سایت: ALIGEBRA.COM

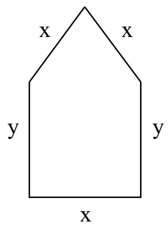
علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر α, β ریشه‌های معادلهٔ $-3x^2 - 4x + 6 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{3\alpha - 1, 3\beta - 1\}$ است؟

۲ - سهمی به معادلهٔ $f(x) = -mx^2 + 2x + m - 1$ فقط از ناحیهٔ اول و مبدأ نمی‌گذرد، حدود m کدام است؟

۳ - می‌خواهیم پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع در بالای آن بسازیم. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، ابعاد مستطیل چند متر باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟ ($\frac{\sqrt{3}}{4}$ را $0/5$ فرض کنید)



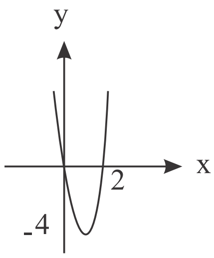
۴ - کدام معادله، تعداد جواب‌های کمتری نسبت به معادلهٔ بقیهٔ گزینه‌ها دارد؟

۵ - اگر رأس سهمی $y = x^2 - mx + m + 1$ بر روی خط $y = x + 1$ واقع باشد، در این صورت مقدار m کدام است؟

۶ - اگر محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = x^2 - kx + 1$ به صورت $x = -2$ باشد، کمترین مقدار سهمی کدام است؟

۷ - اگر محل تلاقی نمودار یک سهمی با محور xها، نقاطی به طول‌های ۱ و ۲ باشد و سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند، طول رأس سهمی کدام است؟

۸ - شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. مقدار $f(3)$ کدام است؟



۹ - اگر در معادلهٔ درجه‌دوم $x^2 - (4m - 1)x + m^2 + 1 = 0$ رابطهٔ $S = P + 1$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، چند مقدار برای m وجود دارد؟

۱۰ - صفرهای تابع $f(x) = x^2 - 2mx + 12$ برابر $\frac{m}{2}$ و $\frac{n}{2}$ است. مقدار $|m - n|$ کدام است؟

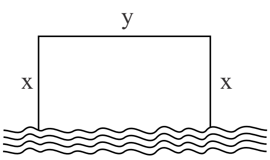
۱۱ - استادیومی به‌شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، طول مستطیل چقدر باشد تا مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن شود؟

استادیوم

۱۲ - یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x = a(x-2)^2$ از ۱۰ برابر ریشهٔ دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱۳ - معادلهٔ درجه دوم $x^2 - (m^2 - 3m + 3)x + m^3 - 3 = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است. اگر مجموع ریشه‌های این معادله برابر ۱ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱۴ - قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل‌شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم مساحت این مستطیل بیشترین مقدار ممکن گردد، مقدار x کدام است؟



رودخانه

۱۵ - اگر نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c \ (a\neq 0)$ فقط از ناحیهٔ اول محورهای مختصات عبور نکند، علامت a، b و c چگونه‌اند؟

۱۶ - به‌ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادلهٔ $4x^2+kx-5=0$ معکوس ریشه‌های معادلهٔ $x(5x+3)=4$ است؟

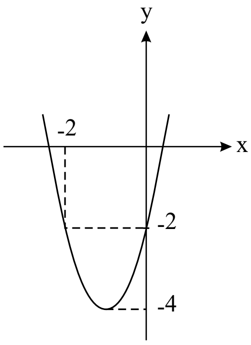
۱۷ - اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x(x-4)=6$، α و β باشد، حاصل عبارت $\frac{\beta}{\beta^2-6}+\frac{\alpha}{\alpha^2-6}$ کدام است؟

۱۸ - اگر مجموع ریشه های معادلهٔ $2x^2+mx+n=0$ برابر ۲ و حاصل‌ضرب ریشه های آن برابر $-\frac{5}{2}$ باشد، در این صورت $m+n$ کدام است؟

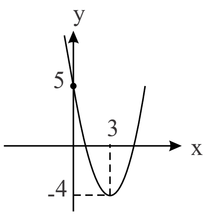
۱۹ - اگر کمترین (بیشترین) مقدار سهمی $y=(2a-1)x^2-8x+6$ روی محور x ها واقع باشد، معادلهٔ محور تقارن سهمی کدام است؟

۲۰ - اگر نقاط برخورد تابع $f(x)=0.5x^2+x-7.5$ با محورهای مختصات رئوس یک مثلث باشند، مساحت مثلث مورد نظر کدام است؟

۲۱ - با توجه به شکل زیر که مربوط به تابع درجهٔ دوم f است، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ کدام است؟



۲۲ - اگر صفرهای سهمی شکل زیر را α و β در نظر بگیریم، تعداد صفرهای سهمی $y = x^۲ + \alpha x + \beta$ کدام است؟ $(\alpha > \beta)$



۲۳ - رأس سهمی $y = -x^۲ + ۴x - ۳$ و نقطه‌های برخورد این سهمی با محور xها به ترتیب سه رأس A، B و C از مثلث ABC را تشکیل می‌دهند، طول میانهٔ CM کدام است؟ (نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ C، به مبدأ نزدیک‌تر است.)

