نام آزمون: فصل دوم حسابان ۱

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲)=۳$ و $f(-۵)=-۲$

ب) f در بازه $[۰,۲]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول -۳ قطع می‌کند.

۲ - اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}, g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$، دامنه و ضابطه توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۳ - نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون پذیر نباشد.

ب) برای هر عدد حقیقی x , $x < f(x)$

۴ - تابع $f(x)=ax+b$ ، $a \neq ۰$ داده شده است همه مقادیر a, b را که به ازای آن ها $f^{-۱}(x)=f(x)$ را بیابید.

۵ - اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه‌ی $h(t) = ۱۰۰ - \frac{۴۹}{۱۰}t^۲$ به دست می‌آید.

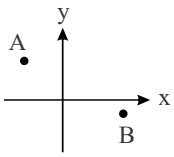
الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می‌کند؟

۶ - در صفحهٔ مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟



۷ - کدام یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم دامنهٔ تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[۰,۳]$ است.

۸ - تابعی مثال بزنید که دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت باشد، چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

۹ - همه تابع‌های از مجموعه $A = \{a,b,c\}$ به مجموعه $B = \{d,e\}$ را بنویسید. (از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

۱۰ - تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\lvert x\rvert \end{cases}$	$\begin{cases} r:[0,+\infty)\to\mathbb{R} \\ r(a)=5a \end{cases}$
$\begin{cases} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(x)=5x \end{cases}$	$\begin{cases} s:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ s(a)=5a \end{cases}$
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $h(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$	$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=5x \end{cases}$

۱۱ - با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد.

تابع خطی برای مردان $M(x)=2{,}89x+70{,}64$

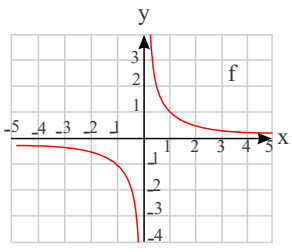
تابع خطی برای زنان $F(x)=2{,}75x+71{,}48$

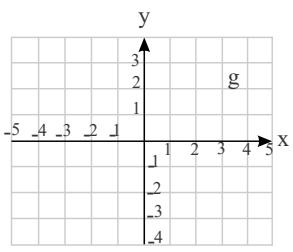
که در آن‌ها x طول استخوان بازو و برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

۱۲ - توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{1}{x}$ را رسم کرد.





۱۳ - نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

۱۴ - هزینهٔ پاک‌سازی x درصد ازآلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به وسیله تابع $f(x) = \frac{۲۵۵x}{۱۰۰ - x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینهٔ پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰% از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنهٔ این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

۱۵ - اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معیّن، به وسیلهٔ یک نوع ویروس آلوده می‌شوند، با دستور $n(t) = \frac{۹۵۰۰t - ۲۰۰۰}{۴ + t}$ به‌دست آید که در آن $t > ۰$ زمان بر حسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

۱۶ - تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

۱۷ - آیا تابع $f(x) = \frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x) = \frac{۵}{۲}$ است؟

۱۸ - اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t) = ۱۰۰ - ۵t^۲$ به‌دست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک‌به‌یک است؟

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

۱۹ - نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x < f(x)$

۲۰ - وارون تابع $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

۲۱ - اگر $f(x) = ۴x$ و $g(x) = ۲ - x$، توابع $f - g, \frac{f}{g}$ و fog را به همراه دامنهٔ آن‌ها به‌دست آورید.

۲۲ - برای دو تابع $f(x) = \frac{۱}{x - ۳}$ و $g(x) = \frac{۴}{x}$ تابع fog و دامنه آن را به‌دست آورید.

۲۳- فرض کنیم $f : A \to \mathbb{N}, \begin{cases} g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ g(n) = ۲n \end{cases}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ که در آن: $A = \{۱,۲,۳,۴\}$، توابع $f+g$ و gof، را به‌دست آورید.

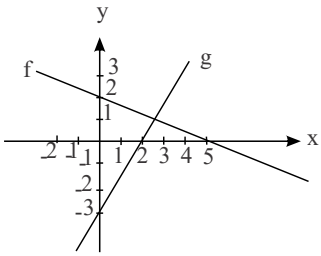
۲۴- اگر $f = \left\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\right\}$ و $g = \{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$، توابع $f+g, f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

۲۵- اگر $f(x) = x^۲ - ۹$ و $g(x) = x + ۳$ ضابطهٔ $\frac{f}{g}$ و دامنه آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^۲ - ۹}{x + ۳} = \frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳} = x - ۳, D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

۲۶- اگر $f(x) = ۲x + ۵$، $f^{-۱}(x), fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید.

۲۷ - نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g, f-g$ و $f \cdot g$ را محاسبه کنید.



۲۸ - نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b \ (a \neq 0)$ باز هم یک تابع خطی است.

