نمونه سوال: آشنایی با تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - چند تابع خطی با دامنهٔ $[-۲,۲]$ و برد $[۱,۴]$ می‌توان رسم کرد؟

۲ - مساحت بین نمودار تابع $f(x)=۳[x]+۱$ و محور xها در بازهٔ $[۰,۲)$ چقدر است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۳ - حاصل $[(-\frac{۱۳}{۵۱})^{۵}]+[(\frac{۳۷}{۴۱})^{۳}]$ چقدر است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

۴ - دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x^{۲}+۶x+a}$ برابر $\mathbb{R}-\{b\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۵ - دو تابع $f(x)=\begin{cases} ۱ & x>a \\ b & x<c \end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{|x-۲|}{x-۲}$ برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۶- کدام دو تابع داده شده مساوی‌اند؟

۷- اگر $\left[\frac{x-3}{2}\right]=1$ باشد، حاصل $\left[\frac{x+1}{2}\right]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۸- برد تابع $y=[x-2]$ در بازهٔ $[-1,4)$ دارای چند مقدار مثبت است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۹- اگر دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{2x+1}$ به‌صورت $D_f=[a,+\infty)$ و $g(x)=\left[-\frac{3x}{2}\right]$ باشد، حاصل $g(2a)$ چقدر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱۰- نمودار تابع $y=x([-x]+[x])$ با دامنهٔ $-1\le x\le 1$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱۱- اگر دو تابع $g(x)=3x-1$ و $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x^2-1}{3x+1}\ , & x\neq \dfrac{-1}{3}\\ k+x\ , & x=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ مساوی باشند، مقدار k کدام است؟

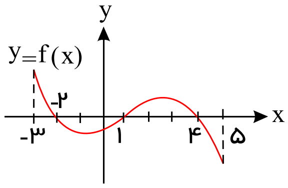
۱۲- نمودار تابع $g(x)=\left[\dfrac{2+x}{2}\right]$ در بازهٔ $[0,6)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱۳- اگر $\left[\sqrt{2}-3\right]+\left[3\sqrt{2}-4\right]+\left[2\sqrt{2}-5\right]=3a$، حاصل $[2a-1]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱۴- با فرض $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^2+ax+b$ به ازای تمامی مقادیر حقیقی x داریم $gof(x)=2$ مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۵- به ازای کدام مقدار k، رابطهی $f=\{(-1,3k)\,,\,(2+k\,,\,5)\,,\,(-1\,,\,-9)\,,\,(6\,,\,k)\}$ یک تابع است؟

۱۶ - شکل مقابل نمودار تابع $y = f\left(x\right)$ است. دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf\left(x\right)}$ کدام است؟



۱۷ - اگر $f(x) = ۲x - [x]$ و $g(x) = ۱ - ۲\sqrt{x}$، آن‌گاه $(fog)(۲)$ کدام است؟([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱۸ - مجموعه جواب معادلهٔ $[x + ۳] + [x - ۱] = ۱۰$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

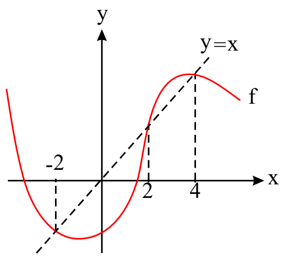
۱۹ - در کدام گزینه، توابع f و g برابرند؟

۲۰ - اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۱}{\sqrt{۲x^۲ - ۶x + a}}$ به‌صورت $x \in (-\infty, ۱) \cup (b, +\infty)$ باشد، در این صورت $a \times b$ کدام است؟ $(b \geq ۱)$

۲۱ - اگر $x^۲ + x < ۰$ باشد، مقدار $[-x] + \left[-x^۲\right] + \left[-x^۳\right]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

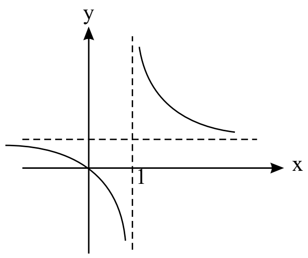
۲۲- اگر دو تابع $f(x)=\dfrac{x^3+2x}{ax^2+bx+c}$ و $g(x)=\dfrac{x}{2}$ برابر باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۲۳- اگر شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)-x}$ کدام است؟



