فصل اول: هندسه و معادله

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x + c = 0$ از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + bx + 2 = 0$ ، به اندازه‌ی یک واحد بیشتر باشند، $b - c$ کدام است؟

۲ - بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + 4x + 5$ برابر ۹ است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

۳ - به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

۴ - ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. مقدار b کدام است؟

۵ - اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + 2ax + 3a + 1 = 0$ ، حاصل ضرب ریشه‌ها از مجموع ریشه‌ها، ۴ واحد کمتر باشد، مجموع مربعات ریشه‌ها چقدر است؟

۶ - ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - bx + c = 0$ دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 1 = 0$ هستند. b کدام است؟

۷ - به ازای کدام مقادیر m، نمودار $y = (m-2)x^2 + 3x + m + 2$ پایین محور x ها و مماس بر آن است؟

۸ - به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - mx + m - 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

۹ - اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم $4a + 2b = -c$ و $9a + 3b + c = 0$ ، مجموع ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱۰ - اگر α, β جواب‌های معادلهٔ $x^2 - 3x - 1 = 0$ بوده و داشته باشیم $P = \alpha\beta$ و $S = \alpha + \beta$. به ازای کدام مقدار k جواب‌های معادلهٔ $25x^2 - 5kx - 1 = 0$ برابر $\dfrac{\beta}{3S + 4P}$, $\dfrac{\alpha}{2S + P}$ است؟

۱۱ - اگر عبارت $y = ax(x+1) + 1$ همواره مثبت باشد، به جای a چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟

۱۲ - اگر مساحت مثلثی که راس‌های آن نقاط برخورد منحنی به معادله‌ی $y = x^2 - kx + 1$ با محورهای مختصات است، برابر یک واحد مربع باشد، k کدام است؟

۱۳ - به‌ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(2 - m)x^2 + 3x + m^2 = 0$ معکوس یکدیگرند؟

۱۴ - به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر k، خط $y = -2$ در بالاترین نقطه‌ی سهمی $f(x) = kx^2 + 2\sqrt{2}x + k - 1$ بر سهمی مماس است؟

۱۵ - اگر α , β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + kx + 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار k، ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ به صورت $(\sqrt{\alpha}\,,\ \sqrt{\beta})$ است؟

۱۶ - اگر رأس سهمی $y = 2x^2 - ax + b$ نقطه‌ی $\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ باشد، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

۱۷ - اگر در معادله‌ی $x^2 - 12x + 8m^3 = 0$ یکی از جواب‌ها مربع جواب دیگر باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

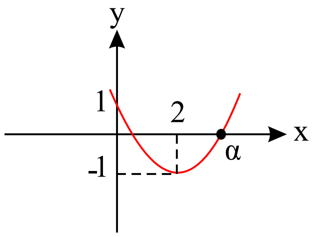
۱۸ - اگر ریشه‌های معادله‌ی $9x^2 + ax + b = 0$، از مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 9 = 0$، دو واحد کم‌تر باشد، a کدام است؟

۱۹ - به ازای چه حدودی از a تابع درجه‌ی دوم $f(x) = (a-1)x^2 - 2\sqrt{3}x + (a+1)$، از ناحیه‌ی سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

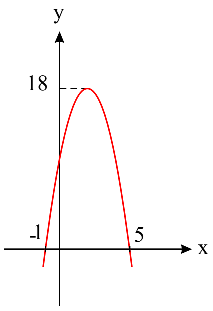
۲۰ - محیط مستطیلی ۱۸۰ واحد است. به ازای کدام طول مستطیل مساحت آن بیشترین مقدار است؟

۲۱ - مجموع جواب‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x = 1$ کدام است؟

۲۲ - باتوجه به شکل روبه‌رو که نمودار یک تابع درجه‌ی دو را نشان می‌دهد. مقدار α کدام است؟



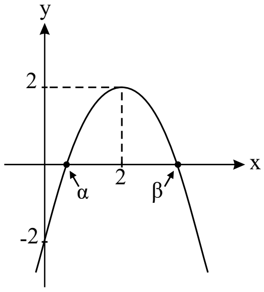
۲۳ - اگر شکل داده‌شده نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $A=-۳a+\frac{b}{۲}-c$ کدام است؟



