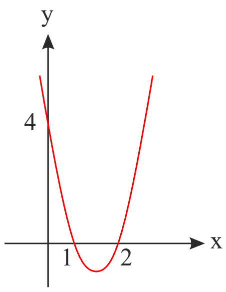
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - «مستطیل طلایی» مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟

۲ - شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ است. مقدار $f(۴)$ کدام است؟




۳ - اگر $y + ۳x = ۱۲$ ، بیشترین مقدار $xy$ کدام است؟

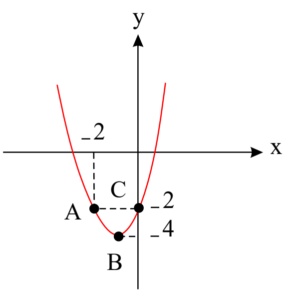
۴ - از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی‌متر است، مثلثی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکسیمم است. مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

۵- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $13x^2-7x-1=0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $13\alpha^2-8\alpha-1$ و $13\beta^2-8\beta-1$ باشد، کدام است؟

۶- معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2+4x-1=0$ باشند، کدام است؟

۷- معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x-2=0$ باشند، کدام است؟

۸- نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$ کدام است؟




۹- اگر مجموع مربعات جواب‌های معادله‌ی $x^3+m(x^2+1)+2x=m$ برابر ۱۲ باشد، $m$ کدام است؟

۱۰ - نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x+۸$ در بازه‌ی $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار $a$ کدام است؟

۱۱ - ریشه‌های کدام یک از معادلات زیر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲-۴x-۱=۰$ یک واحد بیشتر است؟

۱۲ - اگر تابع $f(x)=x^۲-۴x-۱$ در $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، کمترین مقدار $a$ کدام است؟

۱۳ - اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-x-۱=۰$ باشند، حاصل عبارت $\alpha\beta^{-۱}+\beta\alpha^{-۱}$ کدام است؟

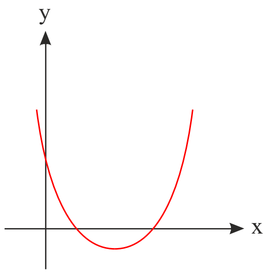
۱۴ - معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن از ۳ برابر ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+x-۳=۰$ ، یک واحد کمتر باشند، کدام است؟

۱۵ - اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+۴x+a-۳$، محور $x$ها را در دو نقطه‌ی متمایز با طول مثبت قطع کند، راس سهمی به ازای کدام مقادیر $a$، زیر محور $x$ها قرار دارد؟

۱۶ - به ازای چه مقادیری از $a$ ، نمودار تابع $f(x)=(a^2-4)x^2+(a^2-9)x+1$ از هر ۴ ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور می‌کند؟

۱۷ - اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل $x_1x_2^6+x_2x_1^6$ کدام است؟

۱۸ - اگر شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=x^2-mx+m+\frac{5}{4}$ باشد، دقیق‌ترین محدوده‌ی $m$ کدام است؟




۱۹ - ضابطهٔ تابع $f$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به‌صورت $f(x)=x^2-6x+8$ است. حاصل‌ضرب صفرهای تابع $y=f(x+3)$ کدام است؟

۲۰ - اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی متمایز باشند، خط گذرا از نقاط $A(b,a)$ و $B(a,b)$ همواره بر کدام خط عمود است؟

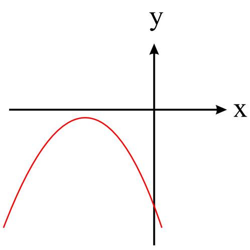
۲۱ - اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $x^{۴} - ۲۰x^{۲} + ۳۶ = ۰$ چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۲۲ - معادلهٔ $۴x^{۶} + ۱ = ۵x^{۳}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۲۳ - معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن ۳ واحد از معکوس ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲} - ۳x - ۱ = ۰$ بیش‌تر باشد، کدام است؟

۲۴ - به ازای چه مقادیری از $m$ معادله‌ی $(m-۲)x^{۲} - ۲x + (m-۳) = ۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی است؟

۲۵ - شکل زیر مربوط به سهمی به معادله‌ی $y = ax^{۲} + bx + c$ است، کدام گزینه صحیح است؟



