$، مقدار x کدام است؟

۲۲ - از معادلهٔ $\log 2 - \log 30 = \log(x+3) + \log(2x-1)$ مقدار $\log_8 x$ کدام است؟

۲۳ - اگر $\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A$**، حاصل** $\log_{\sqrt{e}}^{32}$ **کدام است؟**

۲۴ - حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی $(\log_2^x)^2 - 9\log_8^x = 4$ **کدام است؟**

۲۵ - نمودار تابع $y = \log(ax+b)$ **، محور** x**ها را در نقطه‌ای با طول** $-10{,}1$ **قطع می‌کند. اگر دامنه‌ی این تابع، بازه‌ی** $(-\infty, -10)$ **باشد، مقدار** $\log\sqrt{ab}$ **کدام است؟**

۲۶ - حاصل $[\log_2^{2+\sqrt{3}} - \log_2^{2-\sqrt{3}}]$ **کدام است؟ (**$[\,]$**، نماد جزء صحیح است.)**

۲۷ - معادله‌ی $\log_9^{x^2-2x+1} + \log_3^{x+1} = 1$ **چند ریشه دارد؟**

۲۸ - در تابع $f:[-1,2]\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=(\log_{0/2}^{0/4})^{x}$ بیش‌ترین مقدار تابع کدام است؟

۲۹ - از معادلهٔ لگاریتمی $\log_3^{(2x^2+1)}-\log_3^{(x+2)}=1$، مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایهٔ ۸، کدام است؟

۳۰ - حاصل $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-2+\log_{0/5}^{9}}$ کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k}^{a}-\log_{k}^{b}=\log_{k}^{\frac{a}{b}} \quad , \quad \log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_{k}^{a}}$

$$\log_{۶}^{x-۱}=۱-\log_{۶}^{۲x}\rightarrow \log_{۶}^{x-۱}=\log_{۶}^{۶}-\log_{۶}^{۲x}\rightarrow \log_{۶}^{x-۱}=\log_{۶}^{\frac{۶}{۲x}}\Rightarrow x-۱=\frac{۳}{x}\Rightarrow x^{۲}-x=۳$$

بنابراین:

$$\log_{۲۷}^{x^{۲}-x}=\log_{۳^{۳}}^{۳}=\frac{۱}{۳}$$

۲ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k a^n = n\log_k a}$

ابتدا عبارت A را خلاصه می‌کنیم.

$$A=\frac{\left(۲^{۲}\right)^{\frac{۳}{۴}}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\left(۳^{۲}\right)^{\frac{۱}{۴}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\sqrt{۳}$$
$$=\frac{۲\sqrt{۲}\left(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right)}{\left(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\right)\left(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right)}+\sqrt{۳}=\frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{\left(۱+\sqrt{۲}\right)^{۲}-\left(\sqrt{۳}\right)^{۲}}+\sqrt{۳}$$
$$=\frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{۱+۲\sqrt{۲}+۲-۳}+\sqrt{۳}=\frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}}+\sqrt{۳}=\frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}+۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}}$$
$$=\frac{۲\left(\sqrt{۲}+۲\right)}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+۲}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}+\frac{۲}{\sqrt{۲}}=۱+\sqrt{۲}$$

توجه کنید که $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\sqrt{۲}-۱$ است. پس داریم:

$$\Rightarrow \log_{A}\left(\sqrt{۲}-۱\right)=\log_{۱+\sqrt{۲}}\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\log_{۱+\sqrt{۲}}\left(\sqrt{۲}+۱\right)^{-۱}=-۱$$

۳ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_{k}^{a} \quad , \quad \log_{k}^{a}=\frac{۱}{\log_{a}^{k}}}$

$$۳^{x-a}=۲^{x^{۲}}\xrightarrow{\text{از دو طرف در مبنای سه لگاریتم می‌گیریم}}\log_{۳}^{۳^{x-a}}=\log_{۳}^{۲^{x^{۲}}}$$
$$\rightarrow x-a=x^{۲}\log_{۳}^{۲}\rightarrow (\log_{۳}^{۲})x^{۲}-x+a=۰$$