۲۹ - تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجهٔ فارنهایت را به درجهٔ سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

تابعی بنویسید که درجهٔ سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجهٔ فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

۳۰ - در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

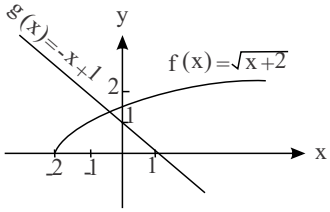
یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هریک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است. کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هریک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هریک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهد.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۳۱ - با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



الف

$(f+g)(۲)$

ب

$(f+g)(-۳)$

پ

$(fg)(\frac{۱}{۲})$

ت

$(fog)(-۴)$

ث

$\frac{f}{g}(۰)$

ج

$(gof)(-۱)$

۳۲- به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطهٔ تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید.

الف

$f(x) = (x+۵)^۲, x \geq -۵$

ب

$f(x) = -|x-۱| + ۱, x \geq ۲$

پ

$f(x) = (x-۳)^{۲}$

ت

$f(x) = \sqrt{x+۲} - ۳$

۳۳ - نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف

$f(x) = [x] + ۱, -۲ \leq x < ۳$

ب

$f(x) = [\frac{۱}{۲}x]\ ,\ -۴ \leq x < ۴$

۳۴ - کدام یک از معادلات زیر y را به‌صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

الف

$۳x + ۲y = ۱۲$

ب

$x = ۱$

پ

$y = -۲$

ت

$$f(x) = \begin{cases} x + ۳ & x \leq ۰ \\ x - ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

ث

$y^۲ = x^۲$

ج

$y = |x|$

۳۵- نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هریک را معلوم کنید.

الف

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\le ۰\end{cases}$$

ب

$$f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$$

پ

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\le x\le ۰\end{cases}$$

ت

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\ge ۰\end{cases}$$

۳۶- دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف

$$f(x) = \frac{x - ۱}{۲ - x}$$

ب

$$f(x) = \frac{-۳x}{x^۲ + ۱}$$

پ

$$f(x) = \frac{۲x + ۳}{x^۲ + x - ۱۲}$$

ت

$f(x) = \sqrt{۳x + ۱}$

ث

$f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳$

ج

$f(x) = \sqrt{۸ - x}$

۳۷ - کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف اگر $g(۴) = ۷$ و $f(۷) = ۵$ آنگاه $(fog)(۴) = ۳۵$.

ب اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$ آن‌گاه $(\frac{f}{g})(۲)=۱$

پ اگر $g(x)=۲x-۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$

ت برای هر دو تابع f و g داریم: $fog=gof$

ث اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^۲$

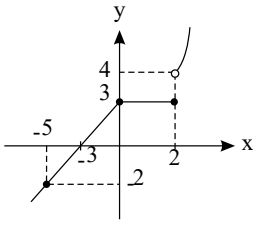
ج برای هر دو تابع f و g داریم: $fg=gf$

پاسخنامه تشریحی

۱ -

$$f(-۵)=-۲ \quad f(۲)=۳ \quad D_f=R \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+۳ & x<۰ \\ ۳ & ۰\le x\le ۲ \\ x^۲ & x>۲ \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -۳ \\ ۰ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -۵ \\ -۲ \end{vmatrix} \Rightarrow m=\frac{-۲-۰}{-۵+۳}=۱ \Rightarrow \begin{matrix} y-۰=۱(x+۳) \\ y=x+۳ \end{matrix}$$



۲ -

$$f(x)=\sqrt{x^۲+۵} \Rightarrow x^۲+۵\ge ۰ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{۴-x^۲} \Rightarrow ۴-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲\le ۴ \Rightarrow |x|\le ۲ \Rightarrow -۲\le x\le ۲ \Rightarrow D_g=[-۲,۲]$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}=\left\{x\in[-۲,۲] | \sqrt{۴-x^۲}\in R\right\}=[-۲,۲]$$

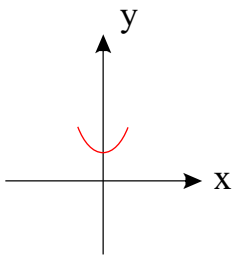
$$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}=\left\{x\in\mathbb{R} | \sqrt{x^۲+۵}\in[-۲,۲]\right\} \Rightarrow -۲\le x^۲+۵\le ۲$$

$$-۷\le x^۲\le -۳ \Rightarrow \text{غیرممکن} \Rightarrow D_{gof}=\varnothing \quad gof \text{ وجود ندارد}$$

$$fog(x)=f(\sqrt{۴-x^۲})=\sqrt{۴-x^۲+۵}=\sqrt{۹-x^۲}$$

۳ - کافی است نموداری رسم کنیم که در $x\le ۰$ در بالای محور xها باشد و برای $x>۰$ در ربع اول و بالاتر از نیمساز ناحیه‌ی اول رسم شود.

