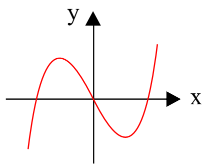
نام آزمون: تابع وارون

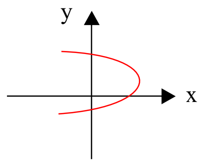
سایت: ALIGEBRA.COM

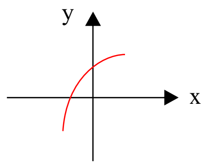
علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

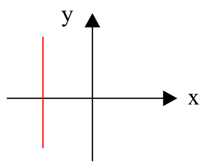
علی هاشمی

۱ - کدام گزینه نمودار یک تابع معکوس‌پذیر است؟

① 

② 

③ 

④ 

۲ - وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} - ۱$ در کدام گزینه آمده است؟

① $f^{-۱}(x) = x^{۲} - ۱$

② $f^{-۱}(x) = x^{۲} + ۱$

③ $f^{-۱}(x) = (x - ۱)^{۲}$

④ $f^{-۱}(x) = (x + ۱)^{۲}$

۳ - فرض کنید $f(x) = x - ۲$ و $g(x) = |x|$. اگر نمودار تابع fog را ۲ واحد به سمت xهای منفی انتقال دهیم، نمودار جدید در چند نقطه وارون تابع f را قطع می‌کند؟

① ۱

② ۲

③ صفر

④ بی‌شمار

۴ – ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = |x|\sqrt{x}$ کدام است؟

① $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}\ ;\ x \in \mathbb{R}$

② $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}\ ;\ x \geq 0$

③ $f^{-1}(x) = x\sqrt[3]{x}\ ;\ x \in \mathbb{R}$

④ $f^{-1}(x) = x\sqrt[3]{x}\ ;\ x \geq 0$

۵ – اگر $f(x) = \sqrt[3]{5 - \sqrt[3]{2x}}$ ، ضابطه‌ی تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟

① $f^{-1}(x) = 2(5 - x^3)^3$

② $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(5 - x^3)^3$

③ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(5 - x)^3$

④ $f^{-1}(x) = (5 - \sqrt[3]{x})^3$

۶ – ضابطه‌ی معکوس تابع $f(x) = 5 - \sqrt{x - 2}$ به کدام صورت است؟

① $f^{-1}(x) = x^2 - 10x + 23\ ;\ x \leq 5$

② $f^{-1}(x) = x^2 - 10x + 27\ ;\ x \leq 5$

③ $f^{-1}(x) = x^2 - 10x + 25\ ;\ x \geq 2$

④ $f^{-1}(x) = x^2 - 10x + 27\ ;\ x \geq 2$

۷ – تابع خطی f مفروض است. اگر نمودار دو تابع f و f^{-1} محور xها را در نقطه‌ای به طول یک قطع کنند. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

① -1

② صفر

③ ۱

④ ۲

۸ - کدام‌یک از توابع زیر وارون‌پذیر است؟

① $y=(x+۵)^۲$

② $y=۱-|x-۱|$

③ $y=x^۲-۶x+۹$

④ $y=\sqrt{x+۲}-۳$

۹ - اگر تابع $f=\left\{(۲,۳a),(۲,a-۴),(a,۲),(\frac{b}{۲},a^۲-۱۰)\right\}$ وارون‌پذیر باشد، مقدار ab کدام است؟

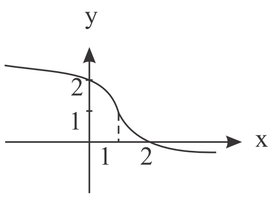
① -۲

② -۴

③ -۶

④ -۸

۱۰ - نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو می‌باشد. تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$ کدام است؟



① ۱

② ۲

③ ۳

④ صفر

۱۱ - اگر دو خط $b=۳x-۴y$ و $bx+ay=-۱۶$ نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگر باشند، مقدار $b-a$ کدام است؟

① ±۱۴

② ±۲

③ ±۱۲

④ ±۴

۱۲ - اگر $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^3-2}$، ضابطه‌ی تابع $y=f(x)$ کدام است؟

① $f(x)=\dfrac{x^3-2}{2x^3+1}$

② $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{2x+1}}$

③ $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{x-2}}$

④ $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^3-2}$

۱۳ - در تابع خطی f که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد، داریم $f(3)=6$. ضابطه‌ی وارون این تابع کدام است؟

① $f^{-1}(x)=3x$

② $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{3}$

③ $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}$

④ $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{6}$

۱۴ - تابع $f(x)=|2x-4|+x$ در یک بازه صعودی است. ضابطه‌ی وارون تابع f در این بازه کدام است؟

① $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+4}{3}\ ,\ (x\leq 2)$

② $f^{-1}(x)=3x-4\ ,\ (x\geq 2)$

③ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{4}\ ,\ (x\geq 2)$

④ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+4}{3}\ ,\ (x\geq 2)$

۱۵- اگر $f(x)=2x+1$ و $gof(x)=\dfrac{5x+1}{x-2}$ آن‌گاه $g^{-1}(0)$ کدام است؟

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{3}{5}$

۱۶- f تابعی یک به یک و $g(x)=f(2x^3+1)+1$ است. اگر $f^{-1}(5)=3$ و $g^{-1}(a+1)=1$ باشد، a کدام است؟