چون گفته شده این معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای یک ریشه است پس $\Delta=۰$ می‌باشد:

$$\Delta=۰\rightarrow ۱-۴a\log_{۳}^{۲}=۰\rightarrow ۴a\log_{۳}^{۲}=۱$$
$$\rightarrow a\log_{۳}^{۲}=\frac{۱}{۴}\rightarrow a=\frac{\frac{۱}{۴}}{\log_{۳}^{۲}}=\frac{۱}{۴}\log_{۲}^{۳}=\log_{۲^{۴}}^{۳}=\frac{۱}{۲}\log_{۴}^{۳}=\log_{۴}^{\sqrt{۳}}$$
$$a=\log_{۴}^{b}\rightarrow \log_{۴}^{\sqrt{۳}}=\log_{۴}^{b}\rightarrow b=\sqrt{۳}$$

۴ ـ گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\log_{b}^{N}=x\rightarrow N=b^{x} \quad , \quad \log_{k}^{a}=\frac{۱}{\log_{a}^{k}}}$

$$x^{۱+\log x}=۱۰^{۶}\rightarrow ۱+\log x=\log_{x}^{۱۰^{۶}}\rightarrow ۶\log_{x}^{۱۰}=۱+\frac{۱}{\log_{x}^{۱۰}}$$
$$\xrightarrow{\log_{x}^{۱۰}=A}۶A=۱+\frac{۱}{A}\xrightarrow{\times A}۶A^{۲}=A+۱\rightarrow ۶A^{۲}-A-۱=۰$$
$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۱+۲۴=۲۵,\ A_{۱,۲}=\frac{۱\pm ۵}{۱۲}=\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۳}$$

$$A=\frac{1}{2}\to \log_x^{10}=\frac{1}{2}\to x^{\frac{1}{2}}=10\to \sqrt{x}=10\to x=100$$

$$A=-\frac{1}{3}\to \log_x^{10}=-\frac{1}{3}\to x^{-\frac{1}{3}}=10\xrightarrow{\text{به توان }(-3)}\to(x^{-\frac{1}{3}})^{-3}=10^{-3}\Rightarrow x=\frac{1}{1000}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}=(100)(\frac{1}{1000})=0.1$$

۵ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_b^N=x\to N=b^x}$

$$\log_a^x=1-2\log_a^3\Rightarrow \log_a^x+\log_a^9=1\Rightarrow \log_a^{9x}=1\Rightarrow 9x=a\Rightarrow x=\frac{a}{9}$$

$$\log_{\frac{\sqrt{a}}{3}}^x=\log_{\frac{\sqrt{a}}{3}}^{\frac{a}{9}}=\log_{\frac{\sqrt{a}}{3}}^{(\frac{\sqrt{a}}{3})^2}=2$$

۶ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log_k^a=\frac{1}{\log_a^k}\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

$$\log_2^9=x\ \Rightarrow\ 2\log_2^3=x\ \Rightarrow\ \log_2^3=\frac{x}{2}$$

$$\log_6^2=\frac{1}{\log_2^6}=\frac{1}{\log_2^2+\log_2^3}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{\frac{x+2}{2}}=\frac{2}{x+2}$$

۷ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

با کمی دقت، $4-2\sqrt{3}$ همان $(\sqrt{3}-1)^2$ است، $((\sqrt{3}-1)^2=3-2\sqrt{3}+1=4-2\sqrt{3})$ پس داریم:

$$\log(1+\sqrt{3})+\frac{1}{2}\log(\sqrt{3}-1)^2$$

$$=\log(1+\sqrt{3})+\log(\sqrt{3}-1)=\log\underbrace{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}_{\text{مزدوج}}$$

$$=\log(3-1)=\log 2=\log\frac{10}{5}=1-\log 5$$

چون $\log 25=A$ است، پس $\log 5=\frac{A}{2}$ و پاسخ $1-\frac{A}{2}$ خواهد بود.