۲۴- اگر $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+12}-2x}$، آنگاه حاصل $f(-3)$ کدام است؟

۲۵- اگر نمودار تابع گویای $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ به‌صورت زیر باشد، مقدار $2b-a$ کدام است؟

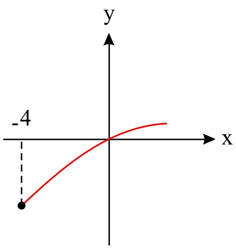


۲۶- به ازای چه مقادیری از m، دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+۱}{(m-۱)x^۲+(۲m-۱)x-۱}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است؟

۲۷- اگر مجموعه جواب معادلهٔ $[x+\frac{۱}{۲}]+[x+\frac{۳}{۲}]=۳$ بازهٔ $[a,b)$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۲۸- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{۲x^۲+ax+b}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{۳\}$ باشد، $a-b$ کدام است؟

۲۹- اگر نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه $f(b^۲+۲a)$ کدام است؟

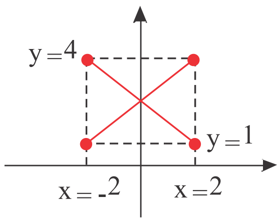


۳۰- در کدام گزینه دو تابع f و g با هم مساوی‌اند؟

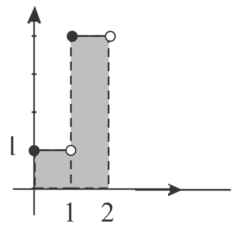
۳۱- اگر $f(x+3)=x+\frac{5}{x}$ ، نمودار تابع $y=3-f(2x)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ می‌توان برای حل سوال از نمودار استفاده کرد. با توجه به نمودار دو تابع خطی می توان رسم کرد که ویژگی موردنظر سوال را داشته باشد.



۲ - گزینه ۱ برای محاسبهٔ مساحت باید تابع را رسم نمود.



$$۰ \le x < ۱ \to y = ۳(۰) + ۱ = ۱$$

$$۱ \le x < ۲ \to y = ۳(۱) + ۱ = ۴$$

با توجه به نمودار دو مستطیل داریم:

$$S = ۱ + ۴ = ۵$$

۳ - گزینه ۳ باید محدودهٔ هر عدد را مشخص نماییم تا مقدار نهائی جزء صحیح را مشخص کنیم. اعداد بین صفر تا یک زمانی که توان می‌رسد هم بین صفر تا یک هستند.

$$۰ < \frac{۳۷}{۴۱} < ۱ \xrightarrow{()^۳} ۰ < \left(\frac{۳۷}{۴۱}\right)^۳ < ۱ \to \left[\left(\frac{۳۷}{۴۱}\right)^۳\right] = ۰$$

$$-۱ < -\frac{۱۳}{۵۱} < ۰ \xrightarrow{()^۵} -۱ < \left(-\frac{۱۳}{۵۱}\right)^۵ < ۰ \to \left[\left(-\frac{۱۳}{۵۱}\right)^۵\right] = -۱$$

مقدار نهائی برابر است با: -۱

$$۰ + (-۱) = -۱$$

۴ - گزینه ۳ با توجه به دامنهٔ توابع گویا که برابر $\mathbb{R} - \{$ریشه مخرج$\}$ می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت مخرج این تابع فقط یک ریشه خواهد داشت و $\Delta = ۰$ می‌باشد.

$$x^۲ + ۶x + a = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} \Delta = (۶)^۲ - ۴(a) = ۰$$

$$۳۶ - ۴a = ۰ \to \boxed{a = ۹} \to x^۲ + ۶x + ۹ = ۰ \to (x + ۳)^۲ = ۰ \to \boxed{x = -۳}$$

پس دامنه به‌صورت $D_f = \mathbb{R} - \{-۳\}$ می‌باشد و $\boxed{b = -۳} \leftarrow a + b = ۹ - ۳ = ۶$

۵ - گزینه ۳ نکته: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در صورتی برابرند که:

۱) دامنه‌شان برابر باشد $(D_f = D_g)$

۲) به‌ازای هر x از این دامنهٔ مشترک، داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

$$\text{نکته}: \quad |x - a| = \begin{cases} x - a & x \ge a \\ -(x - a) & x < a \end{cases}$$