① ۷

② ۶

③ ۵

④ ۰

۱۷- اگر $f(x)=3g^{-1}(4x+2)$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ باشد، حاصل $f^{-1}(12)$ کدام است؟

① $-0/3$

② $-0/4$

③ $-0/6$

④ $-0/8$

۱۸- ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=3x+\sqrt{x^2}$ کدام است؟

① $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{4} & x\leq 0\\ \frac{x}{2} & x>0\end{cases}$

② $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{3} & x\geq 0\\ \frac{x}{5} & x<0\end{cases}$

③ $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{3} & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$

④ $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{4} & x\geq 0\\ \frac{x}{2} & x<0\end{cases}$

۱۹ - نمودار تابع $y=\sqrt{۱-۲x}$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. ضابطه‌ی معکوس تابع به دست آمده کدام است؟

(۱) $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{-۱-۲x} \quad , \quad x\leq \frac{-۱}{۲}$

(۲) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x^{۲}-x+۱ \quad , \quad x\geq ۱$

(۳) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x^{۲}+x-۱ \quad , \quad x\leq \frac{۱}{۲}$

(۴) $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x^{۲}+x-۱ \quad , \quad x\geq ۱$

۲۰ - اگر $f(x)=۳-۲x$ باشد، دامنه‌ی تعریف $y=\sqrt{f^{-۱}(۲x^{۲}+۳)-x}$ در کدام گزینه آمده است؟

(۱) $[۰,۱]$

(۲) $[-۱,۰]$

(۳) $[-۱,۱]$

(۴) $[-۲,۱]$

۲۱ - کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

(۱) یک تابع در صورتی وارون‌پذیر است که یک به یک باشد.

(۲) تابعی یک به یک می‌توان یافت که دامنه‌ی آن از ۴ عضو و برد آن از ۳ عضو تشکیل شده باشد.

(۳) تابعی یک‌به‌یک می‌توان یافت که دامنه‌ی آن از ۳ عضو و برد آن از ۳ عضو تشکیل شده باشد.

(۴) اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۲۲ - در تابع خطی f که از مبدأ مختصات می‌گذرد. داریم $f(۲)=۷$. ضابطه‌ی وارون این تابع کدام است؟

(۱) $f^{-۱}(x)=\frac{۷x}{۲}$

(۲) $f^{-۱}(x)=\frac{۲x}{۷}$

(۳) $f^{-۱}(x)=\frac{۳x}{۷}$

(۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۷x}{۳}$

۲۳- اگر $f^{-۱}=\{(۲,۳),(۱,-۱),(۰,۲),(-۱,۰)\}$ باشد، آن‌گاه تابع $\dfrac{۲f^{-۱}}{f}$ شامل کدام زوج مرتب است؟

① $(۰,۴)$

② $(۰,-۱)$

③ $(-۴,۰)$

④ $(-۱,۰)$

۲۴- اگر $f(x)$ تابعی وارون‌پذیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، به گونه‌ای که به ازای هر x داشته باشیم $f(x)<x$، آن‌گاه تابع $y=f(x)-f^{-۱}(x)$ در چند نقطه با محور طول‌ها برخورد می‌کند؟

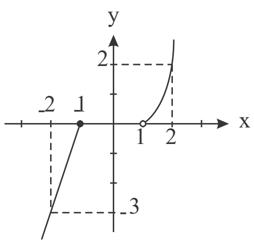
① ۱

② ۲

③ ۳

④ صفر

۲۵- نمودار $y=f(x+۲)$ داده شده است. حاصل عبارت $A=\dfrac{f^{-۱}(۰)+f^{-۱}(۲)}{۱+f^{-۱}(-۳)}$ کدام است؟



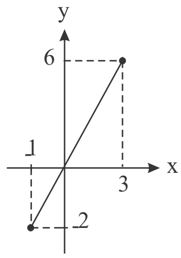
① ۵

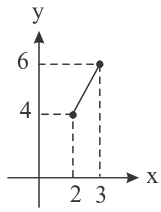
② -۱

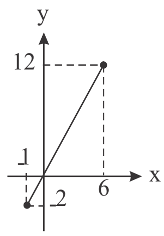
③ صفر

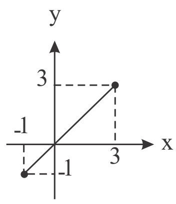
④ ۲

۲۶ - f تابعی خطی با دامنهٔ $[-۱,۳]$ است که از دو نقطهٔ $(-۱,۲)$ و $(۱,۴)$ می‌گذرد. نمودار تابع $g(x)=f(x)+f^{-۱}(x)$ کدام است؟

(۱) 

(۲) 

(۳) 

(۴) 

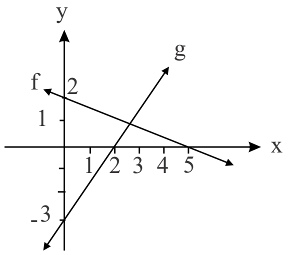
۲۷ - اگر $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x+۴}$، نمودار تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) صفر