۲۶- در معادله‌ی $4x^2-8x+c=0$ یکی از ریشه‌ها ۳ واحد بزرگتر از ریشه‌ی دیگر است. در معادله‌ی $2x^2-x+c=0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۲۷- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-1)^2-4x^2+7=0$ کدام است؟

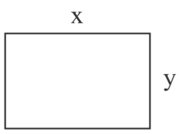
۲۸- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-21x+8=0$ باشند، حاصل $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ کدام است؟

۲۹- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ باشند، حاصل $(\alpha+2)(\beta+2)$ کدام است؟

۳۰- در مورد معادلهٔ $5x^2+13x-7=0$ کدام گزینه درست است؟

# پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ با توجه به توضیح مستطیل طلایی می‌توان رابطهٔ زیر را نوشت:




$$\rightarrow \frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}\rightarrow 1+\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$$

برای محاسبهٔ نسبت حاصل $\frac{x}{y}=t$ فرض می‌کنیم:

$$1+\frac{1}{t}=t\xrightarrow[t\neq 0]{\times t}t+1=t^2\rightarrow t^2-t-1=0$$
$$\rightarrow \Delta=(-1)^2-4(1)(-1)\rightarrow \Delta=5$$
$$\begin{cases} t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$x$ و $y$ اضلاع مستطیل هستند، پس مقدار $\frac{x}{y}$ منفی نمی‌باشد و فقط $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است.

۲ - گزینه ۴ راه حل اول:

با توجه به نمودار، ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ به‌صورت $x=1$ و $x=2$ است، پس می توان نوشت:

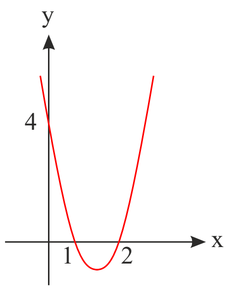
$$f(x)=a(x-1)(x-2)$$

از طرفی نمودار تابع $f$ از نقطه $(0,4)$ می گذرد، پس داریم:

$$f(0)=4\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f$، به‌صورت $f(x)=2(x-1)(x-2)$ است، پس:

$$f(4)=2(3)(2)=12$$




راه حل دوم:

با توجه به تصویر سهمی محور $x$ها را در دو نقطه قطع کرده است که همان ریشه‌های سهمی می‌باشند، یعنی باعث صفر شدن عبارت درجه دومی باشند. از طرفی عرض از مبدأ سهمی یعنی $f(0)$ برابر ۴ است. لذا داریم:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$f(0)=4\rightarrow c=4$$

$$\rightarrow f(1)=0\rightarrow a+b+4=0\rightarrow a+b=-4$$
$$\rightarrow f(2)=0\rightarrow 4a+2b+4=0\xrightarrow{\div 2}2a+b=-2$$

حال با حل دستگاه زیر $a$ و $b$ را محاسبه می‌نماییم:

$$-\begin{cases} a+b=-4 \\ 2a+b=-2 \end{cases}\qquad \begin{cases} -a-b=4 \\ 2a+b=-2 \end{cases}$$
$$\boxed{a=2}\rightarrow a+b=-4\rightarrow 2+b=-4\rightarrow \boxed{b=-6}$$

پس عبارت درجه دو به فرم زیر است:

$$f(x)=2x^2-6x+4\rightarrow f(4)=2(16)-6(4)+4=32-24+4=12$$

۳ - گزینه ۱ برای محاسبهٔ $max$ و $min$ ابتدا باید ضابطه‌ای بسازیم که حاصل‌ضرب $xy$ را به یکی از دو متغیر مرتبط نماید، برای این کار حاصل‌ضرب را $P$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y+3x=12\rightarrow y=-3x+12 \\ P=x\cdot y\rightarrow P=x(-3x+12)\rightarrow p(x)=-3x^2+12x \end{cases}$$

برای محاسبهٔ بیشترین مقدار $P$ کافیست ارتفاع رأس سهمی را محاسبه نماییم

$$S \text{ رأس سهمی } \begin{cases} x_S=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-12}{2(-3)}=2 \\ y_S=P(2)=-3(2)^2+12(2)=12 \end{cases}$$

پس $P_{\max} = 12$

۴ - گزینه ۲ اگر در این مثلث طول قاعده را $a$ و ارتفاع وارد بر آن را $h$ بنامیم، در این صورت $a + h = 16$ است.