۲۴ - یک سهمی محور xها را در نقاط $x = ۱$ و $x = -۳$ و محور yها را در $y = ۲$ قطع می‌کند. در این صورت عرض نقطه‌ای به طول ۵ روی این سهمی کدام است؟

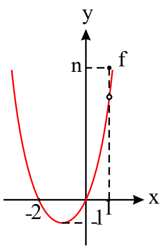
۲۵ـ به‌ازای کدام مقدار m، نقطهٔ مینیمم سهمی $y = mx^2 - 6x + m - 1$ روی محور xها قرار دارد؟

۲۶ـ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(m+2)x^2 + 6x - n = 0$ دو واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر است و مجموع دو ریشه برابر -6 است. مقدار $m+n$ کدام است؟

۲۷ـ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 2x - 6 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $(\alpha^2 - 6)^3 + 8\beta^3$ کدام است؟

۲۸ـ معادلهٔ $mx^2 + (m-4)x - \frac{4}{m} = 0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. اگر $\alpha^2 + \beta^2$ برابر ۱ باشد، آن‌گاه حاصل $3\alpha^2 - 2\alpha - \beta$ کدام است؟

۲۹ـ اگر تابع $y = f(x)$ با نمودار زیر با تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & , x \neq 1 \\ 4 & , x = 1 \end{cases}$ برابر باشد، مقدار $n + b + c$ کدام است؟



۳۰- معادلهٔ $(x^{۲}+x+۱)(x^{۲}+x+۲)-۲۰=۰$ چند جواب حقیقی دارد؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ برای محاسبه معادلهٔ جدید ابتدا S و P معادلهٔ اولیه را محاسبه می‌کنیم.

$$-۳x^۲ - ۴x + ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(-۴)}{-۳} = -\dfrac{۴}{۳} \\ P = \alpha \cdot \beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{۶}{-۳} = -۲ \end{cases}$$

حال S و P معادلهٔ مجهول را بررسی می‌نماییم.

$$S_{\text{جدید}} = (۳\alpha - ۱) + (۳\beta - ۱) = ۳(\alpha + \beta) - ۲ = ۳(-\frac{۴}{۳}) - ۲ = -۶$$

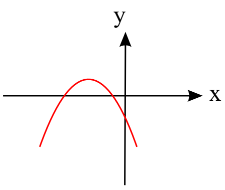
$$P_{\text{جدید}} = (۳\alpha - ۱)(۳\beta - ۱) = ۹\alpha\beta - ۳(\alpha + \beta) + ۱ = ۹(-۲) - ۳(-\frac{۴}{۳}) + ۱ = -۱۳$$

حال با رابطهٔ $x^۲ - Sx + P = ۰$ معادله را می‌نویسیم:

$$x^۲ - (-۶)x + (-۱۳) = ۰ \to x^۲ + ۶x - ۱۳ = ۰$$

۲ - گزینه ۴

روش اول: شکل تقریبی سهمی به صورت زیر است:



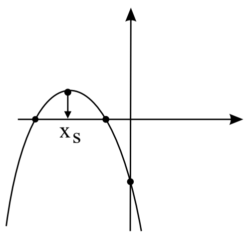
باید معادلهٔ $f(x) = ۰$ دو ریشهٔ منفی داشته باشد:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(-m)(m - ۱) > ۰ \Rightarrow ۴ + ۴m^۲ - ۴m > ۰ \Rightarrow \underbrace{m^۲ - m + ۱ > ۰}_{\Delta<۰} \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

$$\left.\begin{array}{l} P > ۰ \Rightarrow \frac{m-۱}{-m} > ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۱ \\ S < ۰ \Rightarrow \frac{۲}{m} < ۰ \Rightarrow m < ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

روش دوم: ابتدا یک تصویر کلی از نمودار رسم می‌نماییم:

با توجه به نمودار داریم:



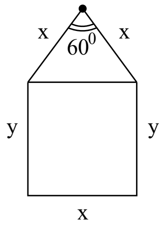
$$\begin{cases} a < ۰ \\ b < ۰ \\ c < ۰ \end{cases}$$

با توجه به معادلهٔ $y = -mx^۲ + ۲x + m + ۱$ پارامتر $b = ۲$ بوده و به هیچ وجه با شرایط $b < ۰$ سازگار نیست.