(۴) ۴



۲۸ - نمودار تابع‌های f و g مطابق شکل زیر است. حاصل $(f+g)^{-۱}(۰)$ کدام است؟

① ۳

② صفر

③ $\frac{۱۰}{۱۱}$

④ ۷

۲۹ - اگر $f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,-۲),(۴,-۱)\}$ و $f-۲g=\{(-۲,-۱),(-۱,۸)\}$ و تابع g یک‌به‌یک باشد، کدام نقطهٔ زیر حتماً روی $g^{-۱}$ قرار دارد؟

① $(-۱,-۲)$

② $(-۲,-۱)$

③ $(-۲,۱)$

④ $(۱,-۲)$

۳۰ - تابع $f(x)=|x-۱|-|x+۳|$ در بازهٔ $[a,b]$ یک‌به‌یک بوده و $b-a$ حداکثر مقدار ممکن است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟

① $f^{-۱}(x)=-\frac{x}{۲}-۱;-۴\leq x\leq ۴$

② $f^{-۱}(x)=-\frac{x}{۲}-۱;-۳\leq x\leq ۱$

③ $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲}-۱;-۴\leq x\leq ۴$

④ $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲}-۱;-۳\leq x\leq ۱$

علی هاشمی

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ ۱) اگر هر خط موازی محور yها، نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن رابطه یک تابع است.

۲) اگر هر خط موازی محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن تابع یک به یک (معکوس‌پذیر) است.

با توجه به ۱، گزینه‌ی ۲ و ۴ تابع نیستند و با توجه به ۲، گزینه‌ی ۱ یک به یک نیست. گزینه‌ی ۳ در هر دو شرط صدق می‌کند، بنابراین تابع یک به یک (معکوس‌پذیر) است.

۲ - گزینه ۴ برای محاسبه‌ی ضابطه‌ی وارون یک تابع، ابتدا x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم. سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=\sqrt{x}-1 \Rightarrow \sqrt{x}=y+1 \Rightarrow x=(y+1)^2 \rightarrow f^{-1}(x)=(x+1)^2$$

۳ - گزینه ۱ برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع کافی است x را برحسب y به‌دست آوریم و در آخر جای x و yها را عوض کنیم.

$$f(x)=x-2 \rightarrow y=x-2 \rightarrow x=y+2 \rightarrow f^{-1}(x)=x+2$$

$$fog(x)=f\left(g(x)\right)=|x|-2 \xrightarrow{\text{۲ واحد انتقال به سمت } x \text{ های منفی}} y=|x+2|-2$$

اکنون دو تابع را تلاقی می‌دهیم.

$$|x+2|-2=x+2 \xrightarrow{x\geq -2} x+2-2=x+2 \rightarrow 0=2 \text{ :امکان ندارد}$$

$$|x+2|-2=x+2 \xrightarrow{x<-2} -x-2-2=x+2 \rightarrow 2x=-6 \rightarrow x=-3 \quad \text{ق ق}$$

۴ - گزینه ۲ برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع ابتدا x را برحسب y بدست می‌آوریم و در آخر جای x و yها را عوض می‌کنیم.

$$f(x)=|x|\sqrt{x} \xrightarrow[\text{داخل قدر مطلق مثبت است}]{x\geq 0 \text{ است پس}} y=x\sqrt{x} \rightarrow y^2=x^3 \rightarrow x=\sqrt[3]{y^2} \rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}\ ,\quad x\geq 0$$

دقت کنید برد تابع f یعنی $y\geq 0$ همان $D_{f^{-1}}$ است یعنی دامنه‌ی تابع معکوس $x\geq 0$ است.

۵ - گزینه ۲ برای پیدا کردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس x را به y و yها را به x تبدیل می‌کنیم.

$$y=\sqrt[3]{5-\sqrt[3]{2x}} \xrightarrow{\text{توان۲}} y^3=5-\sqrt[3]{2x} \rightarrow \sqrt[3]{2x}=5-y^3 \xrightarrow{\text{توان۳}} 2x=(5-y^3)^3$$

$$\rightarrow x=\frac{1}{2}(5-y^3)^3 \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(5-x^3)^3$$

۶ - گزینه ۲ برای بدست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، کافی است x را برحسب y بدست آوریم و سپس y ها را به x و x را به $f^{-1}(x)$ تبدیل کنیم.

$$y=5-\sqrt{x-2} \rightarrow \sqrt{x-2}=5-y \xrightarrow{\text{توان۲}} x-2=(5-y)^2 \rightarrow x=2+(5-y)^2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=2+(5-x)^2 \rightarrow f^{-1}(x)=2+25+x^2-10x \rightarrow f^{-1}(x)=x^2-10x+27$$

دقت کنید که $D_{f^{-1}}=R_f$ است پس برای بدست آوردن دامنه‌ی تابع معکوس، کافی است برد تابع را بدست آوریم.

$$y=5-\sqrt{x-2} \rightarrow \underbrace{\sqrt{x-2}}_{\text{بزرگتر مساوی صفر}}=5-y \rightarrow 5-y\geq 0 \rightarrow y\leq 5 \rightarrow R_f=D_{f^{-1}}=x\leq 5$$

۷ - گزینه ۱ تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ است. می‌دانیم اگر نقطه‌ی $\left|\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right.$ نقطه‌ی تلاقی دو تابع f و f^{-1} باشد $f(m)=n$ و $f(n)=m$ است و چون محل تلاقی دو تابع f و f^{-1} نقطه‌ی $\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right.$ است داریم:

$$\left.\begin{matrix} f(1)=0 \rightarrow a+b=0 \xrightarrow{b=1} a=-1 \\ f(0)=1 \rightarrow b=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow f(x)=-x+1$$

حال برای محاسبه‌ی $f^{-1}(2)$ کافی است در تابع اصلی به جای y عدد ۲ قرار دهید.