تابع $g(x)$ را می‌توان به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای نوشت:

$$g(x) = \frac{|x - ۲|}{x - ۲} = \begin{cases} \dfrac{x - ۲}{x - ۲} = ۱ & x > ۲ \\[2ex] -\dfrac{x - ۲}{x - ۲} = -۱ & x < ۲ \end{cases}$$

طبق فرض تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ & x > a \\ b & x < c \end{cases}$ با $g(x)$ برابر است. از مقایسهٔ این دو تابع نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a = ۲ \\ b = -۱ \Rightarrow a + b + c = ۲ + (-۱) + ۲ = ۳ \\ c = ۲ \end{cases}$$

۶ - گزینه ۳ شرط آنکه دو تابع مساوی باشند، آن است که:

۱ - دامنهٔ دو تابع یکسان باشد.

۲ - برای هر x از دامنه، مقادیر دو تابع با هم برابر باشند.

این دو شرط باید هر دو برقرار باشند، یعنی اگر یکی برقرار نباشد، دو تابع مساوی نیستند.

$1) D_f = D_g = R \;,\; f(-2) = 2 \;,\; g(-2) = -2 \Rightarrow f(-2) \neq g(-2)$

$2) D_f = D_g = R - \{0\} \;,\; f(-\frac{1}{2}) = 1 \;,\; g(-\frac{1}{2}) = -1 \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) \neq g(-\frac{1}{2})$

$4) D_f = R \;,\; D_g = R - \{0\} \Rightarrow D_f \neq D_g$

$3) D_f = R \;,\; |x| + 1 = 0 \Rightarrow |x| = -1$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow D_g = R \Rightarrow D_f = D_g = R$

$$f(x) = |x| - 1 \;,\; g(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1} \xrightarrow{x^2 = |x|^2} g(x) = \frac{|x|^2 - 1}{|x| + 1} = \frac{(|x| - 1)(|x| + 1)}{|x| + 1}$$

$$\Rightarrow g(x) = |x| - 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$$

۷ - گزینه ۳ قدم اول حل سوال تعیین محدودهٔ x می‌باشد. با توجه به اینکه جواب جزء صحیح برابر یک شده است، عبارت درون جزء صحیح بین ۱ تا ۲ قرار داشته باشد:

$$\left[\frac{x-3}{2}\right] = 1 \rightarrow 1 \leq \frac{x-3}{2} < 2 \xrightarrow{\times 2} 2 \leq x - 3 < 4 \xrightarrow{+4}$$

$$6 \leq x + 1 < 8 \xrightarrow{\div 2} 3 \leq \frac{x+1}{2} < 4 \xrightarrow{[\;]} \left[\frac{x+1}{2}\right] = 3$$

۸ - گزینه ۱

طبق خواص جزء صحیح می‌توان عدد صحیح را از داخل جزء صحیح خارج نمود:

$$y = [x - 2] = [x] - 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -3$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 0$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow y = 1$$

بنابراین برد تابع در بازهٔ داده شده شامل یک مقدار مثبت است.

۹ - گزینه ۳ ابتدا باید مقدار a را تعیین نماییم. برای تعیین مقدار a دامنه تابع f را بررسی می‌نماییم.

$$f(x) = \sqrt{2x + 1} \rightarrow 2x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty) = [a, +\infty) \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = \left[-\frac{3}{2}x\right] \rightarrow g(2a) = g(2(-\frac{1}{2})) = g(-1) = \left[-\frac{3}{2}(-1)\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$

۱۰ - گزینه ۴ روش اول: عدد گذاری:

$$x = 1 \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در ضابطه تابع}} y = 1([-1] + [1]) = 1 \times \underbrace{(-1 + 1)}_{0} = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$x = -1 \Rightarrow y = 0$$

یعنی تابع در سه نقطهٔ دلخواهی که دادیم مقداری برابر صفر دارد که این سه نقطه فقط در نمودار گزینهٔ ۴ صدق می‌کند.

روش دوم:

$$\text{نکته}: y = [x] + [-x] = \begin{cases} -1; x \notin \mathbb{Z} \\ 0; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \xrightarrow[x \notin \mathbb{Z}]{x \neq 0} y = -x \\ x = -1, 0, 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

تابع رسم شده در گزینهٔ ۴ در نقاط ۱، ۰ و $x = -1$ مقداری برابر صفر دارد و در $-1 < x < 1$ برابر $y = -x$ است.