$$(\log 25=\log 5^2=2\log 5=A\to \log 5=\frac{A}{2})$$

۸ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_b^N=x\to N=b^x}$

$$\log\frac{2}{x}+\log(x+1)=1\Rightarrow \log\frac{2x+2}{x}=1\xrightarrow{\text{تعریف}}\frac{2x+2}{x}=10\Rightarrow 10x=2x+2\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$\log_8^x=\log_8^{\frac{1}{4}}=\log_{2^3}^{2^{-2}}=-\frac{2}{3}$$

۹ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_b^N=x\to b^x=N\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log_{\sqrt{3}}^a=\frac{4}{3}\Rightarrow a=(\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\Rightarrow a=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}=3^{\frac{4}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_8^{(a^3+7)}=\log_8^{(3^{\frac{2}{3}})^3+7}=\log_8^{3^2+7}=\log_8^{16}=\log_{2^3}^{2^4}=\frac{4}{3}$$

۱۰ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log_x^{x^2+4}=1+\log_x^5\Rightarrow \log_x^{x^2+4}=\log_x^x+\log_x^5\Rightarrow \log_x^{x^2+4}=\log_x^{5x}\Rightarrow x^2+4=5x$$

$$\Rightarrow x^2-5x+4=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}x=1\ \text{غ ق ق (مبنا نمی‌تواند یک باشد)}\\ x=\frac{c}{a}=4\end{cases}$$

$\log_۲^x \xrightarrow{x=۴} \log_۲^۴ = \log_۲^{۲^۲} = ۲$

۱۱ - گزینه ۱ ابتدا مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$۴^a = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲^{۲a} = ۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow ۲a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

$$\log_۴^{(۴a+۱)} = \log_۴^{(۴\times\frac{۳}{۴}+۱)} = \log_۴^۴ = ۱$$

۱۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log(۶-۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱+\sqrt{۵}) = \log(۶-۲\sqrt{۵}) + \log(۱+\sqrt{۵})^۲ = \log(۶-۲\sqrt{۵}) + \log(۱+۵+۲\sqrt{۵})$$

$$= \log(۶-۲\sqrt{۵}) + \log(۶+۲\sqrt{۵}) = \log \underbrace{(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})}_{\text{مزدوج}} = \log(۳۶-۲۰) = \log ۱۶ = \log^{۲^۴} = ۴\log ۲ = ۴k$$

۱۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$۴\sqrt{۲} = ۴^x \Rightarrow ۲^۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = ۴^x \Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۲}} = ۲^{۲x} \Rightarrow ۲x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵}{۴}$$

$$۱ + \log\sqrt{x+۱} = \log y \Rightarrow \log ۱۰ + \log\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱} = \log y$$

$$\Rightarrow \log ۱۰ + \log\frac{۳}{۲} = \log y \Rightarrow \log ۱۰ \times \frac{۳}{۲} = \log y \Rightarrow y = ۱۵$$

۱۴ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$\log ۳ + \log\sqrt[۴]{۳} = \log(۸۱)^k \rightarrow \log ۳ + \log ۳^{\frac{۱}{۴}} = \log ۳^{۴k} \rightarrow \log ۳ \times ۳^{\frac{۱}{۴}} = \log ۳^{۴k}$$

$$\rightarrow \log ۳^{\frac{۵}{۴}} = \log ۳^{۴k} \rightarrow ۴k = \frac{۵}{۴} \rightarrow k = \frac{۵}{۱۶}$$

$$\log_۲^{\frac{۵}{k}} \xlongequal{k=\frac{۵}{۱۶}} \log_۲^{۱۶} = \log_۲^{۲^۴} = ۴$$

۱۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$\left.\begin{array}{l} ۲^x \times ۸^y = ۴ \Rightarrow ۲^x \times ۲^{۳y} = ۲^۲ \Rightarrow ۲^{x+۳y} = ۲^۲ \Rightarrow x+۳y = ۲ \\ \log x = \log ۲ + \log y \Rightarrow \log x = \log ۲y \Rightarrow x = ۲y \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{۴}{۵} \,,\, y = \frac{۲}{۵}$$