$$S = \frac{1}{2}ah \xrightarrow{h=16-a} S(a) = \frac{1}{2}a(16-a) = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$$

تابع $S = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$ یک تابع درجهٔ دوم برحسب $a$ است که چون ضریب $a^2$ منفی است، پس تابع ماکزیمم دارد. عرض رأس این سهمی که بیشترین مقدار آن نیز هست برابر با $-\frac{\Delta}{4a'}$ است.

$$S_{Max} = \frac{-\Delta}{4a'} = \frac{4a'c' - b^2}{4a'} = \frac{4(-\frac{1}{2})(0) - 64}{4(\frac{-1}{2})} = \frac{-64}{-2} = 32$$

۵ - گزینه ۱ $\beta$ و $\alpha$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $13x^2 - 7x - 1 = 0$ هستند پس در معادله صدق می‌کنند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} 13\alpha^2 - 7\alpha - 1 = 0 \ , \quad \beta \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} 13\beta^2 - 7\beta - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 13\alpha^2 - 8\alpha - 1 = \underbrace{13\alpha^2 - 7\alpha - 1}_{0} - \alpha = -\alpha \\ 13\beta^2 - 8\beta - 1 = \underbrace{13\beta^2 - 7\beta - 1}_{0} - \beta = -\beta \end{cases}$$

در حقیقت سوال گفته معادله‌ی درجه‌ی دوم جدیدی بنویسید که ریشه‌هایش قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد که کافی است علامت $b$ را قرینه کنید یعنی معادله به صورت $13x^2 + 7x - 1 = 0$ می‌باشد.

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 - bx + c = 0$، قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشند.

۶ - گزینه ۴

ریشه‌های قدیم: $\alpha, \beta$ و ریشه های جدید: $\alpha^2, \beta^2$

$$S_{\text{قدیم}} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -4 \quad \text{و} \quad P_{\text{قدیم}} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$S_{\text{جدید}} = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (-4)^2 - 2(-1) = 16 + 2 = 18$$

$$P_{\text{جدید}} = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 18x + 1 = 0$$

۷ - گزینه ۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده را $\alpha$ و $\beta$ بنامیم باید معادله‌ی درجه‌ی دوم جدیدی بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha^2$ و $\beta^2$ باشند.

$$S_{\text{قدیم}} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5 \ , \quad P_{\text{قدیم}} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -2$$

$$S_{\text{جدید}} = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 2(-2) = 29$$

$$P_{\text{جدید}} = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 = (-2)^2 = 4$$

می‌دانیم که اگر مجموع $(S)$ و حاصل‌ضرب دو ریشه $(P)$ را داشته باشیم معادله‌ی درجه دوم مطلوب به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است پس معادله‌ی مطلوب به صورت $x^2 - 29x + 4 = 0$ است.

۸ - گزینه ۲ طول نقطه‌ی $B$ یا همان رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه‌ی هم عرض $A$ و $C$ است.

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1$$

و توجه کنید صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

$$\left.\begin{array}{l} A \left| \begin{array}{l} -2 \\ -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = 4a - 2b + c \\ B \left| \begin{array}{l} -1 \\ -4 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -4 = a - b + c \end{array}\right\} \xrightarrow{c=-2} \begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ a - b = -2 \end{cases} \rightarrow a = 2 \ , \ b = 4$$

$$C \left| \begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = c$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = 2x^2 + 4x - 2$ است. برای بدست آوردن مجموع مربعات ریشه های معادله‌ی $2x^2 + 4x - 2 = 0$ بدین صورت عمل می کنیم.

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2 \ , \quad x'x'' = \frac{c}{a} = -1$$

مجموع مربعات ریشه‌ها: $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 4 - 2(-1) = 6$

۹ - گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی داده شده را مرتب می‌کنیم.

$x^3+mx^2+m+2x-m=0 \to x^3+mx^2+2x=0$

$\to x(x^2+mx+2)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x^2+mx+2=0 \end{cases}$

چون یک ریشه‌ی معادله برابر صفر است، بنابراین مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $x^2+mx+2=0$ برابر ۱۲ است پس اگر $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق باشند. داریم:

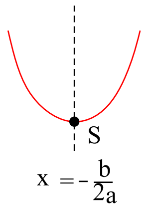
$x'+x''=\frac{-b}{a}=-m\,,\ x'x''=\frac{c}{a}=2$

مجموع مربعات ریشه‌ها $=12 \to x'^2+x''^2=12 \to (x'+x'')^2-2x'x''=12$

$\to m^2-4=12 \to m^2=16 \to m=\pm 4$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند زیرا دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم را منفی نمی‌کنند.

