

علی هاشمی

نمونه سوال: آشنایی با تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

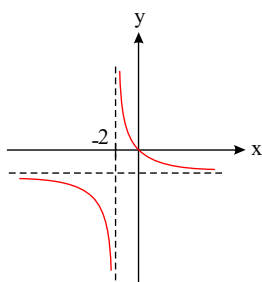
۱- بازیکن فوتبالی از ابتدای فصل امسال تا کنون ۵ پنالتی زده است که ۳ تای آن‌ها به گل تبدیل شد. اگر از این به بعد تا پایان فصل تمام پنالتی‌هایش به گل تبدیل شود، این بازیکن چند پنالتی دیگر باید بزند تا درصد پنالتی‌های گل شده‌اش برابر ۹۰ درصد شود؟

۲- حاصل $M = \frac{\left[\begin{array}{c} \frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}-1 \end{array} \right]}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۳- نمودار تابع $f(x) = [x + [x]]$ در بازه $(-2, 2)$ ، از چند پاره خط با طول مساوی تشکیل شده است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

۴- اگر $f(x) = 2[x] - 1$ و $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$ و $g^{-1}(-5) = a$ باشد، آنگاه حاصل $f(a)$ کدام است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

۵- برد تابع $f(x) = \frac{[x]}{\sqrt{x-x^2}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



۶- اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x+a}{bx-2}$ به صورت زیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

۷- اگر در تابع خطی f با شیب منفی داشته باشیم $f(f(x+1)) = 9x - 3$ مقدار $f(3) - f(1)$ کدام است؟

۸- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $\left[(\sqrt{2} - 1)^2 \right] + \left[\sqrt{n^2 + 4n + 5} \right]$ کدام است؟

۹- حاصل $\left[\frac{3n+7}{n+3} \right]$ برای کلیه مقادیر طبیعی n کدام است؟

۱۰- از معادله $[x] + [-x] = x - [x]$ کدام مقادیر برای x قابل قبول است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)



۱۱- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x([x] + [-x])$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

۱۲- معادله‌ی $x = \frac{1}{5} + [x]$ در فاصله‌ی $[-۲, ۳]$ چند جواب دارد؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

۱۳- اگر $f = \{(1, a + b), (۲, b + c), (۳, c + a)\}$ تابع همانی باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۱۴- اگر $f(x) = x + \frac{1}{x}$ حاصل $f(x)f(\frac{1}{x}) - f(x^۲)$ کدام است؟

۱۵- با فرض آن که $f(g(x)) = x^۲ - ۲x$ و $f(x) = x^۲ - ۴x + ۳$ ، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ با فرض $g(x) \geq ۲$ کدام است؟



۱۶- در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & x \geq 2 \\ 2x + 1 & x < 2 \end{cases}$ حاصل $f(f(4))$ کدام است؟

۱۷- اگر $f(x) = 3x - 1$ و $f(g(x)) = x^2 - x - 1$ باشد، مقدار $g(3)$ کدام است؟

۱۸- اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ باشد، حاصل $f(g(3))$ کدام است؟

۱۹- اگر $[3x + 1] = -1$ ، آن گاه حاصل $[x] - [-x]$ کدام است؟

۲۰- اگر $x > x^2$ باشد، حاصل $[-x^3]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۲۱- نمودار $y = x - [x]$ در فاصله $1 \leq x < 3$ از چند پاره خط ساخته می شود؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



۲۲- اگر جزء صحیح $x^2 + x$ برابر ۱- باشد، حاصل $[x^3] + [x^2] + [x]$ کدام است؟

۲۳- حاصل $\left[\frac{x}{1-x} \right]$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۲۴- اگر $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$ ، آن گاه دامنه‌ی تعریف f شامل کدام بازه است؟

۲۵- اگر $f(x) = 3x - 1$ ، نمودار تابع f با دامنه‌ی $\{0, 1, 2, 3\}$ چگونه است؟

۲۶- به ازای کدام مقدار b ، رابطه‌ی $f = \{(1, 3), (2, 4), (1, b^2 - 1), (b, 6), (3, 1)\}$ تابع است؟

۲۷- به ازای کدام مقدار a ، رابطه‌ی $\{(2, a^2 - 1), (a, 5), (2, 3), (3, 4)\}$ یک تابع است؟



۲۸- اگر $y = \sqrt{-x(x-1)^3}$ کدام مقادیر برای x قابل انتخاب است؟

۲۹- اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشد، $g\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