توجه: می‌توان علامت a و b و c را به صورت زیر تعیین نمود:

$$f(x) = \overset{\text{تقعر}}{\overset{\uparrow}{a}}\, x^۲ + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{شیب خط مماس} \\ x=۰ \text{ در}}}{bx} + \overset{\text{عرض از مبدأ}}{\overset{\uparrow}{c}}$$

۳ - گزینه ۲ برای حداکثر نوردهی باید مساحت max باشد. لذا ابتدا باید معادله‌ای بسازیم که بیانگر مساحت بر حسب x یا y باشد.



$$\text{محیط پنجره} = ۶ \to ۳x + ۲y = ۶ \to y = -\frac{۳}{۲}x + ۳$$

$$\text{مساحت کل پنجره}\ S = S_{\text{مستطیل}} + S_{\text{مثلث}}$$

$$S = x \cdot y + \frac{\sqrt{۳}x^۲}{۴}$$

$$S = x \cdot (-\frac{۳}{۲}x + ۳) + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ \xrightarrow{\frac{\sqrt{۳}}{۴} = ۰/۵} S = -\frac{۳}{۲}x^۲ + ۳x + ۰/۵x^۲$$

$$\Rightarrow S = -x^۲ + ۳x$$

با توجه به معادلهٔ مساحت که تابع درجهٔ ۲ شده است، کافیست رأس سهمی را تعیین نماییم.

$$\text{رأس}\ x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۳}{-۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$y = -\frac{۳}{۲}x + ۳ = -\frac{۳}{۲}(\frac{۳}{۲}) + ۳ = \frac{۳}{۴}$$

۴ - گزینه ۲ برای یافتن گزینه‌ی صحیح ابتدا با استفاده از تغییر متغیر هر چهار معادله را حل می‌نماییم.

گزینهٔ «۱»: با فرض $x^۲ = t$ داریم:

$$x^۴ - ۷x^۲ + ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow t^۲ - ۷t + ۱۲ = ۰ \Rightarrow (t-۴)(t-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳} \\ t = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$

چهار جواب دارد.

گزینهٔ «۲»: با فرض $x^۲ = t$ داریم:

$$t^۲ + ۸t + ۷ = ۰ \Rightarrow (t+۱)(t+۷) = ۰ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -۷ \Rightarrow x^۲ = -۷ \\ t = -۱ \Rightarrow x^۲ = -۱ \end{array}\right\} \text{جواب ندارد.}$$

گزینهٔ «۳»: با فرض $x^۲ + x = t$ داریم:

$$t^۲ - ۱۴t + ۲۴ = ۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۱۲) = ۰ \left\{\begin{array}{l} t = ۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \ \text{یا}\ -۲ \\ t = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \ \text{یا}\ -۴ \end{array}\right\} \text{۴ جواب دارد.}$$

گزینهٔ «۴»: با فرض $x^۳ = t$ داریم:

$$۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳ \Rightarrow ۴t^۲ - ۵t + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \Rightarrow x = ۱ \\ t = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}} \end{cases}$$

دو جواب دارد.

۵ - گزینه ۳ قدم اول محاسبه مختصات رأس سهمی S می‌باشد.

$$f(x) = x^۲ - mx + m + ۱$$

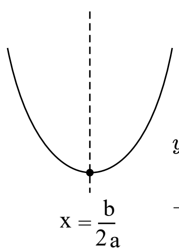
$$S = \left| \begin{array}{l} x_s = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-m}{۲(۱)} = \frac{m}{۲} \\ y_s = f(-\frac{b}{۲a}) = f(\frac{m}{۲}) = (\frac{m}{۲})^۲ - m(\frac{m}{۲}) + m + ۱ = \frac{m^۲}{۴} - \frac{m^۲}{۲} + m + ۱ = \frac{-m^۲ + ۴m + ۴}{۴} \end{array} \right.$$

با توجه به اینکه رأس سهمی روی خط $y = x + ۱$ قرار دارد، مختصات رأس در معادله خط صدق می‌نماید.

$$\frac{-m^۲ + ۴m + ۴}{۴} = \frac{m}{۲} + ۱ \xrightarrow{\times ۴} -m^۲ + ۴m + ۴ = ۲m + ۴$$

$$\to m^۲ - ۲m = ۰ \to m(m-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \\ m = ۲ \end{cases}$$

۶ - گزینه ۱ با توجه به تصویر معادله محور تقارن سهمی برابر است با: $x = -\frac{b}{۲a}$.



$$y = x^۲ - kx + ۱ \to \text{محور تقارن}\ x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-k}{۲(۱)} = \frac{k}{۲}$$

$$\to x = \frac{k}{۲} = -۲ \to k = -۴$$

پس معادله سهمی به شکل مقابل است: $y = x^۲ + ۴x + ۱$

برای محاسبه min مختصات راس را به طور کامل تعیین می‌نماییم:

رأس
$$\begin{cases} x_s = -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ y_s = f(-\dfrac{b}{2a}) = f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 1 = -3 \end{cases}$$

۷ - گزینه ۳ محل تلاقی سهمی با محور xها، همان صفرهای تابع درجهٔ دوم‌اند.