۲۴ - معادلهٔ $\frac{x^{۲}+ax+۴}{x^{۲}-۲x-۳}=۰$ فقط یک ریشه دارد. چند مقدار برای a ممکن است؟

۲۵ - اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۶x+۴=۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$ کدام است؟

۲۶- با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$، حاصل عبارت $\alpha\beta^3 + 2\alpha^2$ کدام است؟



۲۷- اگر $\frac{1}{\alpha + 1}$ و $\frac{1}{\beta + 1}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند، در این صورت α و β ریشه‌های کدام معادله می‌باشند؟

۲۸- حاصل‌ضرب جواب‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2 + 3)^2 - 5x^2 - 11 = 0$ کدام است؟

۲۹- اگر α, β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2 + (c + 2)x + 8 = 0$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + bx + c = 0$ به صورت $\sqrt{\alpha\beta}$ و $2\sqrt{\alpha\beta}$ خواهد بود. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

۳۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 2(x + a) - 1$ در ربع سوم قرار دارد؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bkx + ck^۲ = ۰$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می باشند،

و ریشه‌های معادله‌ی $a(x-k)^۲ + b(x-k) + c = ۰$، k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می باشند.

روش اول:

$$۲x^۲ + bx + ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{دو برابر}} ۲x^۲ + ۲bx + ۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ + bx + ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow[x \to x-۱]{\text{یک واحد بیشتر}} (x-۱)^۲ + b(x-۱) + ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۱ - ۲x + bx - b + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + (b-۲)x - b + ۵ = ۰ \quad \text{مقایسه با} \quad x^۲ - ۷x + c = ۰$$

$$\text{پس:} \quad b - ۲ = -۷ \Rightarrow b = -۵ \,,\, -b + ۵ = c \Rightarrow c = ۱۰ \to b - c = -۱۵$$

روش دوم:

اگر y، ریشه‌ی جدید و x ریشه‌ی قدیم باشد داریم:

$$y = ۲x + ۱ \Rightarrow x = \frac{y-۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار می دهیم}} ۲(\frac{(y-۱)^۲}{۴}) + b(\frac{y-۱}{۲}) + ۲ = ۰ \to \frac{y^۲ - ۲y + ۱}{۲} + \frac{by - b}{۲} + ۲ = ۰$$

$$y^۲ - ۲y + ۱ + by - b + ۴ = ۰ \to y^۲ + (b-۲)y - b + ۵ = ۰$$

ادامه‌ی حل مسئله مشابه روش اول است.

۲ - گزینه ۲ می‌دانیم که بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم $(a < ۰)$ برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

$$y_s = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = ۹ \to \frac{۲۰a - ۱۶}{۴a} = ۹ \to ۳۶a = ۲۰a - ۱۶ \to ۱۶a = -۱۶ \to a = -۱$$

پس خط به معادله‌ی $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(۴)}{۲(-۱)} = ۲$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

۳ - گزینه ۱

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = a^۲ - ۸a + ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۶) > ۰$$

$\Rightarrow$

a	$-\infty$		۲		۶		$+\infty$
عبارت >۰		+	۰	−	۰	+	

$$\Rightarrow \begin{cases} a > ۶ \\ a < ۲ \end{cases}$$

۴ - گزینه ۲

معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، به صورت زیر است:

$$a(x-k)^۲ + b(x-k) + c = ۰$$

پس کافی است x را به $x - ۱$ تبدیل کنیم.

$$۳(x-۱)^۲ + ۷(x-۱) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x + ۳ + ۷x - ۷ + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + x - ۳ = ۰$$

برای مقایسه با $x^۲ + ax + b = ۰$ معادله را بر ۳ تقسیم می کنیم.

$$x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۱ = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۳} \,,\, b = -۱$$

۵ - گزینه ۲

$$x^۲ + ۲ax + ۳a + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = -۲a \\ P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = ۳a + ۱ \end{cases}$$