$$y=x^۲+a \quad (a>۱)$$



۴ -

$$f(x)=ax+b \qquad a\ne ۰$$

$$y=ax+b \quad \Rightarrow \quad \frac{y-b}{a}=x \quad \Rightarrow \quad f^{-۱}(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=f^{-۱}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-b}{a}=ax+b \quad \begin{cases} \frac{x}{a}=ax \to x=a^۲x \to a^۲=۱ \to a=\pm ۱ \\ -\frac{b}{a}=b \end{cases}$$

$$a=۱ \quad \Rightarrow \quad -b=b \quad \Rightarrow \quad b=۰ \quad \Rightarrow \quad (a=۱\ ,\ b=۰) \Rightarrow f(x)=x$$

$$a=-۱ \quad \Rightarrow \quad b=b \quad \Rightarrow \text{هر مقدار} \Rightarrow (a=-۱\ ,\ b \text{هر مقدار}) \Rightarrow f(x)=-x+b$$

۵ -

الف) $h(t)=۱۰۰-\frac{۴۹}{۱۰}t^۲$

$$h_{\max}=۱۰۰ \quad \Rightarrow \quad h=۱۰۰ \quad \Rightarrow \quad t=۰$$

$$h_{\min}=۰ \quad \Rightarrow \quad h=۰ \quad \Rightarrow \quad t^۲=\frac{۱۰۰۰}{۴۹} \quad \Rightarrow \quad t=\frac{۱۰\sqrt{۱۰}}{۷}$$

$$D_{h(t)}: \quad ۰\le t\le \frac{۱۰\sqrt{۱۰}}{۷} \quad \Rightarrow \quad D_{h(t)}=\left[۰,\frac{۱۰\sqrt{۱۰}}{۷}\right]$$

$$R_{h(t)}: \quad ۰\le h(t)\le ۱۰۰ \quad \Rightarrow \quad R_{h(t)}=[۰,۱۰۰]$$

ب) $۱۰۰-\frac{۴۹t_۱^۲}{۱۰}=۱۰۰-\frac{۴۹t_۲^۲}{۱۰} \quad \Rightarrow \quad t_۱^۲=t_۲^۲ \xrightarrow{t>۰} t_۱=t_۲$

یعنی امکان ندارد که سنگ در دو زمان در یک مکان قرارداشته باشد.

ج) $y = h(t) = ۱۰۰ - \frac{۴۹}{۱۰}t^۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{۴۹}{۱۰}t^۲ = ۱۰۰ - y$

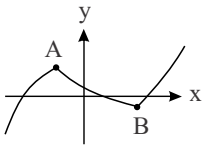
$\Rightarrow \quad t^۲ = \frac{۱۰}{۴۹}(۱۰۰ - y) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{۱}{۷}\sqrt{۱۰(۱۰۰ - y)}$

$\Rightarrow \quad f^{-۱}(h) = \frac{۱}{۷}\sqrt{۱۰(۱۰۰ - h)}$

د) نشان می‌دهد سنگ در چه زمانی به ارتفاع خاص می رسد و ارتفاع را به زمان تبدیل می کند.

۶ -

بی‌شمار تابع می‌توان رسم کرد که از نقاط A و B در شکل مقابل عبور کنند.

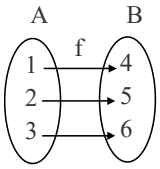


۷ - الف) نادرست، ممکن است دامنه دو تابع برابر و برد آنها نیز برابر باشند ولی دو تابع برابر نباشند مانند:

$f = \{(۱,۲),(۴,۵)\} \quad , \quad g = \{(۱,۵),(۴,۲)\}$

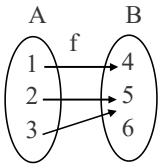
$D_f = D_g = \{۱,۴\} \quad , \quad R_f = R_g = \{۲,۵\} \Rightarrow f \neq g$

ب) درست، می‌تواند برد و هم دامنه تابع یکسان باشند، مانند:



برد تابع = هم دامنه = $B = \{۴,۵,۶\}$

پ) نادرست، برد تابع باید زیرمجموعه‌ای از هم دامنهٔ تابع باشد.