۱۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k ab = \log_k a + \log_k b \quad , \quad \log_{k^m} a^n = \frac{n}{m}\log_k a}$

$$\log_{\sqrt{b}} ab^۲ = \log_{\sqrt{b}} a + \log_{\sqrt{b}} b^۲ = \log_{b^{\frac{۱}{۲}}} a + \log_{b^{\frac{۱}{۲}}} b^۲ = ۲\log_b a + ۴ = ۲(\frac{۳}{۲}) + ۴ = ۷$$

۱۷ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\boxed{a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab \;,\; \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \;,\; \log_b^N = x \rightarrow b^x = N \;,\; \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$$

$$\log_۳^x + \log_۳^y = ۲ \rightarrow \log_۳^{xy} = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} xy = ۳^۲ = ۹$$

$$x^۲ + y^۲ = ۴۶ \rightarrow (x+y)^۲ - ۲xy = ۴۶ \rightarrow (x+y)^۲ - ۱۸ = ۴۶$$

$\rightarrow (x+y)^۲ = ۶۴ \rightarrow x+y = ۸$ یا $x+y = -۸$ غ ق ق (اعدادی x,y مثبت هستند.)

$$\log_۴^{x+y} = \log_۴^۸ = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$$

۱۸ - گزینه ۳ جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس داریم:

$??^۲?۳?? > ۰ \Rightarrow x(x-۳) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ?? < ۰$ یا $x > ۳ \quad (I)$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$$۱ - \log(x^۲ - ۳x) \geq ۰ \rightarrow \log(x^۲ - ۳x) \leq ۱ \rightarrow \log(x^۲ - ۳x) \leq \log ۱۰$$

$$\rightarrow x^۲ - ۳x \leq ۱۰ \rightarrow x^۲ - ۳x - ۱۰ \leq ۰ \rightarrow (x-۵)(x+۲) \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲ \leq x \leq ۵ \quad (II)$$

از اشتراک I , II به نتیجه‌ی $-2 \le x < 0$ یا $3 < x \le 5$ می‌رسیم. یعنی: $x \in [-2, 0) \cup (3, 5]$

۱۹ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$$9^a = 27\sqrt{3} \Rightarrow 3^{2a} = 3^3 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{7}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{4}$$

$$\log\sqrt{b} - \log(2 - \frac{7}{4}) = 1 \Rightarrow \log\sqrt{b} = \log\frac{1}{4} + \log 10 = \log(\frac{10}{4}) \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{25}{4} = 6.25$$

۲۰ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^a = \frac{1}{\log_a^k} \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$\log_x^{5x} - \frac{1}{2}\log_5^{x^2} = 1 \Rightarrow \log_x^5 + \log_x^x - \frac{1}{2}\log_5^{x^2} = 1 \Rightarrow \log_x^5 + 1 - \log_5^x = 1 \Rightarrow \log_x^5 - \log_5^x = 0$$

$$\Rightarrow \log_x^5 - \log_5^x = 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_5^x} - \log_5^x = 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_5^x} = \log_5^x \Rightarrow (\log_5^x)^2 = 1 \Rightarrow \log_5^x = \pm 1$$

$$\begin{cases} \log_5^x = 1 \Rightarrow x_1 = 5 \\ \log_5^x = -1 \Rightarrow x_2 = 5^{-1} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$$

۲۱ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x}$

دقت کنید که:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{9}}} = x^{\frac{1}{27}}$$

بنابراین:

$$\log_3 \log_2^{x^{\frac{1}{27}}} = -2 \xrightarrow{\text{تعریف}} \log_2^{x^{\frac{1}{27}}} = 3^{-2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{27}\log_2^x = \frac{1}{9} \Rightarrow \log_2^x = 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} x = 2^3 = 8$$