یعنی $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ صفرهای تابع درجه دوم‌اند، از طرفی معادلهٔ سهمی در این حالت به صورت $y = a(x-1)(x-2)$ در می‌آید.

نقطهٔ $(0, 4)$ روی سهمی است.

حال عرض از مبدأ سهمی ۴ است پس داریم $f(0) = 4$

$$y = a(x-1)(x-2) \Rightarrow 4 = a(0-1)(0-2) \Rightarrow a = 2$$
$$\Rightarrow y = 2(x-1)(x-2) = 2x^2 - 6x + 4$$
طول رأس سهمی: $x_\circ = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-6)}{2(2)} = \dfrac{3}{2}$

راه حل دوم: فرم کلی تابع درجهٔ ۲ به‌صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. مبدأ همان $f(0)$ است پس داریم:

$$f(0) = 4 \to c = 4$$

ریشه‌های سهمی اعداد $x = 1$, $x = 2$ می‌باشد پس داریم:

$$f(1) = 0 \to a(1)^2 + b(1) + 4 = 0 \to a + b = -4$$
$$f(2) = 0 \to a(2)^2 + b(2) + 4 = 0 \to 4a + 2b = -4 \to 2a + b = -2$$
$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -a - b = +4 \end{cases}$$
$$a = 2 \to 2 + b = -4 \to b = -6 \to f(x) = 2x^2 - 6x + 4$$
طول رأس $x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2(2)} = +\dfrac{3}{2}$

روش سوم:

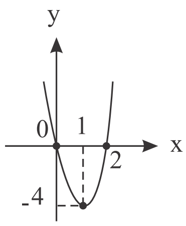
اگر نقطه $A\,(x_1\,,\,0)$ و $B\,(x_2\,,\,0)$ محل تلاقی نمودار سهمی با محورxها باشند، طول رأس سهمی (x_s) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\to x_s = \frac{1+2}{2} \to x_s = \frac{3}{2}$$

۸ - گزینه ۱

باید توجه داشت که طول رأس سهمی وسط ریشه‌ها قرار می‌گیرد. پس می‌توان تصویر سهمی را به صورت زیر کامل کرد.



در این سوال معادلهٔ کلی سهمی را می‌توان به‌صورت $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ تعریف کرد که x_1 و x_2 ریشه‌های سهمی $(x_1 = 0, x_2 = 2)$ هستند پس داریم:

$$f(x) = a(x-0)(x-2)$$

حال نقطهٔ $S(1, -4)$ رأس سهمی است که مختصاتش در معادلهٔ سهمی صدق می‌نماید

$$-4 = a(1-0)(1-2) \to -a = -4 \to a = 4$$

پس معادلهٔ کامل به شکل مقابل است $f(x) = 4(x^2 - 2x)$

$$f(3) = 4(3^2 - 2(3)) = 4 \times 3 = 12$$

۹ - گزینه ۲ برای محاسبهٔ مقدار m کافیست مقدار S و P را محاسبه کرده و جایگذاری کنیم. در معادلهٔ درجه دو مقدار S و P برابر است با:

$$ax^2 + bx + c = 0 \to \begin{cases} S = -\frac{b}{a} \\ P = \frac{c}{a} \end{cases}$$
$$x^2 - (4m-1)x + m^2 + 1 = 0 \to \begin{cases} S = 4m - 1 \\ P = m^2 + 1 \end{cases}$$

طبق فرض سوال داریم: $S = P + 1$

$$4m - 1 = m^2 + 1 + 1 \to m^2 - 4m + 3 = 0 \to (m-1)(m-3) = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$$

حال باید هر دو مقدار را در معادله جایگذاری نماییم. مقادیری قابل قبول هستند که باعث شوند $\Delta \geq 0$ باشد.

$m = ۱ \rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \rightarrow \Delta > ۰$

$m = ۳ \rightarrow x^۲ - ۱۱x + ۱۰ = ۰ \rightarrow \Delta > ۰$

پس هر دو مقدار قابل قبول می‌باشند.