برد $R_f = \{۴,۵\}$، هم‌دامنه $B = \{۴,۵,۶\}, B \not\subset R_f, R_f \subset B$

ت) درست، می‌توان بی‌شمار تابع با ضابطه‌های متفاوت و دامنهٔ یکسان $[۰,۳]$ نوشت:

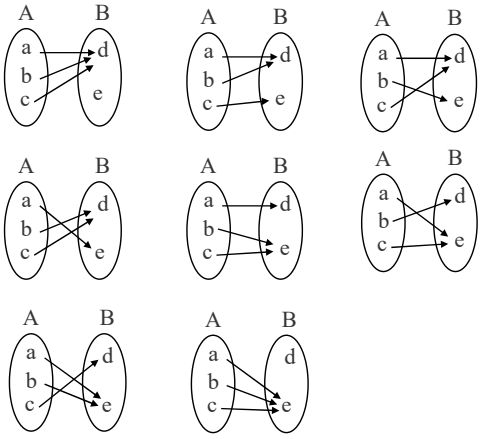
$f(x) = x \quad , \quad D_f = [۰,۳] \quad , \quad g(x) = ۲x^۲ - x \quad , \quad D_g = [۰,۳]$

۸ -

$f(x) = x^۲ - ۱ \qquad D_f = (۰,+\infty)$

بی‌شمار تابع با دامنهٔ مجموعه اعداد حقیقی مثبت وجود دارد. با تغییر ضابطهٔ تابع می‌توان بی‌شمار تابع نوشت.

۹ -



۱۰ - تابع‌های f و h برابرند زیرا:

$D_f = D_h = \mathbb{R}$

$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow f(x) = h(x)$

توابع g و s برابرند زیرا:

$D_g = D_S = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) = s(x) = ۵x$

تابع‌های r و t با تابع‌های g و s برابر نیستند، زیرا دامنهٔ آن‌ها با دامنه توابع g و s یکسان نمی‌باشند.

۱۱ -

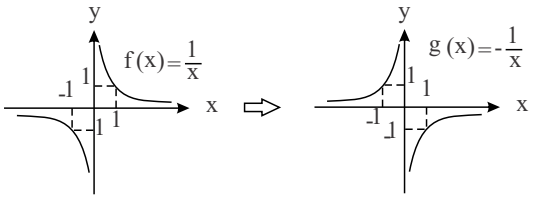
الف) $x = ۳۵cm \rightarrow M(۳۵) = ۲٫۸۹ \times ۳۵ + ۷۰٫۶۴ = ۱۷۱٫۷۹cm$

ب) $M(x) = ۱۸۵cm \Rightarrow ۲٫۸۹x + ۷۰٫۶۴ = ۱۸۵$

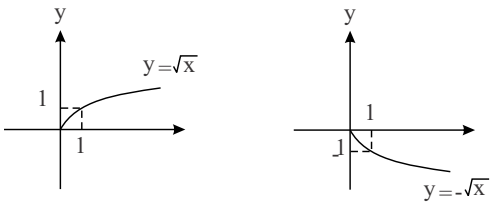
$\rightarrow ۲٫۸۹x = ۱۱۴٫۳۶ \Rightarrow x = ۳۹٫۵۷cm$

۱۲ - برای رسم نمودار $y = -f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است که نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

بنابراین برای رسم $g(x) = -\frac{۱}{x}$ باید نمودار $f(x) = \frac{۱}{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



۱۳ - برای رسم $y = -\sqrt{x}$ باید نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



۱۴ -

الف) $x = ۵۰ \Rightarrow f(۵۰) = \frac{۲۵۵ \times ۵۰}{۱۰۰ - ۵۰} = ۲۵۵$

ب) $۰ \le x < ۱۰۰ \Rightarrow D_f = [۰, ۱۰۰)$

۱۵ -

الف) $t = ۵ \rightarrow n(۵) = \frac{۹۵۰۰ \times ۵ - ۲۰۰۰}{۴ + ۵} = \frac{۴۵۵۰۰}{۹} = ۵۰۵۵٫۵$

ب) $n(t) = ۵۵۰۰ \Rightarrow \frac{۹۵۰۰t - ۲۰۰۰}{۴ + t} = ۵۵۰۰$

$\Rightarrow ۹۵۰۰t - ۲۰۰۰ = ۲۲۰۰۰ + ۵۵۰۰t \Rightarrow ۴۰۰۰t = ۲۴۰۰۰ \Rightarrow t = ۶$

۱۶ - تابعی که به هر شخصی محل تولد او را نسبت می‌دهد یک به یک نیست، زیرا چندین نفر وجود دارند که محل تولد آنها یکسان است.

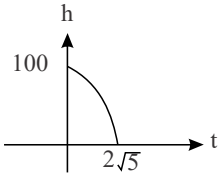
۱۷ - خیر. تابع $f(x) = \frac{۲}{۵}$ تابع ثابت بوده و یک به یک نمی‌باشد. پس وارون‌پذیر هم نیست.

۱۸ - الف) برد تابع h همان ارتفاع ۱۰۰ متر است یعنی بازهٔ بسته $[۰, ۱۰۰]$ و برای یافتن دامنه تابع h باید مدت زمان رسیدن به زمین را بیابیم یعنی باید معادله $h = ۰$ را حل کنیم.