۳۰- اگر $f(x) = \frac{9^x + 1}{3^x}$ باشد، $f(x) - f(-x)$ برابر کدام است؟



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ اگر تعداد پناالتی‌هایی که از این به بعد بزند x در نظر بگیریم نسبت پناالتی‌های گل‌شده به کل پناالتی‌ها به صورت زیر است، داریم:

$$P(A) = \frac{3+x}{5+x} = \frac{90}{100}$$

$$\rightarrow 9(5+x) = 10(3+x) \rightarrow 45 + 9x = 30 + 10x \rightarrow \boxed{x = 15}$$

۲ - گزینه ۱

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \times \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{9+12\sqrt{2}+8}{9-8} = 17+12\sqrt{2} \sim 33,8 \rightarrow [17+12\sqrt{2}] = 33$$

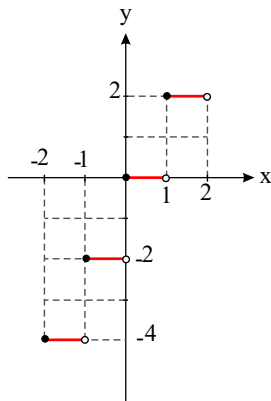
$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1} = 3+2\sqrt{2} \sim 5,8 \rightarrow [3+2\sqrt{2}] = 5$$

پس: $M = \left[\frac{33}{5} \right] = [6, \dots] = 6$

توجه کنید در محاسبات $\sqrt{2}$ را حدوداً ۱,۴ در نظر گرفتیم.

۳ - گزینه ۳

$$[x] \in \mathbb{Z} \rightarrow f(x) = [x + [x]] = [x] + [x] = 2[x]$$



اکنون نمودار تابع f را در بازه $(-2, 2)$ رسم می‌کنیم.

پس نمودار از ۴ پاره خط با طول مساوی تشکیل شده است.

۴ - گزینه ۴

$$g^{-1}(-5) = a \rightarrow g(a) = -5 \rightarrow \frac{a-2}{a+1} = -5 \rightarrow a-2 = -5a-5$$

$$\rightarrow a+5a = -5+2 \rightarrow 6a = -3 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow f(a) \stackrel{a=-\frac{1}{2}}{=} f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left[-\frac{1}{2}\right] - 1 = 2(-1) - 1 \rightarrow f(a) = -3$$

۵ - گزینه ۲

ابتدا دامنه تعریف تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{[x]}{\sqrt{x-x^2}} \rightarrow x-x^2 > 0 \rightarrow x^2-x < 0 \rightarrow x(x-1) < 0 \rightarrow 0 < x < 1$$

$$0 < x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow f(x) = \frac{0}{\sqrt{x-x^2}} \rightarrow f(x) = 0$$

پس برد تابع $f(x)$ شامل یک عدد صحیح است.



$$f(x) = \frac{x+a}{bx-2} \xrightarrow{f(0)=0} 0 = \frac{0+a}{b(0)-2} \rightarrow \boxed{a=0} \quad (1)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \text{ریشهٔ مخرج است. } x = -2 \rightarrow b(-2) - 2 = 0 \rightarrow \boxed{b = -1} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} f(x) = \frac{x}{-x-2} \rightarrow f(1) = \frac{1}{-1-2} \rightarrow f(1) = -\frac{1}{3}$$

۷ - گزینه ۱ تابع موردنظر را به فرم $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم، اکنون می‌توان نوشت:

$$f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b \Rightarrow f(f(x+1)) = a(ax + a + b) + b = a^2x + a^2 + ab + b$$

اکنون از تساوی $a^2x + a^2 + ab + b = 9x - 3$ می‌توان دریافت:

$$a^2 = 9 \xrightarrow{a < 0} a = -3 \Rightarrow f(x) = -3x + b \Rightarrow f(3) - f(1) = (-9 + b) - (-3 + b) = -6$$

۸ - گزینه ۲ باتوجه به این‌که $\sqrt{2} = 1/4$ ، می‌توان دریافت $1 < (\sqrt{2} - 1)^y < 0$ است، پس:

$$[(\sqrt{2} - 1)^y] = 0$$

برای قسمت دوم می‌توان نوشت:

$$n^2 + 4n + 4 < n^2 + 4n + 5 < n^2 + 6n + 9 \rightarrow (n+2)^2 < n^2 + 4n + 5 < (n+3)^2 \\ \Rightarrow n+2 < \sqrt{n^2 + 4n + 5} < n+3 \Rightarrow \lceil \sqrt{n^2 + 4n + 5} \rceil = n+2$$

پس حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$\lceil (\sqrt{2} - 1)^y \rceil + \lceil \sqrt{n^2 + 4n + 5} \rceil = 0 + n + 2 = n + 2$$

۹ - گزینه ۳

$$\left\lfloor \frac{3n+7}{n+3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3(n+3) - 2}{n+3} \right\rfloor = \left\lfloor 3 - \frac{2}{n+3} \right\rfloor = 3 + \left\lfloor \frac{-2}{n+3} \right\rfloor = 3 + (-1) = 2$$

البته می‌توان یک عدد طبیعی دلخواه را انتخاب کرده و در عبارت قرار دهیم و حاصل را به دست آورد.