۱۰ - گزینه ۲ تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ با شرط $a>0$ در $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ اکیداً نزولی و در $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است.




اکیداً صعودی : $[\frac{-b}{2a},+\infty) \to [-1,+\infty) \to$ حداقل مقدار $a$ برابر $-1$ است.

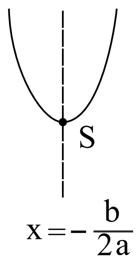
۱۱ - گزینه ۳ کافی است معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسیم که ریشه‌هایش یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده بیشتر باشد برای این کار کافی است که $x$ را به $x-1$ تبدیل کنیم.

$2x^2-4x-1=0 \xrightarrow{x\to x-1} 2(x-1)^2-4(x-1)-1=0 \to 2(x^2+1-2x)-4x+4-1=0$

$\to 2x^2+2-4x-4x+3=0 \to 2x^2-8x+5=0 \to x^2-4x+\frac{5}{2}=0$

توجه کنید که ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$ ، $k$ واحد از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ بیشتر هستند.

۱۲ - گزینه ۲ تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ وقتی $a>0$ است یعنی تابع دارای $Min$ است در بازه $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است.




$\longrightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2 \to a=2$

۱۳ - گزینه ۳ توجه کنید که: $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=1$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$ است.

$\alpha\beta^{-1}+\beta\alpha^{-1}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{1-2(-1)}{-1}=-3$

توجه کنید که $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ است.

۱۴ - گزینه ۴

$x^2+x-3=0 \xrightarrow[\text{۳ در } b\ ,\ \text{۳}^2 \text{ در } c]{\text{۳ برابر}} x^2+3x-27=0 \xrightarrow[x\to x+1]{\text{یک واحد کمتر}} (x+1)^2+3(x+1)-27=0$

$\to x^2+1+2x+3x+3-27=0 \to x^2+5x-23=0$

ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bkx+ck^2=0$ ، $k$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ است و ریشه‌های معادله‌ی $a(x+k)^2+b(x+k)+c=0$ ، $k$ واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ است.

۱۵ - گزینه ۲ چون نمودار سهمی، محور $x$ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند پس $\Delta>0$ و $\frac{-b}{a}>0$ (جمع ۲ ریشه) و $\frac{c}{a}>0$ (ضرب دو ریشه) است.

$I)\Delta>0 \to b^2-4ac>0 \to 16-4a(a-3)>0 \to 16-4a^2+12a>0$

$\to 4a^2-12a-16<0 \to a^2-3a-4<0 \to (a-4)(a+1)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<a<4$

$II)\frac{-b}{a}>0 \to \frac{-4}{a}>0 \to a<0$

$III)\frac{c}{a}>0 \to \frac{a-3}{a}>0 \to$

| a | $-\infty$ | | ۰ | | ۳ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عبارت $>$ ۰ | | + | ت ن | − | ○ | + | |

$\Longrightarrow a<۰$ یا $a>۳$

از اشتراک این سه جواب به $-۱<a<۰$ می‌رسیم، چون رأس سهمی زیر محور $x$ها قرار دارد بنابراین عرض رأس سهمی یعنی $\dfrac{۴ac-b^۲}{۴a}$ باید منفی باشد.

$$\frac{۴ac-b^۲}{۴a}<۰\rightarrow\frac{\overbrace{b^۲-۴ac}^{+}}{۴a}>۰\rightarrow ۴a>۰\rightarrow a>۰$$

و توجه کنید که $a>۰$ و $-۱<a<۰$ اشتراکی با هم ندارند.