$h = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۵t^۲ \Rightarrow ۵t^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow t^۲ = \frac{۱۰۰}{۵} = ۲۰ \Rightarrow t = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$

$\Rightarrow ۰ \le t \le ۲\sqrt{۵} \Rightarrow D_h = \left[۰, ۲\sqrt{۵}\right], R_h = [۰, ۱۰۰]$

ب) نمودار تابع h بر حسب t به صورت مقابل است. از نمودار واضح است که تابع h تابعی یک به یک است.

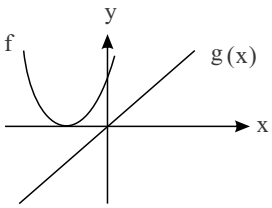


پ)

$h = ۱۰۰ - ۵t^۲ \Rightarrow ۵t^۲ = ۱۰۰ - h \Rightarrow t^۲ = ۲۰ - \frac{۱}{۵}h$

$$\Rightarrow t=\sqrt{۲۰-\frac{۱}{۵}h}\Rightarrow h^{-۱}(t)=\sqrt{۲۰-\frac{۱}{۵}t}\quad ۰\le t\le ۱۰۰$$

۱۹ - تابع f وارون‌پذیر نباشد یعنی یک به یک نباشد، بنابراین خطی افقی موازی محور xها وجود دارد که نمودار تابع f را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. با فرض $x<f(x),g(x)=x$ یعنی $g(x)<f(x)$، پس باید نمودار f بالای نیمساز ربع اول و سوم $(g(x)=x)$ قرار گیرد.



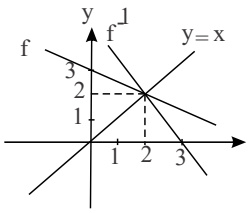
- ۲۰

$$f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳\Rightarrow\begin{vmatrix}x=۰ & x=۲\\ y=۳ & y=۲\end{vmatrix}$$

$$f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳\Rightarrow -\frac{۱}{۲}x=y-۳$$

$$x=-۲y+۶\Rightarrow y=-۲x+۶$$

$$f^{-۱}(x)=-۲x+۶$$



- ۲۱

$$f(x)=۴x, D_f=\mathbb{R}, g(x)=۲-x, D_g=\mathbb{R}$$

$$D_f\cap D_g=\mathbb{R}, g(x)=۰\Rightarrow ۲-x=۰\Rightarrow x=۲$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{۲\}, (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۴x}{۲-x}$$

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}, (f-g)(x)=f(x)-g(x)=۴x-(۲-x)=۵x-۲$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,|(۲-x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲-x)=۴(۲-x)=۸-۴x$$

- ۲۲

$$f(x)=\frac{۱}{x-۳}, x\neq ۳\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$$

$$g(x)=\frac{۴}{x}, x\neq ۰\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|g(x)\in D_f\}=\{x\neq ۰\,|g(x)\neq ۳\}$$

$$g(x)\neq ۳\Rightarrow\frac{۴}{x}\neq ۳\Rightarrow x\neq\frac{۴}{۳}\Rightarrow D_{fog}=\mathbb{R}-\left\{۰,\frac{۴}{۳}\right\}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{۴}{x})=\frac{۱}{\frac{۴}{x}-۳}=\frac{۱}{\frac{۴-۳x}{x}}=\frac{x}{۴-۳x}$$

- ۲۳

$$D_g=\mathbb{N}, D_f=\{۱,۲,۳,۴\}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{۱,۲,۳,۴\}$$

$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+۲=۴, (f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۳+۴=۷$$

$$(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۵+۶=۱۱, (f+g)(۴)=f(۴)+g(۴)=۷+۸=۱۵$$

$$f+g=\{(۱,۴),(۲,۷),(۳,۱۱),(۴,۱۵)\}$$

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(۲)=۲\times ۲=۴, (gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۶$$

$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۵)=۱۰, (gof)(۴)=g(f(۴))=g(۷)=۱۴$$

$gof = \{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۱۰),(۴,۱۴)\}$

۲۴ -

$$f = \left\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\right\}, D_f = \left\{-۴,-۱,۰,\frac{۵}{۲},۳\right\}$$

$$g = \{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}, D_g = \{-۴,-۲,۰,۳,۵,۹\}$$

$$D_f \cap D_g = \{-۴,۰,۳\}$$

$$f+g = \{(-۴,۱۳+(-۷)),(۰,۵+(-۳)),(۳,-۵+۰)\} = \{(-۴,۶),(۰,۲),(۳,-۵)\}$$

$$f-g = \{(-۴,۱۳-(-۷)),(۰,۵-(-۳)),(۳,-۵-۰)\} = \{(-۴,۲۰),(۰,۸),(۳,-۵)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(-۴,\frac{۱۳}{-۷}),(۰,\frac{۵}{-۳}),\underbrace{(۳,\frac{-۵}{۰})}_{\text{تعریف نشده}}\} = \left\{(-۴,-\frac{۱۳}{۷}),(۰,-\frac{۵}{۳})\right\}$$