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها} = \text{مجموع ریشه‌ها} - ۴ \Rightarrow x' \cdot x'' = (x' + x'') - ۴ \Rightarrow P = S - ۴ \Rightarrow ۳a + ۱ = -۲a - ۴$$

$$\Rightarrow ۵a = -۵ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow \begin{cases} S = -۲a = ۲ \\ P = ۳a + ۱ = -۲ \end{cases}$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}: x'^۲ + x''^۲ = (x' + x'')^۲ - ۲x'x'' = ۲^۲ - ۲(-۲) = ۸$$

۶ - گزینه ۳ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^۲+b(x-k)+c=۰$$

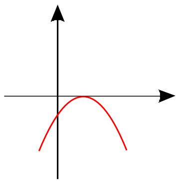
پس کافی است x را به $x-۲$ تبدیل کنیم.

$$x^۲-x-۱=۰\xrightarrow{x\to x-۲}(x-۲)^۲-(x-۲)-۱=۰$$

$$\to x^۲-۴x+۴-x+۲-۱=۰\to x^۲-۵x+۵=۰\xrightarrow{\text{مقایسه با } x^۲-bx+c=۰}b=۵$$

۷ - گزینه ۴

شرط مماس شدن سهمی بر محور از پایین، $\Delta=۰$ و $a<۰$ است.



$$\Delta=۳^۲-۴(m-۲)(m+۲)=۹-۴(m^۲-۴)=-۴m^۲+۲۵=۰\to m^۲=\frac{۲۵}{۴}$$

$$\Rightarrow m=\pm\frac{۵}{۲}\xrightarrow{m-۲<۰}m=-\frac{۵}{۲}$$

۸ - گزینه ۴ باید $\Delta>۰$ باشد:$(b^۲-۴ac>۰)$

$$\Delta=(-m)^۲-۴(m-۱)>۰\Rightarrow m^۲-۴m+۴>۰\Rightarrow(m-۲)^۲>۰$$

این نامساوی همواره برقرار است به غیر از حالتی که $m=۲$ باشد.

۹ - گزینه ۱ از رابطه‌ی $۴a+۲b+c=۰$ می‌توان فهمید که $x_۱=۲$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ است. (توجه کنید که اگر $x=۲$ ریشه‌ی معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، باید در معادله صدق کند. یعنی باید پس از جایگذاری $x=۲$ در معادله،تساوی برقرار باشد. یعنی $۴a+۲b+c=۰$) به همین ترتیب، از تساوی $۹a+۳b+c=۰$ می‌توان فهمید ریشه‌ی دیگر این معادله، $x_۲=۳$ است. مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با: $x_۱+x_۲=۲+۳=۵$

۱۰ - گزینه ۲ برای تشکیل معادلهٔ جدید به حاصل جمع (S') و حاصل ضرب (P') نیاز داریم؛ بنابراین:

$$S'=\frac{\alpha}{۲S+P}+\frac{\beta}{۳S+۴P}\xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-۱]{S=-\frac{b}{a}=۳}\frac{\alpha}{۲(۳)-۱}+\frac{\beta}{۳(۳)+۴(-۱)}=\frac{\alpha}{۵}+\frac{\beta}{۵}=\frac{\alpha+\beta}{۵}=\frac{S}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

$$P'=\frac{\alpha}{۲S+P}\times\frac{\beta}{۳S+۴P}=\frac{\alpha}{۵}\times\frac{\beta}{۵}=\frac{\alpha\beta}{۲۵}=\frac{P}{۲۵}=\frac{-۱}{۲۵}$$

حال با داشتن (S') و (P') معادلهٔ جدید را می‌نویسیم:

$$x^۲-S'x+P'=۰\to x^۲-\frac{۳}{۵}x-\frac{۱}{۲۵}=۰\xrightarrow{\times ۲۵}۲۵x^۲-۱۵x-۱=۰$$

با مقایسهٔ معادلهٔ حاصل با معادلهٔ $۲۵x^۲-۵kx-۱=۰$ داریم:

$$-۵k=-۱۵\to k=۳$$

۱۱ - گزینه ۲ برای آن که عبارت درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت یا بالای محور xها باشد، باید دو شرط زیر همواره برقرار باشد:

$$۱)\ \Delta<۰\qquad ۲)\ a>۰$$

ابتدا عبارت داده‌شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$y=ax\,(x+۱)+۱\ \Rightarrow\ y=ax^۲+ax+۱$$