۱۱ - گزینه ۳ دو تابع زمانی با هم برابرند که اولاً دامنهٔ یکسان داشته باشند و ثانیاً ساده شدهٔ ضابطهٔ آنها یکسان باشد. با توجه به متن سوال دامنهٔ دو تابع برابر است:

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

حال ساده شدهٔ ضابطه‌ها را بررسی می‌نماییم:

$$x \neq -\frac{1}{3} \rightarrow f(x) = \frac{9x^2 - 1}{3x + 1} = \frac{(3x + 1)(3x - 1)}{3x + 1} \xlongequal{x \neq -\frac{1}{3} \text{ با فرض}} 3x - 1$$

پس به‌ازای $x \neq -\frac{۱}{۳}$ دو تابع برابرند.

$$x = -\frac{۱}{۳} \to g(-\frac{۱}{۳}) = ۳(-\frac{۱}{۳}) - ۱ = -۲$$

$$x = -\frac{۱}{۳} \to f(-\frac{۱}{۳}) = k - \frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{f=g} k - \frac{۱}{۳} = -۲ \to k = -۲ + \frac{۱}{۳} = -\frac{۵}{۳}$$

۱۲ ـ گزینه ۳

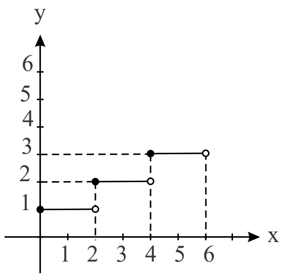
$$y = \left[\frac{۲+x}{۲}\right] = \left[۱ + \frac{x}{۲}\right] = \left[\frac{x}{۲}\right] + ۱$$

$$۰ \le \frac{x}{۲} < ۱ \Rightarrow \begin{cases} y = ۰ + ۱ = ۱ \\ ۰ \le x < ۲ \end{cases}$$

$$۱ \le \frac{x}{۲} < ۲ \Rightarrow \begin{cases} y = ۱ + ۱ = ۲ \\ ۲ \le x < ۴ \end{cases}$$

$$۲ \le \frac{x}{۲} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} y = ۲ + ۱ = ۳ \\ ۴ \le x < ۶ \end{cases}$$

اکنون پاره‌خط‌های حاصل را رسم می‌کنیم:



۱۳ ـ گزینه ۱ برای حل باید محدودهٔ عبارت‌های داخل جزء صحیح را تعیین نماییم. $\sqrt{۲}$ حدوداً ۱٫۴ را می‌باشد، پس:

$$-۲ < \sqrt{۲} - ۳ < -۱$$

$$۰ < ۳\sqrt{۲} - ۴ < ۱$$

$$-۳ < ۲\sqrt{۲} - ۵ < -۲$$

$$۳a = \left[\sqrt{۲} - ۳\right] + \left[۳\sqrt{۲} - ۴\right] + \left[۲\sqrt{۲} - ۵\right] = -۲ + ۰ + (-۳)$$

$$۳a = -۵ \to \boxed{a = -\frac{۵}{۳}}$$

$$[۲a - ۱] = \left[-\frac{۱۰}{۳} - ۱\right] = [-۴٫۳] = -۵$$

۱۴ ـ گزینه ۴

برای تابع $f(x)$ داریم:
$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \not\in Z \end{cases}$$

با توجه به این‌که در صورت سوال ذکر شده تابع $gof(x) = g(f(x))$ به ازای تمام مقادیر x برابر ۲ است. پس مقادیر ورودی را به دو قسمت $x \in Z$ و $x \notin Z$ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} x \in Z : g(f(x)) = ۲ \ \Rightarrow \ g(۰) = ۲ \ \to \ b = ۲ \ (*) \\ x \notin Z : g(f(x)) = ۲ \ \Rightarrow \ g(-۱) = ۲ \ \Rightarrow \ ۱ - a + b = ۲ \ \xrightarrow{(*)} \ a = ۱ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۳$$