۲۵ - زمانی می‌توان یک عبارت را از صورت و مخرج کسر ساده کرد که آن عبارت مخالف صفر باشد، یعنی در این سوال زمانی می‌توان $x+۳$ را از صورت و مخرج کسر ساده کرد که $x+۳ \neq ۰$ پس: $x \neq -۳$ یعنی:

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-۳\}$$

۲۶ -

$$f(x) = ۲x+۵ \Rightarrow y = ۲x+۵ \Rightarrow ۲x = y-۵ \Rightarrow x = \frac{y-۵}{۲} \Rightarrow y = f^{-۱}(x) = \frac{x-۵}{۲}$$

$$(fof^{-۱})(x) = f(f^{-۱}(x)) = f(\frac{x-۵}{۲}) = ۲(\frac{x-۵}{۲})+۵ = x-۵+۵ = x$$

$$(f^{-۱}of)(x) = f^{-۱}(f(x)) = f^{-۱}(۲x+۵) = \frac{۲x+۵-۵}{۲} = \frac{۲x}{۲} = x$$

۲۷ - تابع f تابع خطی است که از نقاط $(۰,۲)$ و $(۵,۰)$ می‌گذرد پس داریم:

$$m = \frac{۲-۰}{۰-۵} = -\frac{۲}{۵} \Rightarrow y-۲ = -\frac{۲}{۵}(x-۰) \Rightarrow y = f(x) = -\frac{۲}{۵}x+۲, D_f = \mathbb{R}$$

تابع g تابع خطی است که از نقاط $(-۳,۰)$ و $(۲,۰)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$m = \frac{-۳-۰}{۰-۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y-(-۳) = \frac{۳}{۲}(x-۰) \Rightarrow y = g(x) = \frac{۳}{۲}x-۳, D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x)+g(x) = -\frac{۲}{۵}x+۲+\frac{۳}{۲}x-۳$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \frac{۱۱}{۱۰}x-۱$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = -\frac{۲}{۵}x+۲-\frac{۳}{۲}x+۳ = -\frac{۱۹}{۱۰}x+۵, D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = (-\frac{۲}{۵}x+۲)(\frac{۳}{۲}x-۳) = -\frac{۳}{۵}x^{۲}+\frac{۶}{۵}x+۳x-۶$$

$$(f\cdot g)(x) = -\frac{۳}{۵}x^{۲}+\frac{۲۱}{۵}x-۶, D_{fg} = \mathbb{R}$$

۲۸ -

$$y = ax+b \Rightarrow ax = y-b \xrightarrow{a\neq ۰} x = \frac{۱}{a}y-\frac{b}{a}$$

$\Rightarrow y = \frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$ تابع وارون

با فرض $m = \frac{۱}{a}$ و $n = -\frac{b}{a}$ داریم:

$y = mx+n \Rightarrow$ تابع خطی است.

۲۹ - باید تابع وارون تابع f را به‌دست آوریم.

$$f(x) = \frac{۵}{۹}(x-۳۲) \Rightarrow x-۳۲ = \frac{۹}{۵}y \Rightarrow x = \frac{۹}{۵}y+۳۲ \Rightarrow y = f^{-۱}(x) = \frac{۹}{۵}x+۳۲$$

۳۰ - الف) تابع‌های تعداد نسخه‌های این دو کتاب را با f و g نمایش می‌دهیم.

$f(x) = ۱۰ + (x - ۱) \times ۷ = ۷x + ۳, g(x) = ۲۰ + (x - ۱) \times ۹ = ۹x + ۱۱$

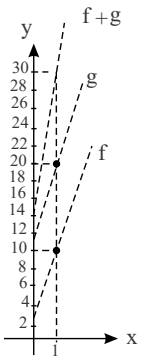
$D_f = D_g = \mathbb{N}$

ب)

$D_f \cap D_g = \mathbb{N} \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = ۷x + ۳ + ۹x + ۱۱ = ۱۶x + ۱۴$

ت)

$f(x) = ۷x + ۳, g(x) = ۹x + ۱۱, (f + g)(x) = ۱۶x + ۱۴$



۳۱ -

الف

$f(x) = \sqrt{x + ۲}, D_f = [-۲, +\infty)$

$g(x) = -x + ۱, D_g = \mathbb{R}$

$D_f \cap D_g = [-۲, +\infty) \Rightarrow D_{f+g} = [-۲, +\infty)$

$(f + g)(۲) = f(۲) + g(۲) = \sqrt{۴} + (-۲ + ۱) = ۲ + (-۱) = ۱$

ب

$-۳ \notin [-۲, +\infty) \Rightarrow (f + g)(-۳) =$ تعریف نشده

پ

$$(fg)(\frac{۱}{۲}) = f(\frac{۱}{۲})g(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\frac{۱}{۲} + ۲} \times (-\frac{۱}{۲} + ۱) = \sqrt{\frac{۵}{۲}} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۲}}$$