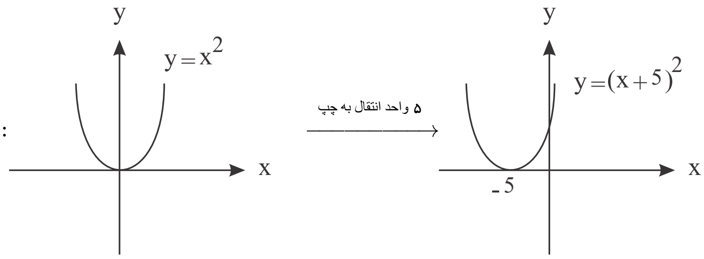
$$2=-x+1 \rightarrow x=1-2=-1$$

۸ - گزینه ۴ یک تابع در صورتی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد.

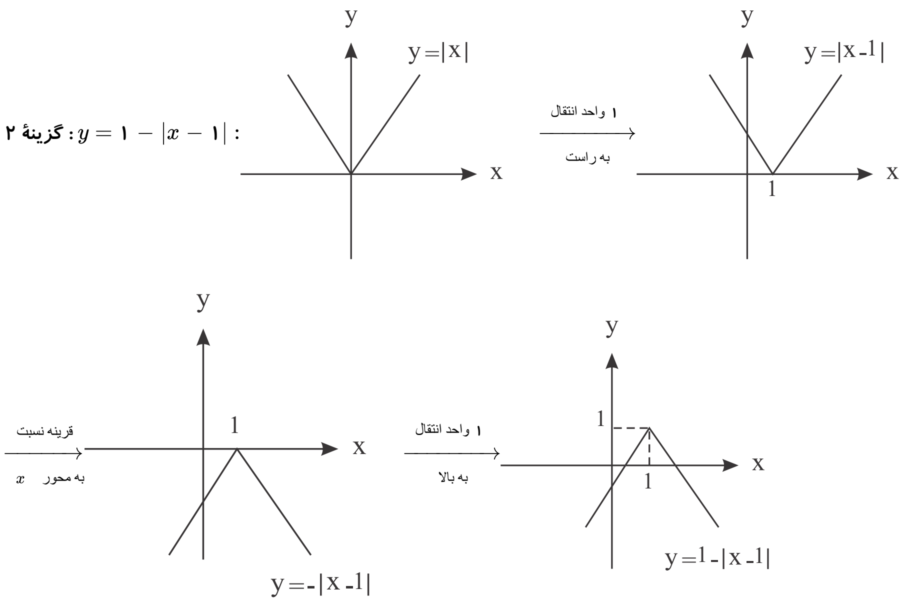
یک تابع در صورتی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

با توجه به توضیحات داده شده، نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم.

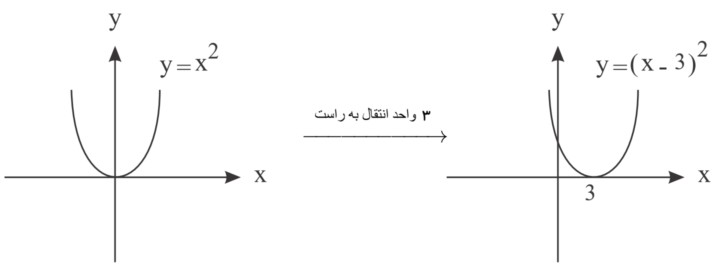
گزینهٔ ۱ : $y=(x+۵)^{۲}$:



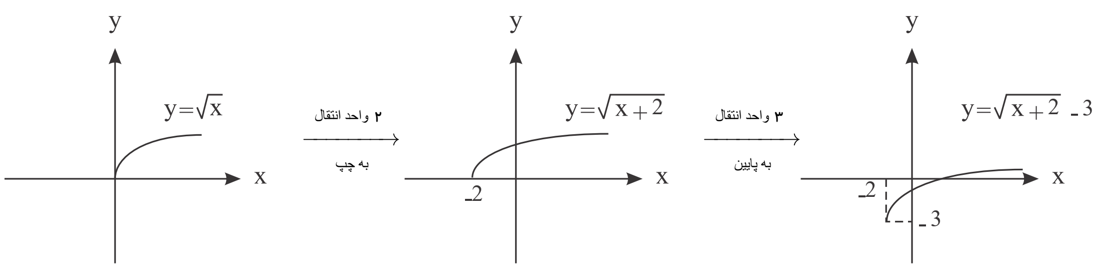
گزینهٔ ۲ : $y=۱-|x-۱|$:



گزینهٔ ۳ : $y=x^{۲}-۶x+۹=(x-۳)^{۲}$:



گزینهٔ ۴ : $y=\sqrt{x+۲}-۳$:



با توجه به نمودارها، واضح است که گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۹ - گزینه ۴ نکتهٔ ۱: رابطهٔ f که به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها داده شده است، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفهٔ اول برابر نباشد؛ به‌عبارت دیگر، اگر مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم برابر باشد.