حال برای آن که عبارت درجهٔ دوم همواره مثبت باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\Delta<۰\ \Rightarrow\ a^۲-۴a<۰\ \Rightarrow\ a(a-۴)<۰\ \Rightarrow\ ۰<a<۴\\ a>۰\ \Rightarrow\ a>۰\end{cases}$$

اشتراک دو شرط فوق برابر $۰<a<۴$ می‌شود. اما صبر کنید در صورت سؤال نگفته عبارت حتماً باید درجهٔ دوم باشد. به عبارت دیگر اگر $a=۰$ باشد نیز عبارت $y=ax^۲+ax+۱$ برابر عدد مثبت یک خواهد شد. پس $a=۰$ نیز درست است:

$$y=ax^۲+ax+۱\ \xrightarrow{a=۰}\ y=۰+۰+۱=۱$$

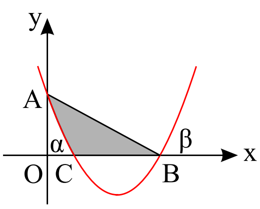
بنابراین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با: $(۰<a<۴)\cup\{۰\}=۰\leq a<۴$

که در بازهٔ فوق چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ موجود است.

۱۲ - گزینه ۳ به نمودار فرضی زیر توجه کنید: باتوجه به شکل در نقطه‌ی برخورد منحنی با محور yها، $x=۰$ است.

$$x=۰\xrightarrow{\text{تابع}}y_A=۱$$

نقاط برخورد منحنی با محور xها هم، همان ریشه‌های تابع هستند. حال برای محاسبه‌ی مساحت مثلث به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$S=\frac{(BC)(OA)}{۲}\xrightarrow[BC=|\alpha-\beta|]{OA=۱}S=\frac{|\alpha-\beta|(۱)}{۲}=\frac{|\alpha-\beta|}{۲}$$

چون مساحت مثلث برابر یک است و قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها در تابع درجه‌ی دوم برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است بنابراین:

$$1=\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{2}\Rightarrow 2|a|=\sqrt{\Delta}\Rightarrow 2=\sqrt{k^2-4}\Rightarrow 4=k^2-4\Rightarrow k=\pm 2\sqrt{2}$$

۱۳ - گزینه ۱ اگر دو ریشه، معکوس یکدیگر باشند، حاصل‌ضربشان یک است.

$$x'x''=1\Rightarrow \frac{c}{a}=1\Rightarrow \frac{m^2}{2-m}=1\Rightarrow m^2+m-2=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases} m=1\\ m=\frac{c}{a}=-2\end{cases}$$

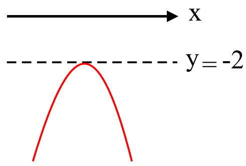
$$m=1\xrightarrow{\text{معادله}}x^2+3x+1=0\ :\ \Delta=b^2-4ac=9-4>0\ :\ \text{ق ق}$$

$$m=-2\xrightarrow{\text{معادله}}4x^2+3x+4=0\ :\ \Delta=b^2-4ac=9-64<0\ :\ \text{غ ق ق}$$

۱۴ - گزینه ۲ با توجه به شکل زیر بالاترین نقطه‌ی سهمی یا همان عرض ماکسیمم تابع برابر -2 است. در نتیجه:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=-2\to\frac{4(k)(k-1)-8}{4k}=-2\to 4k^2-4k-8=-8k\Rightarrow 4k^2+4k-8=0$$

$$\to k^2+k-2=0\Rightarrow (k+2)(k-1)=0\Rightarrow k=1\ ,\ k=-2$$



اما چون تابع ماکسیمم دارد، باید ضریب x^2 منفی باشد، یعنی: $k<0$. پس تنها $k=-2$ قابل قبول است.

۱۵ - گزینه ۲ با توجه به معادله‌ی $x^2+kx+1=0$ داریم:

حاصل‌جمع ریشه‌ها : $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-k$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها : $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$

چون ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$، به صورت $\{\sqrt{\alpha}\,,\ \sqrt{\beta}\}$ است.