ت

$(fog)(-۴) = f(g(-۴)) = f(۵) = \sqrt{۵ + ۲} = \sqrt{۷}$

ث

$(\frac{f}{g})(۰) = \frac{f(۰)}{g(۰)} = \frac{\sqrt{۲}}{۱} = \sqrt{۲}$

ج

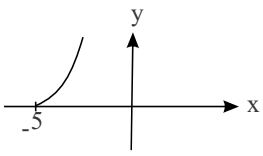
$(gof)(-۱) = g(f(-۱)) = g(\sqrt{-۱ + ۲}) = g(۱) = -۱ + ۱ = ۰$

۳۲ -

الف

تابع وارون‌پذیر است زیرا یک‌به‌یک است.

$f(x)=(x+۵)^۲, x\geq -۵$

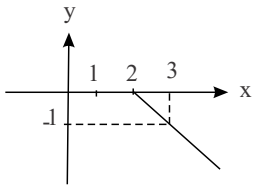


$y=(x+۵)^۲ \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{(x+۵)^۲} \Rightarrow |x+۵|=\sqrt{y} \xrightarrow{x\geq -۵} x+۵=\sqrt{y}$

$x=\sqrt{y}-۵ \Rightarrow y=\sqrt{x}-۵ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x}-۵$

ب

$f(x)=-|x-۱|+۱, x\geq ۲ \Rightarrow x-۱\geq ۱ \Rightarrow |x-۱|=x-۱$



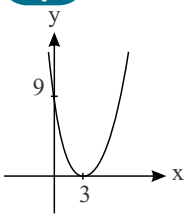
$f(x)=-(x-۱)+۱=-x+۲, x\geq ۲ \quad \begin{vmatrix} x=۲ \\ y=۰ \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x=۳ \\ y=-۱ \end{vmatrix}$

$x\geq ۲ \Rightarrow -x\leq -۲ \Rightarrow -x+۲\leq ۰ \Rightarrow y\leq ۰$

$y=-x+۲ \Rightarrow x=۲-y \Rightarrow y=f^{-۱}(x)=۲-x, x\leq ۰$

پ

$f(x)=(x-۳)^۲$ تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نمی‌باشد.

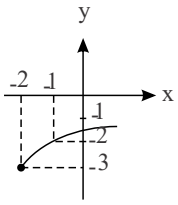


ت

$f(x)=\sqrt{x+۲}-۳, x+۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۲ \Rightarrow D_f=[-۲,+\infty)$

$\sqrt{x+۲}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x+۲}-۳\geq -۳ \Rightarrow f(x)\geq -۳ \Rightarrow R_f=[-۳,+\infty)$

تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.



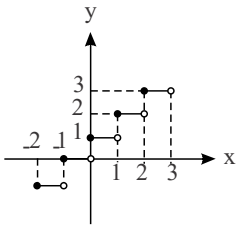
$y=\sqrt{x+۲}-۳ \Rightarrow \sqrt{x+۲}=y+۳ \Rightarrow x+۲=(y+۳)^۲=y^۲+۶y+۹$

$\Rightarrow x=y^۲+۶y+۷ \Rightarrow y=f^{-۱}(x)=x^۲+۶x+۷, D_{f^{-۱}}=[-۳,+\infty)$

- ۳۳

الف

$f(x)=[x]+1 \quad -2 \le x < 3$



$-2 \le x < -1 \Rightarrow f(x) = -2+1 = -1$

$-1 \le x < 0 \Rightarrow f(x) = -1+1 = 0$

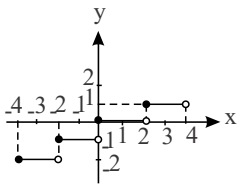
$0 \le x < 1 \Rightarrow f(x) = 0+1 = 1$

$1 \le x < 2 \Rightarrow f(x) = 1+1 = 2$

$2 \le x < 3 \Rightarrow f(x) = 2+1 = 3$

ب

$f(x)=[\frac{1}{2}x] \quad -4 \le x < 4 \Rightarrow -2 \le \frac{1}{2}x < 2$



$-2 \le \frac{1}{2}x < -1 \Rightarrow f(x) = -2, -4 \le x < -2$

$-1 \le \frac{1}{2}x < 0 \Rightarrow f(x) = -1, -2 \le x < 0$

$0 \le \frac{1}{2}x < 1 \Rightarrow f(x) = 0, 0 \le x < 2$

$1 \le \frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow f(x) = 1, 2 \le x < 4$

۳۴ -

الف

$3x+2y=12 \Rightarrow 2y = 12-3x \Rightarrow y = \frac{12-3x}{2} \Rightarrow$ **تابع است.**

ب

$x=1 \Rightarrow (1,0),(1,-2),(1,4),(1,\sqrt{5}),\cdots \Rightarrow$ **تابع نیست.**