۱۰ - گزینه ۳ برای محاسبهٔ اختلاف m و n می‌توان از پارامترهای S و P استفاده کرد:

$$f(x) = x^۲ - ۲mx + ۱۲ = ۰ \begin{cases} x_۱ = \dfrac{m}{۲} \\ x_۲ = \dfrac{n}{۲} \end{cases}$$

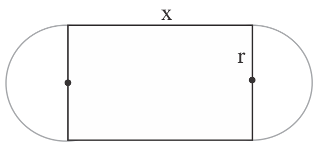
$$S = \frac{m}{۲} + \frac{n}{۲} = ۲m \rightarrow m + n = ۴m \rightarrow n = ۳m \quad (I)$$

$$P = \frac{m}{۲} \times \frac{n}{۲} = ۱۲ \rightarrow mn = ۴۸ \quad (II)$$

$$(I)\,,\,(II) \rightarrow (۳m)(m) = ۴۸ \rightarrow ۳m^۲ = ۴۸ \rightarrow m^۲ = ۱۶ \rightarrow m = \pm ۴$$

$$\begin{cases} m = ۴ \rightarrow n = ۱۲ \\ m = -۴ \rightarrow n = -۱۲ \end{cases} \rightarrow |m - n| = ۸$$

۱۱ - گزینه ۲



محیط استادیوم $= ۲x + ۲\pi r = ۱۵۰۰ \rightarrow x + \pi r = ۷۵۰ \rightarrow r = \dfrac{۷۵۰ - x}{\pi}$

$$S = ۲xr = ۲x\left(\frac{۷۵۰ - x}{\pi}\right) = \frac{۱۵۰۰x - ۲x^۲}{\pi} = -\frac{۲}{\pi}x^۲ + \frac{۱۵۰۰}{\pi}x$$

$$x_{Max} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-\frac{۱۵۰۰}{\pi}}{-\frac{۴}{\pi}} = \frac{۱۵۰۰}{۴} = ۳۷۵$$

۱۲ - گزینه ۳

$$a(x^۲ - ۴x + ۴) = x \Rightarrow ax^۲ - (۴a + ۱)x + ۴a = ۰$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۴a+۱}{a} \\ \alpha\beta = ۴ \end{cases}$$

$$\alpha = ۱۰\beta - ۳ \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^۲ = ۱۰\alpha\beta - ۳\alpha \xrightarrow{\alpha\beta = ۴} \alpha^۲ = ۴۰ - ۳\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ + ۳\alpha - ۴۰ = ۰ \Rightarrow (\alpha + ۸)(\alpha - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۸ \\ \alpha = ۵ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = -۸ \Rightarrow a(-۸ - ۲)^۲ = -۸ \Rightarrow ۱۰۰a = -۸ \Rightarrow a = -\frac{۲}{۲۵} \\ \alpha = ۵ \Rightarrow a(۵ - ۲)^۲ = ۵ \Rightarrow ۹a = ۵ \Rightarrow a = \frac{۵}{۹} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مقدار مثبت } a} a = \frac{۵}{۹}$$

۱۳ - گزینه ۲ در یک معادلهٔ درجه ۲ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲ از رابطه‌های زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-(m^۲ - ۳m + ۳)}{۱} = m^۲ - ۳m + ۳$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{m^۳ - ۳}{۱} = m^۳ - ۳$$

طبق متن سوال $S = ۱$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$m^۲ - ۳m + ۳ = ۱ \rightarrow m^۲ - ۳m + ۲ = ۰ \rightarrow (m - ۱)(m - ۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} m = ۱ \\ m = ۲ \end{cases}$$

حال باید با جایگذاری از قابل قبول بودن اطمینان حاصل نماییم:

$m = ۲ \rightarrow x^۲ - x + ۵ = ۰ \rightarrow \Delta = ۱ - ۲۰ < ۰ \rightarrow$ غیر قابل قبول

$$m = ۱ \rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \rightarrow \Delta = ۱ + ۸ > ۰ \rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{-۲}{۱} = -۲$$

۱۴ - گزینه ۱ نکته: تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bc + c$ با شرط $a < ۰$ $(a > ۰)$ دارای ماکسیمم (مینیمم) است که در رأس آن، یعنی نقطه‌ای به طول $x = \dfrac{-b}{۲a}$ اتفاق می‌افتد.

طول کل نرده برابر ۱۰۰ متر است، پس:

$$۲x + y = ۱۰۰ \Rightarrow y = ۱۰۰ - ۲x$$

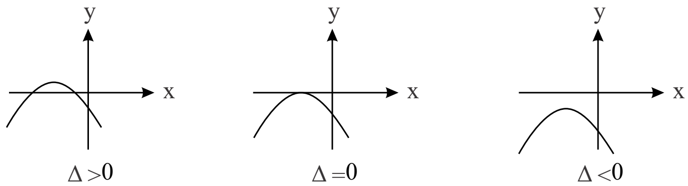
حال ماکسیمم xy را محاسبه می‌کنیم:

$$S = xy = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

ماکسیمم عبارت $S = -2x^2 + 100x$ به‌ازای ۲۵ $= \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = \frac{-100}{-4}$ $x =$ به‌دست می‌آید.