۱۵ ـ گزینه ۴ از آن‌جا که $(-۱\,,\,۳k)$ ، $(-۱\,,\,-۹)$ هر دو عضو f هستند، باتوجه به تعریف تابع باید: $۳k = -۹$ و در نتیجه $k = -۳$. اما با این مقدار k نیز رابطهٔ f تابع نخواهد بود، زیرا در این صورت زوج مرتب $(۲+k\,,\,۵)$ به‌صورت $(-۱\,,\,۵)$ درخواهد آمد و خواهیم داشت:

$$f = \{(-۱\,,\,-۹)\,,\,(-۱\,,\,۵)\,,\,(۶\,,\,-۳)\}$$

۱۶ ـ گزینه ۱ با توجه به نمودار $f(x)$ و دامنهٔ تابع‌های رادیکالی داریم:

$$\sqrt{xf(x)} : \text{دامنه} \to xf(x) \ge ۰ \Rightarrow xy \ge ۰ \xrightarrow{x,y \text{ باید هم‌علامت باشند}} [-۲, ۰] \cup [۱, ۴]$$

۱۷ ـ گزینه ۲

$$f(g(۲)) = f(۱ - ۲\sqrt{۲}) = ۲(۱ - ۲\sqrt{۲}) - [۱ - ۲\sqrt{۲}]$$
$$= ۲ - ۴\sqrt{۲} - [-۱٫۸] = ۲ - ۴\sqrt{۲} - (-۲) = ۴ - ۴\sqrt{۲} = ۴(۱ - \sqrt{۲})$$

دقت کنید که: $1-2\sqrt{2}\simeq 1-2(1.4)=1-2.8=-1.8$

۱۸ - گزینه ۲ برای حل می‌توان از خاصیت $[x+k]=[x]+\overset{\overset{\mathbb{Z}}{\uparrow}}{k}$ استفاده کرد.

$$[x+3]+[x-1]=10\to[x]+3+[x]-1=10\to$$
$$2[x]+2=10\to 2[x]=8\to[x]=4\to 4\le x<5$$

۱۹ - گزینه ۲ نکته: دو تابع f و g را برابر نامیم، هرگاه:

الف) دامنهٔ تابع f و دامنهٔ تابع g با هم برابر باشند.

ب) به‌ازای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$.

با استفاده از نکتهٔ بالا، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ : $\begin{cases} f(x)=x & \Rightarrow D_f=\mathbb{R}\\ g(x)=\frac{x^2-x}{x-1} & \Rightarrow D_g=\mathbb{R}=\{1\}\end{cases}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow f\neq g$

گزینهٔ ۲ : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-2} & \Rightarrow D_f=(2,+\infty)\\ g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}} & \Rightarrow D_g=(2,+\infty)\end{cases}\Rightarrow D_f=D_g$

همچنین داریم $\frac{1}{\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}=f(x)$. پس به‌ازای هر $x\in D_f=D_g$، داریم $f(x)=g(x)$. بنابراین: $f=g$

گزینهٔ ۳ : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}\Rightarrow D_f=[1,+\infty)\cup\{0\}\\ g(x)=|x|\sqrt{x-1}\Rightarrow D_g=[1,+\infty)\end{cases}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow f\neq g$

گزینهٔ ۴ : $\begin{cases} f(x)=\frac{x-1}{x}\\ g(x)=\frac{x+1}{x}\end{cases}: f(1)=0\ ,\ g(1)=2\Rightarrow f\neq g$

۲۰ - گزینه ۳ برای محاسبهٔ پارامتر a و b ابتدا باید مراحل تعیین دامنهٔ تابع f را طی نماییم:

زیر رادیکال $>0\to 2x^2-6x+a>0$

عبارت درجه دو باید دو ریشه داشته باشد که یکی از آن‌ها $x=1$ خواهد بود. زیرا بر اساس دامنهٔ مطرح شده در متن سوال جدول تعیین علامت به صورت زیر می‌باشد:

x		1		b	
$2x^2-6x+a$	+	0	−	0	+

$$2x^2-6x+a\overset{x=1}{=\!=}0\to 2-6+a=0\to a=4$$
$$2x^2-6x+4=0\to 2(x^2-3x+2)=0\to 2(x-1)(x-2)=0\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$$

پس ریشهٔ دوم این عبارت درجه دو $x=2$ می‌باشد که همان پارامتر b است.

$$\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}\Rightarrow a\times b=4\times 2=8$$