۲۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2 \to \log(2x-1)(x+3) = \log 15$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 15 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 13}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \quad \text{ق ق} \\ x = -\frac{18}{4} \quad \text{(جلوی لگاریتم را منفی می‌کند)} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_8 x = \log_{2^3}^2 = \frac{1}{3}$$

۲۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_k^a = \frac{1}{\log_a^k}}$

$$\log_2^{\sqrt[5]{e^2}} = A \Rightarrow \log_2^{e^{\frac{2}{5}}} = A \Rightarrow \frac{2}{5}\log_2^e = A \to \log_2^e = \frac{5A}{2} \Rightarrow \log_e^2 = \frac{2}{5A}$$

$$\log_{\sqrt{e}}^{32} = \log_{e^{\frac{1}{2}}}^{2^5} = 10\log_e^2 = 10(\frac{2}{5A}) = \frac{4}{A}$$

۲۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$(\log_2^x)^2 - 9\log_8^x = 4 \to (\log_2^x)^2 - 9\log_{2^3}^x - 4 = 0$$

$$\to (\log_2^x)^2 - 3\log_2^x - 4 = 0 \xrightarrow{\log_2^x = A} A^2 - 3A - 4 = 0$$

$$\to (A-4)(A+1) = 0 \to \begin{cases} A = 4 \to \log_2^x = 4 \xrightarrow{\text{تعریف}} x = 2^4 = 16 \\ A = -1 \to \log_2^x = -1 \xrightarrow{\text{تعریف}} x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $16 \times \frac{1}{2} = 8$ می‌باشد.

۲۵ ـ گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

این تابع محور طول را در $\left|\begin{matrix}-۱۰/۱\\ ۰\end{matrix}\right.$ قطع می‌کند پس در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}-۱۰/۱\\ ۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۰=\log(-۱۰/۱a+b) \xrightarrow{\log ۱=۰} -۱۰/۱a+b=۱$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف این تابع کافی است جلوی لگاریتم را بزرگتر از صفر قرار دهید.

$$ax+b>۰ \to ax>-b \to \begin{cases} a>۰ \to x>\frac{-b}{a} \\ a<۰ \to x<\frac{-b}{a}\end{cases}$$

چون دامنه‌ی تعریف این تابع $x<-۱۰$ است. پس: $-\dfrac{b}{a}=-۱۰ \to ۱۰a=b$

$$\begin{cases}-۱۰/۱a+b=۱\\ b=۱۰a\end{cases} \to a=-۱۰\ ,\ \ b=-۱۰۰$$

پس: $\log\sqrt{ab}=\log\sqrt{۱۰۰۰}=\log\sqrt{۱۰^۳}=\log ۱۰^{\frac{۳}{۲}}=\dfrac{۳}{۲}$

۲۶ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}}$

$$\log_۲^{۲+\sqrt{۳}}-\log_۲^{۲-\sqrt{۳}}=\log_۲^{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}} \xlongequal{\text{گویا می‌کنیم}} \log_۲^{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}}=\log_۲^{\frac{(۲+\sqrt{۳})^۲}{۴-۳}}=\log_۲^{\frac{۴+۳+۴\sqrt{۳}}{۱}}=\log_۲^{۷+۴\overbrace{\sqrt{۳}}^{۱/۷}}=\log_۲^{۱۳/۸}$$

$$۲^۳<۱۳/۸<۲^۴ \to \log_۲^{۲^۳}<\log_۲^{۱۳/۸}<\log_۲^{۲^۴} \to ۳<\log_۲^{۱۳/۸}<۴ \to [\log_۲^{۱۳/۸}]=۳$$

۲۷ ـ گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \ \log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a\ ,\ \ \log_b^a=k \to b^k=a}$

$$\to \log_۹^{x^۲-۲x+۱}+\log_۳^{x+۱}=۱ \to \log_{۳^۲}^{(x-۱)^۲}+\log_۳^{x+۱}=۱$$

$$\to \log_۳^{x-۱}+\log_۳^{x+۱}=۱ \to \log_۳^{(x+۱)(x-۱)}=۱$$

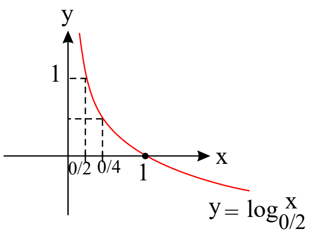
$$\xrightarrow{\text{تعریف}} x^۲-۱=۳^۱ \to x^۲=۴ \to \begin{cases} x=۲ & \text{ق ق}\\ x=-۲ & \text{غ ق ق (در دامنه‌ی تعریف قرار ندارد.)}\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است.