نکتهٔ ۲: تابع f که به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها داده شده است، در صورتی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفهٔ دوم برابر نباشد؛ به‌عبارت دیگر، اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشد.

$$\begin{cases}(۲,۳a)\in f\\(۲,a-۴)\in f\end{cases}\xrightarrow{f\text{ تابع است.}}۳a=a-۴\Rightarrow a=-۲$$

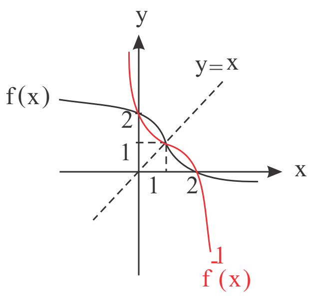
پس: $f=\left\{(۲,-۶),(-۲,۲),(\frac{b}{۲},-۶)\right\}$

$$\begin{cases} (۲,-۶)\in f \\ (\frac{b}{۲},-۶)\in f \end{cases} \xrightarrow{f\ \text{یک‌به‌یک است.}} \frac{b}{۲}=۲ \Rightarrow b=۴$$

بنابراین: $ab=-۸$

۱۰ - گزینه ۳

جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$، طول نقاط برخورد نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ است.



اگر $f(x)$ تابعی یک‌به‌یک باشد، برای به‌دست آوردن نمودار تابع $f^{-1}(x)$، کافی است قرینهٔ $f(x)$ را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به‌دست بیاوریم.

نمودار $f^{-1}(x)$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل، واضح است که توابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ هر دو از سه نقطهٔ $(۰,۲)$، $(۲,۰)$ و $(۱,۱)$ می‌گذرند.

بنابراین معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ دارای سه جواب است.

۱۱ - گزینه ۱ چون دو خط $۳x-۴y=b$ و $bx+ay=-۱۶$ نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگر هستند پس می‌توان نتیجه گرفت که این دو خط تابع معکوس یکدیگر هستند پس داریم:

$$۳x-۴y=b \Rightarrow ۳x=۴y+b \Rightarrow x=\frac{۴}{۳}y+\frac{b}{۳} \Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+\frac{b}{۳} \quad (۱)$$

$$bx+ay=-۱۶ \Rightarrow ay=-bx-۱۶ \Rightarrow y=-\frac{b}{a}x-\frac{۱۶}{a} \quad (۲)$$

روابط (۱) و (۲) باید یکسان باشند پس داریم:

$$-\frac{b}{a}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow b=-\frac{۴}{۳}a$$

$$-\frac{۱۶}{a}=\frac{b}{۳} \Rightarrow ab=-۴۸ \Rightarrow a(-\frac{۴}{۳}a)=-۴۸ \Rightarrow -\frac{۴}{۳}a^۲=-۴۸$$

$$\Rightarrow a^۲=۳۶ \Rightarrow a=\pm ۶$$

$$a=۶ \Rightarrow b=-\frac{۴}{۳}a=-\frac{۴}{۳}\times ۶=-۸ \Rightarrow b-a=-۱۴$$

$$a=-۶ \Rightarrow b=-\frac{۴}{۳}(-۶)=۸ \Rightarrow b-a=۱۴$$

چون دو خط داده شده نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند پس این دو تابع، معکوس یکدیگرند بنابراین کافی است معکوس یکی از آن دو را به‌دست آورده و مساوی دیگری قرار دهیم و می دانیم برای به‌دست آوردن تابع معکوس، x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x, y را عوض می‌کنیم.

۱۲ - گزینه ۳ روش اول: وارون وارون تابع f، خود تابع f است. برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع، x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس y را به x و x را به y تبدیل می‌کنیم.

$$y=\frac{۲x^۳+۱}{x^۳-۲} \to x^۳y-۲y=۲x^۳+۱ \to x^۳y-۲x^۳=۲y+۱ \to x^۳(y-۲)=۲y+۱$$

$$\to x^۳=\frac{۲y+۱}{y-۲} \to x=\sqrt[۳]{\frac{۲y+۱}{y-۲}}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع f به‌صورت $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۲x+۱}{x-۲}}$ است.

روش دوم: می‌دانیم اگر $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \in f$ باشد آن‌گاه $\begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix} \in f^{-۱}$ است.

$$x=۰ \to f^{-۱}(۰)=\frac{-۱}{۲} \to \begin{vmatrix} ۰ \\ -\frac{۱}{۲} \end{vmatrix} \in f^{-۱} \to \begin{vmatrix} -\frac{۱}{۲} \\ ۰ \end{vmatrix} \in f$$

فقط گزینه‌ی سوم است که به‌ازای $x=-\frac{۱}{۲}$ مقدارش صفر می‌گردد.