۱۰ - گزینه ۳ $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح، صفر و برای سایر اعداد، -1 است.

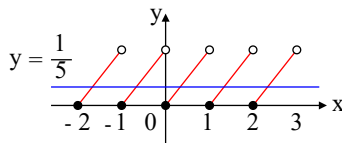
$x - [x]$ هم جزء کسری x را نشان می‌دهد که برای اعداد صحیح صفر و برای سایر اعداد، مقداری بین صفر و 1 است ($0 \leq x - [x] < 1$) پس این تساوی فقط در اعداد صحیح امکان دارد که هر دو طرف صفر است.

۱۱ - گزینه ۲ می‌دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ، پس ضابطه‌ی تابع f به صورت روبه‌رو می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

که نمودار (۲)، نمودار تابع f را نشان می‌دهد.

۱۲ - گزینه ۲



از این معادله نتیجه می‌شود $x - [x] = \frac{1}{5}$ است. نمودار $y = x - [x]$ را ببینید:

خط $y = \frac{1}{5}$ در 5 نقطه این نمودار را قطع می‌کند. پس معادله 5 جواب دارد.

۱۳ - گزینه ۱ باتوجه به این‌که زوج مرتب‌های تابع همانی $(y = x)$ ، به صورت (x, x) هستند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ b + c = 2 \\ c + a = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2(a + b + c) = 6 \Rightarrow a + b + c = 3$$

۱۴ - گزینه ۳

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x^2) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} + x\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 + x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 - x^2 - \frac{1}{x^2} = 2$$

۱۵ - گزینه ۳ از $f(x) = x^2 - 4x + 3$ می‌توان دریافت $f(g(x)) = g^2(x) - 4g(x) + 3$ ، پس می‌توان نوشت:

$$g^2(x) - 4g(x) + 3 = x^2 - 2x$$

$$g^2(x) - 4g(x) + 4 = x^2 - 2x + 1$$

اگر به طرفین تساوی بالا عدد 1 را اضافه کنیم خواهیم داشت:



$$\Rightarrow (g(x) - 2)^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow \underbrace{|g(x) - 2|}_{+} = |x - 1| \quad (\text{چون } g(x) \geq 2 \text{ است داخل قدرمطلق، مثبت است})$$

$$\Rightarrow g(x) - 2 = |x - 1| \Rightarrow g(x) = 2 + |x - 1|$$

۱۶ - گزینه ۳

$$f(4) \stackrel{\text{ضابطه ی بالا}}{=} \sqrt{4} - 1 = 1 \rightarrow f(f(4)) = f(1) \stackrel{\text{ضابطه ی پایین}}{=} 2(1) + 1 = 3$$

۱۷ - گزینه ۲

روش اول:

$$f(x) = 3x - 1 \rightarrow f(g(x)) = 3g(x) - 1$$

$$\text{پس: } 3g(x) - 1 = x^2 - x - 1 \xrightarrow{x=3} 3g(3) - 1 = 9 - 3 - 1 \rightarrow 3g(3) = 6 \rightarrow g(3) = 2$$

روش دوم:

می توان از روابط داده شده، ضابطه ی $g(x)$ را به دست آورد:

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = 3g(x) - 1 \Rightarrow 3g(x) - 1 = x^2 - x - 1 \Rightarrow 3g(x) = x^2 - x \\ f(g(x)) = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - x}{3} \Rightarrow g(3) = \frac{3^2 - 3}{3} = 2$$

۱۸ - گزینه ۲

$$f(g(3)) = f(g(3)) = f\left(\frac{3}{1-3}\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[-\frac{3}{2}\right] = [-1, 5] = -2$$

۱۹ - گزینه ۳

$$[3x + 1] = -1 \Rightarrow [3x] + 1 = -1 \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow -2 \leq 3x < -1$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < -x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow [x] = -1, [-x] = 0 \Rightarrow [x] - [-x] = -1$$

۲۰ - گزینه ۳ روش اول:

$$x > x^2 \Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow x(x - 1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow -1 < -x^2 < 0 \Rightarrow [-x^2] = -1$$

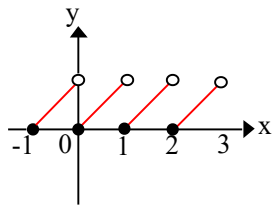
روش دوم:

$x = \frac{1}{2}$ در رابطه ی $x > x^2$ صدق می کند. بنابراین کافی است حاصل $[-x^2]$ را به ازای $x = \frac{1}{2}$ به دست آوریم:

$$\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \left[-\frac{1}{4}\right] = -1$$

۲۱ - گزینه ۳ شکل تابع $y = x - [x]$ را همواره به خاطر داشته باشید.