۱۵ - گزینه ۴ برای آن‌که نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ از ناحیهٔ اول عبور نکند باید دارای ماکزیمم و به صورت باشد، یعنی باید ضریب x^2 منفی باشد. $(a < 0)$

حال به بررسی حالت‌های احتمالی می‌پردازیم:

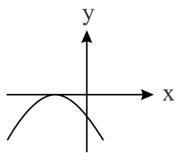


در حالت اول که $\Delta > 0$ است: (α و β ریشه‌های تابع موردنظر هستند.)

$$\alpha + \beta < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \xrightarrow{a<0} b < 0$$

$$\alpha \cdot \beta \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \geq 0 \xrightarrow{a<0} c \leq 0$$

و حالت‌های $\Delta = 0$ و $\Delta < 0$ قابل‌قبول نیستند، زیرا در این حالت از ناحیه دوم نیز نمودار عبور نمی‌کند. اما باید توجه داشت که اگر $a < 0$ و $b = 0$ و $c = 0$ باشند، نمودار به صورت شکل زیر خواهد بود که قابل قبول نیست:



۱۶ - گزینه ۱ روش اول: اگر ریشه های معادلهٔ $x(5x+3) = 4$ را با α و β نمایش دهیم، ریشه‌های معادلهٔ $4x^2 + kx - 5 = 0$ برابر با $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ هستند. بنابراین:

$$x(5x+3) = 4 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{3}{5} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = +\frac{3}{4} \\ P' = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{P} = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{تشکیل}} x^2 - S'x + P' = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow k = -3$$

روش دوم: اگر ریشه‌های معادله $4x^2 + kx - 5 = 0$ را به صورت X نشان دهیم داریم:

$$x\,(5x+3) = 4 \to 5x^2 + 3x - 4 = 0 \to X = \frac{1}{x} \text{ یا } x = \frac{1}{X}$$

$$\to 5\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{x}\right) - 4 = 0 \to \frac{5}{X^2} + \frac{3}{X} - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\times X^2} 5 + 3X - 4X^2 = 0 \to 4X^2 - 3X - 5 = 0$$

$$\to \boxed{k = -3}$$

۱۷ - گزینه ۳

از آن‌جایی که α و β ریشه‌های معادله هستند، در معادله صدق می‌کنند؛ داریم:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0 \to \alpha^2 - 6 = 4\alpha \\ \beta^2 - 4\beta - 6 = 0 \to \beta^2 - 6 = 4\beta \end{cases}$$

پس: $\frac{\alpha}{\alpha^2 - 6} + \frac{\beta}{\beta^2 - 6} = \frac{\alpha}{4\alpha} + \frac{\beta}{4\beta} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

۱۸ - گزینه ۴

$$۲x^۲+mx+n=۰\to\begin{cases}S=\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{m}{۲}=۲\to\boxed{m=-۴}\\ P=\dfrac{c}{a}=\dfrac{n}{۲}=\dfrac{-۵}{۲}\to\boxed{n=-۵}\end{cases}\to\boxed{m+n=-۹}$$

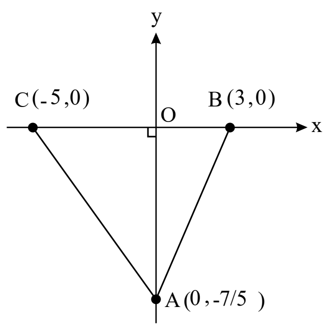
۱۹ - گزینه ۲ کمترین (بیشترین) مقدار سهمی روی محور x ها باشد یعنی $\Delta=۰$ است و داریم:

$$\Delta=(-۸)^۲-۴(۲a-۱)(۶)=۰\to ۶۴-۲۴(۲a-۱)=۰$$
$$\xrightarrow{\div ۸}۸-۳(۲a-۱)=۰\to ۸=۳(۲a-۱)\to ۲a-۱=\frac{۸}{۳}$$
$$\to y=\frac{۸}{۳}x^۲-۸x+۶\to \text{محور تقارن سهمی}\ x=\frac{-b}{۲a}=-\frac{-۸}{۲(\frac{۸}{۳})}\to\boxed{x=\frac{۳}{۲}}$$

۲۰ - گزینه ۳

$$f(x)=۰/۵x^۲+x-۷/۵\to\begin{cases}x=۰\to y=-۷/۵\\ y=۰\to ۰/۵x^۲+x-۷/۵\to x^۲+۲x-۱۵=۰\to(x-۳)(x+۵)=۰\to x=۳\ ,\ x=-۵\end{cases}$$