۱۳ - گزینه ۳ تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ است

$$\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} ۰=۰+b \to b=۰ \ , \quad f(۳)=۶ \to ۳a+b=۶ \xrightarrow{b=۰} ۳a=۶ \to a=۲$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $y=۲x$ است. برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع، کافی است x را برحسب y بدست آوریم و سپس x را به y و y را به x تبدیل کنیم.

$$y=۲x \to x=\frac{y}{۲} \to f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲}$$

۱۴ - گزینه ۴ ابتدا عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$x\geq ۲ \to y=۲x-۴+x \to y=۳x-۴ \to m=۳>۰ \to$ صعودی

$x<۲ \to y=-۲x+۴+x \to y=-x+۴ \to m=-۱<۰ \to$ نزولی

برای بدست آوردن ضابطه‌ی معکوس، ابتدا x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم.

$$y=۳x-۴ \to ۳x=y+۴ \to x=\frac{y+۴}{۳} \to f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

دقت کنید که دامنه‌ی تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$y=۳x-۴ \xrightarrow{x\ge ۲} y\ge ۳(۲)-۴ \to y\ge ۲ \to D_{f^{-۱}}=x\ge ۲$$

۱۵ - گزینه ۴

$$gof(x)=\frac{۵x+۱}{x-۲} \to g(f(x))=\frac{۵x+۱}{x-۲} \to g(۲x+۱)=\frac{۵x+۱}{x-۲}$$

$$\to g^{-۱}\left(\frac{۵x+۱}{x-۲}\right)=۲x+۱ \xrightarrow{\frac{۵x+۱}{x-۲}=۰\to x=-\frac{۱}{۵}} g^{-۱}(۰)=۲\left(-\frac{۱}{۵}\right)+۱=\frac{۳}{۵}$$

۱۶ - گزینه ۳

$$f^{-۱}(۵)=۳ \to f(۳)=۵ \quad , \quad g^{-۱}(a+۱)=۱ \to g(۱)=a+۱$$

$$g(x)=f(۲x^۳+۱)+۱ \xrightarrow{x=۱} g(۱)=f(۳)+۱ \to a+۱=۵+۱ \to a=۵$$

۱۷ - گزینه ۲

$$f^{-۱}(۱۲)=a \to f(a)=۱۲ \to f(a)=۳g^{-۱}(۴a+۲)$$
$$\to ۱۲=۳g^{-۱}(۴a+۲) \to g^{-۱}(۴a+۲)=۴ \to g(۴)=۲a+۲$$
$$\to \frac{۲}{۴+۱}=۴a+۲ \to \frac{۲}{۵}=۴a+۲ \to ۴a=-\frac{۸}{۵} \to a=-۰/۴$$

۱۸ - گزینه ۴ روش اول:

$$y=۳x+\sqrt{x^۲} \to y=۳x+|x|=\begin{cases} ۴x & x\ge ۰ \\ ۲x & x<۰ \end{cases}$$

$$y_۱=۴x, x\ge ۰ \xrightarrow{y_۱\ge ۰} x=\frac{y_۱}{۴} \to f^{-۱}(x)=\frac{x}{۴}, \ x\ge ۰$$
$$y_۱=۲x, x<۰ \xrightarrow{y_۲<۰} x=\frac{y_۱}{۲} \to f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲}, \ x<۰$$
$$\to f^{-۱}(x)=\begin{cases} \frac{x}{۴} & x\ge ۰ \\ \frac{x}{۲} & x<۰ \end{cases}$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً $x=۱$ را در تابع قرار می‌دهیم.

$$x=۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y=۴ : A\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۴ \end{matrix}\right. \in f \to A'\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۱ \end{matrix}\right. \in f^{-۱}$$

تنها گزینه‌ای که به x عدد ۴ دهی و حاصل برابر یک شود گزینه‌ی چهارم است.

۱۹ - گزینه ۴ ابتدا ضابطه‌ی تابع انتقال یافته را به‌دست می‌آوریم.

$$y=\sqrt{۱-۲x} \xrightarrow{\text{یک واحد به سمت چپ}} y=\sqrt{۱-۲(x+۱)}=\sqrt{۱-۲x-۲}=\sqrt{-۲x-۱}$$
$$\xrightarrow{\text{یک واحد به سمت بالا}} y=\sqrt{-۲x-۱}+۱$$

اکنون باید ضابطه‌ی معکوس این تابع را به‌دست آوریم. (x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.)

$$y=\sqrt{-۲x-۱}+۱ \to y-۱=\sqrt{-۲x-۱} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y-۱)^۲=-۲x-۱$$
$$\to ۲x=-۱-(y-۱)^۲ \to ۲x=-۱-y^۲-۱+۲y \to ۲x=-y^۲+۲y-۲$$
$$\to x=-\frac{۱}{۲}y^۲+y-۱ \to f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+x-۱$$

می‌دانیم دامنه‌ی تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است پس برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تابع معکوس، کافی است برد تابع اصلی را به‌دست آوریم.

$$y=\sqrt{-۲x-۱}+۱ \to y-۱=\underbrace{\sqrt{-۲x-۱}}_{\text{نامنفی}} \to y-۱\ge ۰ \to y\ge ۱$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع معکوس به‌صورت $x\ge ۱$ و $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+x-۱$ می‌باشد.