۱۶ – گزینه ۲ شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ از هر ۴ ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور کند آن است که $\dfrac{c}{a}<۰$ باشد.

$$\frac{c}{a}<۰\rightarrow\frac{۱}{a^۲-۴}<۰\rightarrow a^۲-۴<۰\rightarrow a^۲<۴\rightarrow -۲<a<۲$$

۱۷ – گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)\ \ ,\ \ a^۵+b^۵=(a^۲+b^۲)(a^۳+b^۳)-a^۲b^۳-a^۳b^۲}$

در معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده $x_۱x_۲=\dfrac{c}{a}=۱$ و $x_۱+x_۲=\dfrac{-b}{a}=۳$ است.

$$x_۱x_۲^۶+x_۲x_۱^۶=\underbrace{x_۱x_۲}_{۱}(x_۲^۵+x_۱^۵)=x_۱^۵+x_۲^۵=(x_۱^۲+x_۲^۲)(x_۱^۳+x_۲^۳)-x_۱^۲x_۲^۳-x_۱^۳x_۲^۲$$

$$=((x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲)((x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲))-x_۱^۲x_۲^۲(x_۲+x_۱)$$

$$=(۹-۲)(۲۷-۹)-۱(۹)=(۷)(۱۸)-۳=۱۲۶-۳=۱۲۳$$

۱۸ – گزینه ۳ با توجه به نمودار معادله تابع $f$ دارای دو ریشه مثبت می‌باشد. لذا می‌توان شرط‌های زیر را بیان کرد:

$$f(x)=x^۲-mx+m+\tfrac{۵}{۴}$$

$$(I)\ \ \Delta>۰\rightarrow\Delta=m^۲-۴(۱)(m+\tfrac{۵}{۴})$$

$$\rightarrow\Delta=m^۲-۴m-۵>۰\rightarrow(m-۵)(m+۱)>۰$$

$$(II)\ \ S>۰\rightarrow-\tfrac{b}{a}>۰\rightarrow\tfrac{m}{۱}>۰\rightarrow m>۰$$

$$(III)P>۰\rightarrow\tfrac{c}{a}>۰\rightarrow m+\tfrac{۵}{۴}>۰\rightarrow m>-\tfrac{۵}{۴}$$

| m | $-\infty$ | | -1 | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | | + | ○ | - | ○ | + | |

$m\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$

حال بین این سه شرط اشتراک می‌گیریم:

$$(I)\cap(II)\cap(III)\rightarrow m>۵$$

۱۹ – گزینه ۳ برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های مطرح شده ابتدا باید این تابع را محاسبه نمود:

$$f(x)=x^۲-۶x+۸=(x-۲)(x-۴)$$

$$f(x+۳)=(x+۳-۲)(x+۳-۴)=(x+۱)(x-۱)=۰\rightarrow\begin{cases}x_۱=۱\\x_۲=-۱\end{cases}$$

$$x_۱\cdot x_۲=(۱)\times(-۱)=-۱$$

۲۰ – گزینه ۳ مرحلهٔ اول حل مسئله محاسبهٔ شیب خط گذرنده از $A$ و $B$ می‌باشد.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{b-a}{a-b}=-۱$$

خط مورد نظر بر خط $AB$ عمود است پس حاصلضرب شیب‌ها برابر $-۱$ است. پس شیب خط مورد نظر باید برابر ۱ باشد که فقط گزینهٔ سوم این ویژگی را دارد.

$$m=۱\rightarrow y-x=۰\rightarrow y=x$$

۲۱ – گزینه ۳ راه اول:

$$x^۴-۲۰x^۲+۳۶=۰\xrightarrow{t=x^۲}t^۲-۲۰t+۳۶=۰$$

$$\Rightarrow(t-۱۸)(t-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۲\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\\t=۱۸\Rightarrow x^۲=۱۸\Rightarrow x=\pm۳\sqrt{۲}\end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین ریشه برابر $۳\sqrt{۲}$ و کوچک‌ترین ریشه برابر $-۳\sqrt{۲}$ می‌باشد که اختلاف این دو مقدار برابر $۶\sqrt{۲}$ است.

راه دوم: برای حل این معادله دو مجذوری می‌توان عبارت را تجزیه نمود:

$$x^۴-۲۰x^۲+۳۶=۰\rightarrow(x^۲-۱۸)(x^۲-۲)=۰$$

$$\begin{cases}x^۲-۱۸=۰\rightarrow x^۲=۱۸\rightarrow x=\pm\sqrt{۱۸}=\pm۳\sqrt{۲}\\x^۲-۲=۰\rightarrow x^۲=۲\rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\end{cases}$$

با توجه به ریشه‌های حاصل $max$ ریشه $۳\sqrt{۲}$ , min ریشه $-۳\sqrt{۲}$ می‌باشد.

$$x_{\max}-x_{\min}=۳\sqrt{۲}-(-۳\sqrt{۲})=۶\sqrt{۲}$$

پس ۶ برابر $\sqrt{۲}$ می‌باشد.