مطابق شکل، مساحت مثلث برابر است با:



$$\to S=\frac{BC\times AO}{۲}=\frac{۸\times ۷/۵}{۲}\to S=۳۰$$

۲۱ - گزینه ۲

$$f(x)=ax^۲+bx+c$$
$$f(۰)=-۲\to a(۰)^۲+b(۰)+c=-۲\to\boxed{c=-۲}$$

با توجه به سهمی رسم شده، رأس سهمی نقطهٔ وسط $x=۰$ و $x=-۲$ است یعنی $x_S=-۱$:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-۱\to b=۲a$$
$$S(-۱,-۴)\to a(-۱)^۲+b(-۱)+c=-۴\to a-b-۲=-۴\to a-b=-۲$$
$$\begin{cases}b=۲a\\ a-b=-۲\end{cases}\to a-۲a=-۲\to -a=-۲\to\boxed{a=۲}\ ,\ \boxed{b=۴}$$
$$\to f(x)=۲x^۲+۴x-۲\to \text{حاصلضرب ریشه‌ها}=P=\frac{c}{a}=-\frac{۲}{۲}=-۱$$

۲۲ - گزینه ۳

$$y=ax^۲+bx+c$$

$$\begin{cases}x_S=۳\to\dfrac{-b}{۲a}=۳\to -b=۶a\to b=-۶a\\ (۰,۵)\longrightarrow ۵=a(۰)^۲+b(۰)+c\longrightarrow\boxed{c=۵}\\ y_S=-۴\to\dfrac{-\Delta}{۴a}=-۴\to\Delta=۱۶a\xrightarrow{c=۵}b^۲-۴ac=۱۶a\to b^۲-۲۰a-۱۶a=۰\\ \to b^۲-۳۶a=۰\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}b=-۶a\\ b^۲-۳۶a=۰\end{cases}\longrightarrow(-۶a)^۲-۳۶a=۰\longrightarrow ۳۶a^۲-۳۶a=۰$$
$$\longrightarrow ۳۶a(a-۱)=۰\to\begin{cases}a=۰\ \text{غ ق ق}\\ \boxed{a=۱}\xrightarrow{b=-۶a}\boxed{b=-۶}\end{cases}$$

$$\longrightarrow x^۲-۶x+۵=۰\longrightarrow(x-۱)(x-۵)=۰\to\begin{cases}\boxed{\alpha=۵}\\ \boxed{\beta=۱}\end{cases}$$

$$\longrightarrow y=x^۲+\alpha x+\beta \longrightarrow y=x^۲+۵x+۱=۰ \longrightarrow \Delta=(۵)^۲-۴(۱)(۱)=۲۱>۰$$

معادله ۲ ریشه دارد.

۲۳ ـ گزینه ۲

$$y=-x^۲+۴x-۳ \rightarrow x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲ \ , \ y_S=-(۲)^۲+۴(۲)-۳ \rightarrow y_S=۱$$

$$\rightarrow \boxed{A(۲,۱)} \ , \ -x^۲+۴x-۳=۰ \rightarrow x^۲-۴x+۳=۰$$

$$\rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۱ \rightarrow y=۰ \rightarrow \boxed{B(۱,۰)} \\ x=۳ \rightarrow y=۰ \rightarrow \boxed{C(۳,۰)} \end{cases}$$

$$AB \text{ وسط } = M \rightarrow \begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+۱}{۲}=\frac{۳}{۲} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۱+۰}{۲}=\frac{۱}{۲} \end{cases} \rightarrow \boxed{M(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})}$$

$$CM=\sqrt{(x_C-x_M)^۲+(y_C-y_M)^۲}=\sqrt{(۳-\frac{۳}{۲})^۲+(۰-\frac{۱}{۲})^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۴}} \longrightarrow CM=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۲۴ ـ گزینه ۴

$$\text{معادلهٔ سهمی } y=a(x-۱)(x+۳) \xrightarrow{(۰,۲)} ۲=a(۰-۱)(۰+۳) \longrightarrow ۲=-۳a$$

$$\longrightarrow \boxed{a=-\frac{۲}{۳}} \longrightarrow y=-\frac{۲}{۳}(x-۱)(x+۳) \xrightarrow{x=۵} y=-\frac{۲}{۳}(۵-۱)(۵+۳)$$

$$\longrightarrow y=-\frac{۲}{۳}(۴)(۸) \longrightarrow y=-\frac{۶۴}{۳}$$

۲۵ ـ گزینه ۳

$$y=mx^۲-۶x+m-۱ \xrightarrow[(x_S,۰)]{\text{نقطهٔ min روی محور } x} ۰=-\frac{\Delta}{۴a} \longrightarrow \Delta=۰$$

$$\longrightarrow (-۶)^۲-۴m(m-۱)=۰ \longrightarrow ۳۶-۴m^۲+۴m=۰ \longrightarrow -۴(m^۲-m-۹)=۰$$

$$\longrightarrow m^۲-m-۹=۰ \longrightarrow \Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(-۹)=۱+۳۶=۳۷$$

$$\longrightarrow m=\frac{-(-۱)\pm\sqrt{۳۷}}{۲} \begin{cases} m=\frac{۱+\sqrt{۳۷}}{۲}>۰ \ \checkmark \\ m=\frac{۱-\sqrt{۳۷}}{۲}<۰ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

از آن‌جایی که سهمی دارای مینیمم است $m>۰$ قابل قبول می‌باشد.