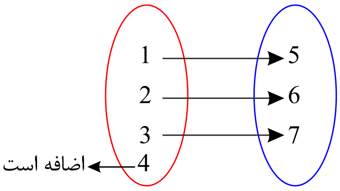
۲۰ - گزینه ۲

$$f(x)=۳-۲x \to y=۳-۲x \to ۲x=۳-y \to x=\frac{۳-y}{۲} \to f^{-۱}(x)=\frac{۳-x}{۲}=\frac{۳}{۲}-\frac{x}{۲}$$

$$y=\sqrt{f^{-۱}(۲x^۲+۳)-x}=\sqrt{\frac{۳}{۲}-\frac{۲x^۲+۳}{۲}-x}=\sqrt{\frac{۳}{۲}-x^۲-\frac{۳}{۲}-x}=\sqrt{-x^۲-x}$$

$\text{زیر رادیکال} \geq 0 \to -x^2 - x \geq 0 \to x^2 + x \leq 0 \to x(x+1) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 \leq x \leq 0$ یا $x \in [-1, 0]$

۲۱ - گزینه ۲ از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی نمی‌توان تابع یک به یک تعریف نمود زیرا یکی از اعضای دامنه، اضافی باقی می‌ماند.



۲۲ - گزینه ۲ تابع خطی را به صورت $f(x) = ax + b$ نشان می‌دهند و برای پیدا کردن ضابطه‌ی تابع وارون کافی است x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} 0 = 0 + b \to b = 0$$

$$\left|\begin{matrix} 2 \\ 7 \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} 7 = 2a + b \to 7 = 2a \to a = \frac{7}{2}$$

$$f(x) = \frac{7}{2}x \to y = \frac{7}{2}x \to 7x = 2y \to x = \frac{2}{7}y \to f^{-1}(x) = \frac{2}{7}x$$

۲۳ - گزینه ۴

$$f^{-1} = \{(2,3), (1,-1), (0,2), (-1,0)\} \to f = \{(3,2), (-1,1), (2,0), (0,-1)\}$$

توجه کنید $2f^{-1} = \{(2,6), (1,-2), (0,4), (-1,0)\}$ است. (فقط مولفه‌های دوم دو برابر می‌شوند).

برای پیدا کردن $\frac{2f^{-1}}{f}$ زوج‌های مرتبی از f^{-1} و f را پیدا می‌کنیم که دارای مولفه‌های اول برابر بوده و سپس عمل تقسیم را روی مولفه‌های دوم آنها انجام می‌دهیم.

$$\frac{2f^{-1}}{f} = \left\{(0, \frac{4}{-1}), (-1, \frac{0}{1})\right\} = \{(0,-4), (-1,0)\}$$

بنابراین گزینه‌ی چهارم، صحیح است.

۲۴ - گزینه ۴ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع، جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g(x)$ است و برعکس.

اگر f تابعی یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع $f^{-1}(x)$ کافی است قرینهٔ $f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم.

طبق فرض به ازای هر x داریم $x < f(x)$ یعنی نمودار تابع $f(x)$ همواره زیر خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین نمودار $f^{-1}(x)$ همواره بالای خط $y = x$ واقع است، پس نمودار $f^{-1}(x)$ همواره بالای نمودار $f(x)$ قرار دارد و هیچ‌گاه با یکدیگر تقاطع ندارند.

محل برخورد تابع $y = f(x) - f^{-1}(x)$ با محور طول‌ها از حل معادلهٔ $f(x) - f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f^{-1}(x)$ به دست می‌آید. چون این دو نمودار با یکدیگر تقاطع ندارند، پس این معادله جواب ندارد.

۲۵ - گزینه ۱ طبق نمودار داریم:

$$x = -2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow -3 = f(-2+2) = f(0) \Rightarrow f^{-1}(-3) = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = f(-1+2) = f(1) \Rightarrow f^{-1}(0) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2 = f(2+2) = f(4) \Rightarrow f^{-1}(2) = 4$$

در نتیجه:

$$A = \frac{f^{-1}(0) + f^{-1}(2)}{1 + f^{-1}(-3)} = \frac{1+4}{1+0} = 5$$

۲۶ - گزینه ۲ ابتدا معادله خط گذرنده از نقاط $(-1, 2)$ و $(1, 4)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y-4}{x-1} = \frac{4-2}{1+1} = 1 \to y - 4 = x - 1 \to y = x + 3$$

حال برد تابع را تعیین می‌کنیم.

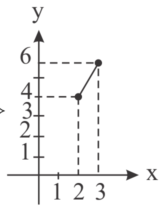
$$-1 \leq x \leq 3 \xrightarrow{+3} 2 \leq x + 3 \leq 6 \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 6 \Rightarrow R_f = [2, 6]$$

تابع معکوس تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 3 \;,\; D_{f^{-1}} = R_f = [2, 6]$$

$$g(x) = f(x) + f^{-1}(x) \Rightarrow D_g = D_{f+f^{-1}} = D_f \cap D_{f^{-1}} = [-1, 3] \cap [2, 6] = [2, 3]$$

$$g(x)=x+3+x-3=2x \quad , \quad D_g=[2,3] \Rightarrow$$



۲۷ - گزینه ۲ برای محاسبه‌ی ضابطه‌ی وارون تابع ، ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم. سپس x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم.