۲۲ - گزینه ۲ برای حل معادله کافیست تغییر متغیر انجام دهیم:

$$۴x^۶+۱=۵x^۳ \to ۴x^۶-۵x^۳+۱=۰ \xrightarrow{x^۳=t} ۴t^۲-۵t+۱=۰$$

روش اول: مجموع ضرایب معادلهٔ حاصل صفر می‌باشد پس داریم:

$$\begin{cases} t=۱ \to x^۳=۱ \to x=۱ \\ t=\dfrac{c}{a}=\dfrac{۱}{۴} \to x^۳=\dfrac{۱}{۴} \to x=\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۴}} \end{cases}$$

لذا معادلهٔ اولیه دو ریشه دارد.

روش دوم:

$$۴t^۲-۵t+۱=۰ \to \Delta=(-۵)^۲-۴(۴)(۱)=۲۵-۱۶=۹$$

$$t=\frac{۵\pm\sqrt{۹}}{۲(۴)}=\frac{۵\pm ۳}{۸}\begin{cases} t=\dfrac{۱}{۴} \to x^۳=\dfrac{۱}{۴} \to x=\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۴}} \\ t=۱ \to x^۳=۱ \to x=۱ \end{cases}$$

۲۳ - گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی داده شده باشد (برای این کار جای $a$ و $c$ را عوض می‌کنیم) و سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می نویسیم که ریشه‌هایش ۳ واحد بیش‌تر از ریشه‌های معادله‌ی نوشته شده باشد و برای این کار $x$ را به ۳ $x-$ تبدیل می‌کنیم.

$$۲x^۲-۳x-۱=۰ \xrightarrow[\text{جای } c,a \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^۲-۳x+۲=۰ \xrightarrow[x\to x-۳]{\text{۳ واحد بیش‌تر}} -(x-۳)^۲-۳(x-۳)+۲=۰$$

$$\to -(x^۲+۹-۶x)-۳x+۹+۲=۰ \to -x^۲-۹+۶x-۳x+۹+۲=۰$$

$$\to -x^۲+۳x+۲=۰ \to x^۲-۳x-۲=۰$$

ریشه‌های معادله‌ی $cx^۲+bx+a=۰$، معکوس ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ هستند و ریشه‌های معادله‌ی $a(x-k)^۲+b(x-k)+c=۰$، $k$ واحد بیش‌تر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ هستند.

۲۴ - گزینه ۴ برای وجود دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت باید $\Delta>۰$ و $P<۰$ باشد. در مورد $S$ نمی‌توان اظهارنظر کرد. ضمناً توجه داشته باشید که شرط $P<۰$ شرط $\Delta>۰$ را تأمین می‌نماید.

$$(m-۲)x^۲-۲x+(m-۳)=۰$$

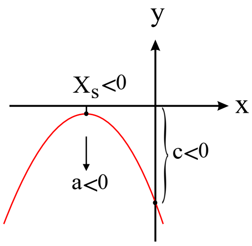
$$P<۰ \to \frac{c}{a}<۰ \to \frac{m-۳}{m-۲}<۰$$

جواب: $۲<m<۳$

| m | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| m − 3 | − | | − | 0 | + |
| m − 2 | − | 0 | + | 0 | + |
| P | + | ∞ | − ج | | + |

۲۵ - گزینه ۴ باتوجه به تصویر می‌توان گفت: سهمی $max$ دارد و رو به پایین است پس $a<۰$ و

$$x_s<۰ \to -\frac{b}{۲a}<۰ \to \frac{b}{a}>۰ \xrightarrow{a<۰} b<۰$$




نتیجه:

$$bc>۰\ ,\ a<۰$$

۲۶ - گزینه ۱ باتوجه به متن سؤال می‌توان نوشت: $۴x^۲-۸x+c=۰$

حاصل جمع ریشه‌ها $S=\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{-۸}{۴}=۲$

$$\alpha=\beta+۳$$

$$S=\alpha+\beta=\beta+۳+\beta=۲\beta+۳=۲ \to ۲\beta=-۱ \to \boxed{\beta=-\frac{۱}{۲}}$$

$$\alpha=\beta+۳=-\frac{۱}{۲}+۳=\frac{۵}{۲} \to \boxed{\alpha=\frac{۵}{۲}}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها $P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a} \to \dfrac{۵}{۲}\times\left(-\dfrac{۱}{۲}\right)=\dfrac{c}{۴} \to \dfrac{c}{۴}=-\dfrac{۵}{۴} \to \boxed{c=-۵}$

$$۲x^۲-x+c=۰ \xrightarrow{c=-۵} ۲x^۲-x-۵=۰ \to P=x_۱\cdot x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۵}{۲}$$