۱ $x=1$ **یعنی تمام زوج‌مرتب‌هایی که مؤلفهٔ اول آنها یک می‌باشد، پس تابع نیست.**

پ

$y=-2 \Rightarrow (4,-2),(0,-2),(5,-2),(\sqrt{3},-2),\cdots$ **تابع است.**

۲− $y=-2$ **خطی افقی موازی محور** x**ها است، پس تابع می‌باشد.**

ت

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x \le 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=3 \\ x-1 & x \ge 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

برای $x=0$**، دو مقدار برای** y **به‌دست آمده است، پس تابع نمی‌باشد.**

ث

$y^2=x^2 \Rightarrow \sqrt{y^2}=\sqrt{x^2} \Rightarrow |y|=|x| \Rightarrow y=\pm x \Rightarrow$ **تابع نیست.**

مثال نقض : $x=1 \Rightarrow y^2=1^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

ج

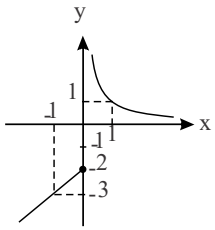
$y=|x|$

در رابطهٔ $y=|x|$ **به‌ازای هر** x **فقط یک مقدار برای** y **به‌دست می‌آید، پس تابع است.**

۳۵ -

الف

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\le ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|}\hline ۰ & -۱\\ \hline -۲ & -۳\\ \hline\end{array}$$

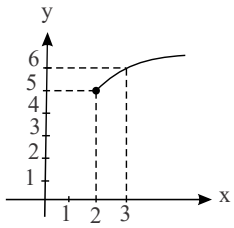


$$D_f=\mathbb{R}$$
$$R_f=(-\infty,-۲]\cup(۰,+\infty)$$

ب

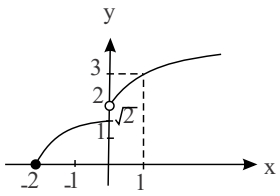
$$f(x)=\sqrt{x-۲}+۵, x-۲\ge ۰\Rightarrow x\ge ۲\Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$$

$$\sqrt{x-۲}\ge ۰\Rightarrow \sqrt{x-۲}+۵\ge ۵\to f(x)\ge ۵\Rightarrow R_f=[۵,+\infty)$$



پ

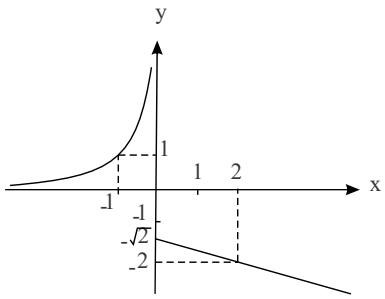
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\le x\le ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|}\hline -۲ & ۰\\ \hline ۰ & \sqrt{۲}\\ \hline\end{array}$$



$$D_f=[-۲,+\infty)$$
$$R_f=\left[۰,\sqrt{۲}\right]\cup(۲,+\infty)$$

ت

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\ge ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{|c|c|}\hline ۰ & ۲\\ \hline -\sqrt{۲} & -۲\\ \hline\end{array}$$



$$D_f=\mathbb{R}$$
$$R_f=(-\infty,-\sqrt{۲}]\cup(۰,+\infty)$$

۳۶ -

الف

$$f(x)=\frac{x-۱}{۲-x}, ۲-x=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

ب

$$f(x)=\frac{-۳x}{x^۲+۱}, x^۲+۱=۰\Rightarrow x^۲=-۱\ \text{ریشه ندارد}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

پ

$$f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}, x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow (x-۳)(x+۴)=۰\Rightarrow x=۳\ ,\ x=-۴$$

ت

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳,-۴\}$$

$$f(x)=\sqrt{۳x+۱}, ۳x+۱\ge ۰\Rightarrow x\ge -\frac{۱}{۳}\Rightarrow D_f=[-\frac{۱}{۳},+\infty)$$

ث

$$f(x)=۲\sqrt{x}-۳, x\ge ۰\Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$$

ج

$f(x)=\sqrt{۸-x}, ۸-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۸ \Rightarrow D_f=(-\infty, ۸]$

- ۳۷

الف نادرست: $(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۷)=۵$

ب درست $(\frac{f}{g})(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۲+۴}{۳\times ۲}=\frac{۶}{۶}=۱$

پ درست $(fog)(۵)=f(g(۵))=f(۱۰-۱)=f(۹)=\sqrt{۹}=۳=g(۲)$

ت نادرست: ترکیب توابع خاصیت جابجایی ندارد یعنی: $fog\neq gof$

ث نادرست $(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x^۲-۴})=(\sqrt{x^۲-۴})^۲-۴=x^۲-۸$

ج درست $D_{f\cdot g}=D_{g\cdot f}=D_f\cap D_g, (f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=g(x)f(x)=(g\cdot f)(x)$