ابتدا ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$y=\frac{2x+1}{x+4} \Rightarrow yx+4y=2x+1 \Rightarrow x(y-2)=-4y+1 \Rightarrow x=\frac{-4y+1}{y-2}$$

پس ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\frac{-4x+1}{x-2}$ است. حال ضابطه‌ی تابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ را با هم قطع می‌دهیم:

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{2x+1}{x+4}=\frac{-4x+1}{x-2} \Rightarrow 2x^2-3x-2=-4x^2-15x+4 \Rightarrow 6x^2+12x-6=0$$

$$\xrightarrow{\div 6} x^2+2x-1=0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=4+4=8} \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

پس دو تابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ در دو نقطه به طول‌های $-1+\sqrt{2}$ و $-1-\sqrt{2}$ متقاطع هستند.

۲۸ - گزینه ۳ ابتدا ضابطهٔ توابع خطی f و g را می‌یابیم. برای یافتن ضابطهٔ تابع f باید معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(0,2)$ و $(5,0)$ را به دست آوریم.

$$\frac{y}{x-5}=\frac{0-2}{5}=\frac{-2}{5} \to 5y=-2x+10 \to y=\frac{-2}{5}x+2 \to f(x)=-\frac{2}{5}x+2$$

برای یافتن ضابطهٔ تابع g باید معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(0,-3)$ و $(2,0)$ را به دست آوریم.

$$\frac{y}{x-2}=\frac{0+3}{2-0}=\frac{3}{2} \to 2y=3x-6 \to y=\frac{3}{2}x-3 \to g(x)=\frac{3}{2}x-3$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-\frac{2}{5}x+2+\frac{3}{2}x-3=(\frac{-4+15}{10})x-1=\frac{11}{10}x-1 \to (f+g)(x)=\frac{11}{10}x-1$$

می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد در این صورت $f^{-1}(b)=a$ است.

$$(f+g)^{-1}(0)=a \to (f+g)(a)=0 \to \frac{11}{10}a-1=0 \to \frac{11}{10}a=1 \to a=\frac{10}{11}$$

۲۹ - گزینه ۲

$$f^{-1}=\{(2,1),(3,-2),(4,-1)\} \Rightarrow f=\{(1,2),(-2,3),(-1,4)\}$$

برای یافتن دامنهٔ تابع $f-2g$ باید اشتراک دامنهٔ توابع f و g را به‌دست آوریم.

$$D_f=\{1,-2,-1\} \quad , \quad D_{f-2g}=\{-2,-1\} \Rightarrow \{1,-2,-1\}\cap D_g=\{-2,-1\}$$

با توجه به رابطهٔ بالا، قطعاً -2 و -1 در دامنهٔ تابع g حضور دارند پس داریم:

$$f-2g=\{(-2,-1)(-1,8)\} \Rightarrow (f-2g)(-2)=-1 \Rightarrow f(-2)-2g(-2)=-1$$

$$\Rightarrow 3-2g(-2)=-1 \Rightarrow g(-2)=2 \Rightarrow (-2,2)\in g \Rightarrow (2,-2)\in g^{-1}$$

$$(f-2g)(-1)=8 \Rightarrow f(-1)-2g(-1)=8 \Rightarrow 4-2g(-1)=8 \Rightarrow g(-1)=-2$$

$$\Rightarrow (-1,-2)\in g \Rightarrow (-2,-1)\in g^{-1}$$

۳۰ - گزینه ۱ تابع f را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(-x+1)-(-x-3) & x<-3\\ (-x+1)-(x+3) & -3\le x\le 1\\ (x-1)-(x+3) & x>1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}4 & x<-3\\ -2x-2 & -3\le x\le 1\\ -4 & x>1\end{cases}$$

f در بازهٔ $[-3,1]$ یک‌به‌یک است. ضابطهٔ وارون آن را در این بازه به‌دست می‌آوریم.

$$y=-2x-2 \Rightarrow x=\frac{-2-y}{2}=-1-\frac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x}{2}-1$$

برد تابع f را در این بازه به‌دست می‌آوریم که همان $D_{f^{-1}}$ است:

$$-3\le x\le 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2\le -2x\le 6$$

$$\xrightarrow{-2} -4\le -2x-2\le 4 \Rightarrow -4\le f(x)\le 4$$

پس ضابطهٔ f^{-1} به‌صورت $f^{-1}(x)=\frac{-x}{۲}-۱$ و دامنهٔ آن $[-۴,۴]$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۲	۱۱ - ۱	۱۶ - ۳	۲۱ - ۲	۲۶ - ۲
۲ - ۴	۷ - ۱	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۲	۲۷ - ۲
۳ - ۱	۸ - ۴	۱۳ - ۳	۱۸ - ۴	۲۳ - ۴	۲۸ - ۳
۴ - ۲	۹ - ۴	۱۴ - ۴	۱۹ - ۴	۲۴ - ۴	۲۹ - ۲
۵ - ۲	۱۰ - ۳	۱۵ - ۴	۲۰ - ۲	۲۵ - ۱	۳۰ - ۱