۲۷ - گزینه ۱ راه اول:

$$(x^2-1)^2-4x^2+7=0$$

$$\Rightarrow (x^4+1-2x^2)-4x^2+7=0 \Rightarrow x^4-6x^2+8=0$$

$$\xrightarrow{x^2=t} t^2-6t+8=0 \Rightarrow (t-2)(t-4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}-\sqrt{2}+2-2=0 \to \text{مجموع ریشه‌ها}=0$$

**نکته:** مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ در صورت وجود صفر است.

**راه دوم:** می‌توان با تغییر متغیر معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل کرد.

$$(x^2-1)^2-4x^2+7=0 \to (x^2-1)^2-4x^2+4+3=0$$

$$\to (x^2-1)^2-4(x^2-1)+3=0$$

$$\xrightarrow{x^2-1=t} t^2-4t+3=0 \to (t-1)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases}$$

$$x^2-1=1 \to x^2=2 \to x=\pm\sqrt{2}$$

$$x^2-1=3 \to x^2=4 \to x=\pm 2$$

مجموع ریشه‌های حاصل صفر می‌باشد.

۲۸ - گزینه ۲ برای حل باید ابتدا $S$ و $P$ معادله درجه دو حاضر را محاسبه نماییم.

$$ax^2+bx+c=0 \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$3x^2-21x+8=0$$

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-21}{3}=7 \qquad P=\frac{c}{a}=\frac{8}{3}$$

در این مرحله باید عبارت مطرح شده را برحسب $S$ و $P$ بازنویسی نماییم:

$$\alpha^2+\beta^2-2\beta\alpha=(\alpha+\beta)^2=S^2=7^2=49$$

۲۹ - گزینه ۴ ابتدا باید مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه دو مطرح شده را محاسبه نماییم.

$$ax^2+bx+c=0 \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$x^2-5x+2=0 \begin{cases} S=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-5}{1}=5 \\ P=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{1}=2 \end{cases}$$

حال باید عبارت مطرح شده را به $S$ و $P$ تبدیل کرد:

$$(\alpha+2)(\beta+2)=4+(\alpha+\beta)\times 2+\alpha\beta=4+2S+P=4+2(5)+2=16$$

۳۰ - گزینه ۳ برای مشخص کردن وضعیت معادله ابتدا باید وضعیت $S$ و $P$ و $\Delta$ را معین نمود:

$$5x^2+13x-7=0 \xrightarrow{a \text{ و } c \text{ مختلف العلامت}} \Delta=b^2-4ac>0$$ پس تا اینجا معادله دو ریشه متمایز دارد.

$$P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-\frac{7}{5} \to$$

حاصل‌ضرب ریشه منفی است، پس دو ریشه مختلف‌العلامت می‌باشند. با توجه به گزینه‌ها نیاز به بررسی پارامتر $S$ نمی‌باشد.

# پاسخنامه کلیدی

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ - ۲ | ۶ - ۴ | ۱۱ - ۳ | ۱۶ - ۲ | ۲۱ - ۳ | ۲۶ - ۱ |
| ۲ - ۴ | ۷ - ۴ | ۱۲ - ۲ | ۱۷ - ۴ | ۲۲ - ۲ | ۲۷ - ۱ |
| ۳ - ۱ | ۸ - ۲ | ۱۳ - ۳ | ۱۸ - ۳ | ۲۳ - ۱ | ۲۸ - ۲ |
| ۴ - ۲ | ۹ - ۳ | ۱۴ - ۴ | ۱۹ - ۳ | ۲۴ - ۴ | ۲۹ - ۴ |
| ۵ - ۱ | ۱۰ - ۲ | ۱۵ - ۲ | ۲۰ - ۳ | ۲۵ - ۴ | ۳۰ - ۳ |