مطابق شکل نمودار از چهار پاره خط ساخته می شود:



۲۲ - گزینه ۳

$$[x^2 + x] = -1 \rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x + 1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 0 \\ x^2 + x + 1 \geq 0 \xrightarrow{a > 0, \Delta < 0} \text{همواره برقرار است} \\ \text{همواره ثابت} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \\ -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \Rightarrow [x] - [x^2] + [x^3] = -1 - 0 - 1 = -2 \\ -1 < x < 0 \Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \end{cases}$$

توجه کنید در عبارت درجه ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ هر گاه $\Delta < 0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0 \quad (\text{همواره منفی}) \\ a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0 \quad (\text{همواره مثبت}) \end{cases}$$

۲۳ - گزینه ۴

$$\frac{x}{1-x} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

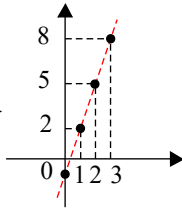
صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+2}{1-2} = -3,4 \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right] = [-3,4] = -4 \quad 9$$

۲۴ - گزینه ۲ $\sin \pi x$ نباید صفر شود، یعنی باید هیچ عدد صحیحی در بازه نباشد، (اگر x صحیح باشد، $\sin \pi x$ صفر می شود) پس گزینه ی ۲ مناسب است.



$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow f(0) = -1 \\ x=1 &\rightarrow f(1) = 2 \\ x=2 &\rightarrow f(2) = 5 \\ x=3 &\rightarrow f(3) = 8 \end{aligned}$$



شکل، شامل ۴ نقطه است. \rightarrow

۲۶ - گزینه ۳ یک رابطه که به صورت زوج مرتب داده شده است. در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مولفه‌ی اول یکسان نباشند، یعنی اگر مولفه‌ی اول دو زوج مرتب مساوی بود، مولفه‌ی دومشان هم مساوی باشد.

$$(1, 3), (1, b^2 - 1) \in f \text{ بودن شرط تابع بودن } \rightarrow b^2 - 1 = 3 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

اما به ازای $b = 2$ رابطه به صورت $f = \{(1, 3), (2, 4), (1, 3), (2, 6), (3, 1)\}$ می‌آید که تابع نیست. اما به ازای $b = -2$ رابطه به صورت $f = \{(1, 3), (2, 4), (1, 3), (-2, 6), (3, 1)\}$ می‌آید که تابع است.

۲۷ - گزینه ۳ چون در زوج مرتب اول و سوم مولفه‌های اول باهم برابرند باید مولفه‌های دوم نیز برابر باشند.

$$a^2 - 1 = 3 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \rightarrow (2, 3)(2, 5) \dots \text{تابع نمی باشد} \\ a = -2 \rightarrow (2, 3)(-2, 5)(2, 3)(3, 4) \text{تابع است} \end{cases}$$

پس فقط $a = -2$ قابل قبول است.

۲۸ - گزینه ۲ زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

$$-x(x-1)^3 \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{array}{cccc} -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ - & 0 & + & - \end{array} \Rightarrow D_f = [0, 1]$$

۲۹ - گزینه ۲

$$g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \rightarrow g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$2x+3 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{25}{16}\right) + 22\left(\frac{-5}{4}\right) + 20 \rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2} - \frac{55}{2} + 20 = 5$$

۳۰ - گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{9^x+1}{3^x} = \frac{9^x}{3^x} + \frac{1}{3^x} = 3^x + 3^{-x} \\ f(-x) &= 3^{-x} + 3^x \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) - f(-x) = 0$$

پاسخنامه کلیدی

| | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ۱ - ۴ | ۶ - ۴ | ۱۱ - ۲ | ۱۶ - ۳ | ۲۱ - ۳ | ۲۶ - ۳ |
| ۲ - ۱ | ۷ - ۱ | ۱۲ - ۲ | ۱۷ - ۲ | ۲۲ - ۳ | ۲۷ - ۳ |
| ۳ - ۳ | ۸ - ۲ | ۱۳ - ۱ | ۱۸ - ۲ | ۲۳ - ۴ | ۲۸ - ۲ |
| ۴ - ۴ | ۹ - ۳ | ۱۴ - ۳ | ۱۹ - ۳ | ۲۴ - ۲ | ۲۹ - ۲ |
| ۵ - ۲ | ۱۰ - ۳ | ۱۵ - ۳ | ۲۰ - ۳ | ۲۵ - ۳ | ۳۰ - ۴ |