۲۸ ـ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a=\dfrac{۱}{\log_a^k}}$

$y=\log_a^x\ ,\ \ ۰<a<۱ \to$



از روی شکل واضح است که $۱>\log_{۰/۲}^{۰/۴}>۰$ است. بنابراین تابع $f(x)=\left(\log_{۰/۲}^{۰/۴}\right)^x$ نزولی است.(تابع $y=a^x$ وقتی $۰<a<۱$ است نزولی می‌باشد.)

پس بیشترین مقدار y آن به ازای نقطه‌ی ابتدایی دامنه یعنی: $x=-۱$ بدست می‌آید. $(f:[-۱,۲]\to R)$

$$y_{Max}=\left(\log_{۰/۲}^{۰/۴}\right)^{-۱}=\frac{۱}{\log_{۰/۲}^{۰/۴}}=\log_{۰/۴}^{۰/۲}$$

۲۹ ـ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}\ ,\ \ \log_{k^m}^{a^n}=\dfrac{n}{m}\log_k^a\ ,\ \ \log_b^N=x \Rightarrow N=b^x}$

$$\log_۳^{۲x^۲+۱}-\log_۳^{x+۲}=۱ \to \log_۳^{\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}}=۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۲x^۲+۱}{x+۲}=۳^۱$$

$$\to ۲x^۲+۱=۳x+۶ \to ۲x^۲-۳x-۵=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱\\ x=-\dfrac{c}{a}=\dfrac{۵}{۲}\end{cases}$$

هر دو جواب به‌دست‌آمده، قابل‌قبول هستند، ولی برای محاسبهٔ $\log_۸^{۲x-۱}$ فقط به‌جای x، می‌توانیم مقدار $x=\dfrac{۵}{۲}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x=-۱$ عددی که می‌خواهیم از آن لگاریتم بگیریم را منفی می‌کند.

$$\log_۸^{۲x-۱} \xlongequal{x=\frac{۵}{۲}} \log_۸^{۲(\frac{۵}{۲})-۱}=\log_۸^۴=\log_{۲^۳}^{۲^۲}=\frac{۲}{۳}$$

۳۰ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \quad , \quad a^{\log_k^b} = b^{\log_k^a}}$

$$\left(\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)^{-۲+\log_{۰/۵}^{۹}} = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)^{-۲} \times \left(\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right)^{\log_{۰/۵}^{۹}} = \left(\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{۲}}\right)^{-۲} \times ۹^{\log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}} = \left(۲^{-\frac{۳}{۲}}\right)^{-۲} \times ۹^{\log_{۲^{-۱}}^{\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{۲}}}}$$

$$= ۲^{۳} \times ۹^{\log_{۲^{-۱}}^{۲^{-\frac{۳}{۲}}}} = ۲^{۳} \times ۹^{\frac{۳}{۲}} = ۸ \times (۳^{۲})^{\frac{۳}{۲}} = ۸ \times ۳^{۳} = ۸ \times ۲۷ = ۲۱۶$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۱	۱۱ - ۱	۱۶ - ۴	۲۱ - ۲	۲۶ - ۳
۲ - ۳	۷ - ۱	۱۲ - ۲	۱۷ - ۱	۲۲ - ۲	۲۷ - ۲
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۳	۱۸ - ۳	۲۳ - ۴	۲۸ - ۴
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۱	۲۹ - ۴
۵ - ۲	۱۰ - ۴	۱۵ - ۴	۲۰ - ۴	۲۵ - ۴	۳۰ - ۳