۲۱ - گزینه ۳ ابتدا با توجه به نامعادلهٔ مطرح شده محدودهٔ x را تعیین می‌نماییم.

$$x^2+x<0\to x(x+1)<0$$

x		−1		0	
x^2+x	+	0	− ج	0	+

$\to x\in(-1,0)$

در این مرحله محدودهٔ هر عبارت درون جزء صحیح را مشخص کرده و سپس از آن جزء صحیح می‌گیریم:

$$-1<x<0\xrightarrow{\text{قرینه}}0<-x<1\to[-x]=0$$
$$-1<x<0\xrightarrow{(\ )^2}0<x^2<1\xrightarrow{\text{قرینه}}-1<-x^2<0\to[-x^2]=-1$$
$$-1<x<0\xrightarrow{(\ )^3}-1<x^3<0\xrightarrow{\text{قرینه}}0<-x^3<1\to[-x^3]=0$$

پس مجموع برابر است با:

$$[-x]+\left[-x^2\right]+\left[-x^3\right]=-1$$

۲۲ - گزینه ۳ شرط تساوی دو تابع این است که:

۱) دامنهٔ توابع برابر باشد.

۲) ساده شدهٔ ضابطهٔ $f(x)$ و $g(x)$ با هم برابر باشد.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{x(x^۲+۲)}{ax^۲+bx+c}=\frac{x}{۲}\to \frac{x^۲+۲}{ax^۲+bx+c}=\frac{۱}{۲}\to ax^۲+bx+c=۲x^۲+۴$$

برای اینکه تساوی فوق به ازاء جمیع x برقرار باشد باید $\boxed{a=۲}$ و $\boxed{b=۰}$ و $\boxed{c=۴}$ در نظر گرفته شود.

$$a+b+c=۲+۰+۴=۶$$

۲۳ـ گزینه ۱

$$y=\sqrt{f(x)-x}\to f(x)-x\geq ۰\to f(x)\geq x$$

$\to$ نقاطی قابل قبول هستند که نمودار تابع بالای $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) باشد.

$$\to x\in(-\infty,-۲]\cup[۲,۴]$$

۲۴ـ گزینه ۳

$$f(-۳)=\sqrt{\sqrt{-۳+۱۲}-۲(-۳)}=\sqrt{۳+۶}=\sqrt{۹}=۳$$

۲۵ـ گزینه ۳ با توجه به شکل تابع (هموگرافیک) می‌بینیم که $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ و با توجه به کسری بودن تابع، $x=۱$ باید ریشهٔ مخرج باشد پس داریم:

$$۱+b=۰\to \boxed{b=-۱}$$

$$\to f(x)=\frac{x+a}{x-۱}\quad,\quad f(۰)=۰\to \frac{۰+a}{۰-۱}=۰\to \frac{a}{-۱}=۰\to \boxed{a=۰}$$

$$\to ۲b-a=۲(-۱)-۰=-۲$$

۲۶ـ گزینه ۳ چون تابع کسری است و دامنهٔ تابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی است پس مخرج کسر هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و داریم:

$$(m-۱)x^۲+(۲m-۱)x-۱\neq ۰\to \Delta=(۲m-۱)^۲-۴(m-۱)(-۱)<۰$$

$$\to ۴m^۲-۴m+۱+۴m-۴<۰\to ۴m^۲-۳<۰\to ۴m^۲<۳$$

$$\to m^۲<\frac{۳}{۴}\to -\frac{\sqrt{۳}}{۲}<m<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۷ـ گزینه ۲

عدد صحیح از داخل جزءصحیح بیرون می‌آید و می‌دانیم اگر $[x]=n$ و $n\in\mathbb{Z}$ باشد آن‌گاه $n\leq x<n+۱$ است.

$$[x+\frac{۱}{۲}]+[x+\frac{۳}{۲}]=۳\to [x+\frac{۱}{۲}]+[x+\frac{۱}{۲}+۱]=۳$$

$$\to [x+\frac{۱}{۲}]+[x+\frac{۱}{۲}]+۱=۳\to ۲[x+\frac{۱}{۲}]=۲\to [x+\frac{۱}{۲}]=۱$$

$$\to ۱\leq x+\frac{۱}{۲}<۲\to \frac{۱}{۲}\leq x<\frac{۳}{۲}\to x\in[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})=[a,b)$$

$$\to a=\frac{۱}{۲}\;,\;b=\frac{۳}{۲}\to a+b=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۲$$