۲۶ ـ گزینه ۲

فرض کنید α و β ریشه‌های معادلهٔ $(m+۲)x^۲+۶x-n=۰$ باشند و $\alpha>\beta$؛ داریم:

$$\begin{cases} \alpha-\beta=۲ \\ \alpha+\beta=-۶ \end{cases} \longrightarrow ۲\alpha=-۴ \longrightarrow \boxed{\alpha=-۲} , \boxed{\beta=-۴}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}: \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \longrightarrow -۶=-\frac{۶}{m+۲} \longrightarrow \boxed{m=-۱}$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها}: \alpha\beta=\frac{c}{a} \longrightarrow ۸=\frac{-n}{m+۲} \longrightarrow ۸=\frac{-n}{۱} \longrightarrow \boxed{n=-۸}$$

$$\Rightarrow \boxed{m+n=-۹}$$

۲۷ ـ گزینه ۴

$$x^۲-۲x-۶=۰ \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^۲-۲\alpha-۶=۰ \longrightarrow \alpha^۲-۶=۲\alpha$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-\frac{-۲}{۱}=۲ \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۶}{۱}=-۶$$

$$(\alpha^۲-۶)^۳+۸\beta^۳=(۲\alpha)^۳+۸\beta^۳=۸\alpha^۳+۸\beta^۳=۸(\alpha^۳+\beta^۳)$$

$$= 8(S^3 - 3PS) = 8(2^3 - 3(-6)(2)) = 8(8 + 36) = 8 \times 44 = 352$$

۲۸ - گزینه ۲

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های این معادله هستند. $mx^2 + (m-4)x - \frac{4}{m} = 0 \rightarrow$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{4-m}{m} \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{m^2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \rightarrow S^2 - 2P = 1 \rightarrow (\frac{4-m}{m})^2 - 2(\frac{-4}{m^2}) = 1$$

$$\rightarrow \frac{m^2 - 8m + 16}{m^2} + \frac{8}{m^2} = 1 \rightarrow m^2 - 8m + 24 = m^2 \rightarrow -8m + 24 = 0$$

$\rightarrow \boxed{m = 3} \rightarrow 3x^2 - x - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow$ ریشه‌های معادله هستند. $\alpha, \beta \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{3} \\ \alpha\beta = \frac{-4}{9} \end{cases}$

معادله : $3x^2 - x - \frac{4}{3} = 0 \xrightarrow{x=\alpha} 3\alpha^2 - \alpha - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow \boxed{3\alpha^2 - \alpha = \frac{4}{3}}$

$$3\alpha^2 - 2\alpha - \beta = 3\alpha^2 - \alpha - \alpha - \beta = (3\alpha^2 - \alpha) - (\alpha + \beta) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

۲۹ - گزینه ۲

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \rightarrow \boxed{c = 0} \\ f(-2) = 0 \rightarrow 4 - 2b + c = 0 \rightarrow \boxed{b = 2} \\ f(1) = n \rightarrow \boxed{n = 4} \end{cases} \qquad \rightarrow n + b + c = 6$$

۳۰ - گزینه ۲

$$x^2 + x + 1 = t \rightarrow t(t+1) - 20 = 0 \rightarrow t^2 + t - 20 = 0$$

$(t+5)(t-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -5 \rightarrow x^2 + x + 1 = -5 \rightarrow x^2 + x + 6 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 24 < 0 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.} \\ t = 4 \rightarrow x^2 + x + 1 = 4 \rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 12 > 0 \rightarrow \text{۲ ریشه متمایز دارد.} \end{cases}$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۱	۲۱ - ۲	۲۶ - ۲
۲ - ۴	۷ - ۳	۱۲ - ۳	۱۷ - ۳	۲۲ - ۳	۲۷ - ۴
۳ - ۲	۸ - ۱	۱۳ - ۲	۱۸ - ۴	۲۳ - ۲	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۱	۱۹ - ۲	۲۴ - ۴	۲۹ - ۲
۵ - ۳	۱۰ - ۳	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۳	۳۰ - ۲