۲۸ـ گزینه ۱ چون $D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$ می‌باشد پس عبارت درجه دوم مخرج کسر باید ریشهٔ مضاعف ۳ داشته باشد، بنابراین داریم:

$$۲(x-۳)^۲=۲x^۲+ax+b\to ۲(x^۲-۶x+۹)=۲x^۲+ax+b$$

$$\to ۲x^۲-۱۲x+۱۸=۲x^۲+ax+b\to \begin{cases}a=-۱۲\\ b=۱۸\end{cases}\to a-b=-۳۰$$

۲۹ـ گزینه ۲ باتوجه به شکل مشاهده می‌کنیم که دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f: x\geq -۴$ است و داریم:

$$x+b\geq ۰\to x\geq -b\to \boxed{b=۴}$$

تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند پس داریم:

$$f(۰)=۰\to a+\sqrt{۰+۴}=۰\to a+۲=۰\to a=-۲$$

$$f(x)=a+\sqrt{x+b}\xrightarrow{b=۴}f(x)=a+\sqrt{x+۴}\;,\;f(x)=a+\sqrt{x+۴}\xrightarrow{a=-۲}f(x)=-۲+\sqrt{x+۴}$$

$$f(b^۲+۲a)\xlongequal{b=۴,a=-۲}f(۴^۲+۲(-۲))=f(۱۲)=-۲+\sqrt{۱۲+۴}=-۲+۴=۲$$

۳۰ـ گزینه ۴ شرط تساوی دو تابع به صورت مقابل است:

$$\begin{cases}D_f=D_g\\ f\ \text{ساده شده}=g\ \text{ساده شده}\end{cases}$$

ابتدا دامنهٔ توابع را بررسی می‌نماییم، اگر دامنه‌ها برابر نباشند دو تابع برابر نیستند.

$$(۱)\begin{cases}f(x)=x\to D_f=\mathbb{R}\\ g(x)=(\sqrt{x})^۲\to D_g=[۰,+\infty)\end{cases}\qquad D_f\neq D_g$$

$$(2)\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-1} & D_f=\mathbb{R}-\{1\} \\ g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1} & D_g=\mathbb{R}-\{\pm 1\} \end{cases} \quad D_f\neq D_g$$

$$(3)\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}} & D_f=(0,+\infty) \\ g(x)=\sqrt{x} & D_g=[0,+\infty) \end{cases} \quad D_f\neq D_g$$

$$(4)\begin{cases} f(x)=\dfrac{3|x|}{x} & D_f=\mathbb{R}-\{0\}\rightarrow f(x)\begin{cases} 3 & x>0 \\ -3 & x<0 \end{cases} \\ g(x)=\dfrac{3x}{|x|} & D_g=\mathbb{R}-\{0\}\rightarrow g(x)\begin{cases} 3 & x>0 \\ -3 & x<0 \end{cases} \end{cases}$$

۳۱ - گزینه ۳ ابتدا ضابطه‌ی $f(x)$ و از روی آن ضابطه‌ی $f(2x)$ را بدست می‌آوریم.

$$x+3=t\rightarrow x=t-3\rightarrow f(t)=t-3+\frac{5}{t-3}\rightarrow f(x)=x-3+\frac{5}{x-3}$$

$$\rightarrow f(2x)=2x-3+\frac{5}{2x-3}$$

$$y=3-f(2x)=3-2x+3-\frac{5}{2x-3}\rightarrow y=6-2x-\frac{5}{2x-3}$$

گزینه‌ی سوم در این رابطه صدق می‌کند.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۳	۱۱ - ۳	۱۶ - ۱	۲۱ - ۳	۲۶ - ۳	۳۱ - ۳
۲ - ۱	۷ - ۳	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲	
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۱	۱۸ - ۲	۲۳ - ۱	۲۸ - ۱	
۴ - ۳	۹ - ۳	۱۴ - ۴	۱۹ - ۲	۲۴ - ۳	۲۹ - ۲	
۵ - ۳	۱۰ - ۴	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۳	۳۰ - ۴	