بنابراین:

$$S'=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\frac{-b}{a}=4\xrightarrow{\text{توان } 2}\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=16$$

$$\to -k+2\sqrt{1}=16\Rightarrow -k=14\Rightarrow k=-14$$

۱۶ - گزینه ۲ طول رأس سهمی ازرابطه‌ی $x_s=\frac{-b}{2a}$ بدست می‌آید.

$$x_s=1\to\frac{-b}{2a}=1\to\frac{a}{2(2)}=1\to a=4$$

از طرف مختصات رأس سهمی در معادله‌ی سهمی، صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{صدق}}1=2-a+b\to 1=2-4+b\to b=3\to a^2+b^2=16+9=25$$

۱۷ - گزینه ۲

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=12\ ,\ \ P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=8m^2$$

فرض : $\alpha=\beta^2\xrightarrow{\alpha+\beta=12}\beta^2+\beta=12\Rightarrow\beta^2+\beta-12=0\Rightarrow(\beta+4)(\beta-3)=0$

$$\to\begin{cases}\beta=-4\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}16+48+8m^3=0\to 8m^3=-64\to m^3=-8\to m=-2\\ \beta=3\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}9-36+8m^3=0\to 8m^3=27\to m^3=\frac{27}{8}\to m=\frac{3}{2}\end{cases}$$

هر دو m بدست آمده، باعث منفی شدن Δ نمی‌شوند و هر دوی آنها قابل قبول هستند بنابراین:

$$-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

۱۸ - گزینه ۲

کافی است ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-9=0$ را به دست آوریم.

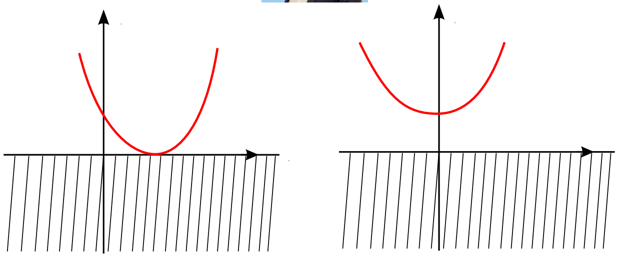
$$\Delta=b^2-4ac=9-4(2)(-9)=9+72=81\to x_1,x_2=\frac{3\pm9}{4}=3,-\frac{3}{2}$$

$$x'_1=\frac{1}{x_1^2}-2=\frac{1}{9}-2=-\frac{17}{9}\quad \text{و}\quad x'_2=\frac{1}{x_2^2}-2=\frac{1}{\frac{9}{4}}-2=\frac{4}{9}-2=-\frac{14}{9}$$

$$x^2-Sx+P=0\to x^2-(-\frac{17}{9}-\frac{14}{9})x+\underbrace{(-\frac{17}{9})(-\frac{14}{9})}_{P}=0\to x^2+\frac{31}{9}x+P=0$$

$$\xrightarrow{\times 9}9x^2+31x+9P=0\xrightarrow{\text{مقایسه با } 9x^2+ax+b=0}a=31$$

۱۹ - گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر است.



برای اینکه یک سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب x^2 مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta \leq 0$ باشد.

$$Min \Rightarrow \ x^2 \ \text{ضریب} > 0 \Rightarrow a-1>0 \rightarrow a>1 \qquad (I)$$

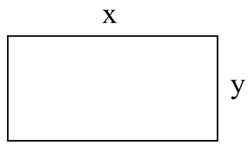
$$\Delta \leq 0 \rightarrow \Delta = b^2-4ac = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4(a-1)(a+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 12-4a^2+4 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 \geq 16 \Rightarrow a^2 \geq 4$$

$$\Rightarrow a \leq -2 \ \text{یا}\ a \geq 2 \qquad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $a \geq 2$ می‌رسیم.

۲۰ - گزینه ۴



$$\text{محیط مستطیل} = 180 \ \rightarrow 2\,(x+y)=180 \ \rightarrow x+y=90 \rightarrow y=90-x$$

$$\text{مساحت مستطیل} = xy = x\,(90-x) = -\,x^2+90x \ :\text{تابع درجه‌ی دوم}$$

$$x_{Max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{-2} = 45$$

۲۱ - گزینه ۱

$$\left(x^2+3x+1\right)^2 + x^2+3x-1 = 0 \rightarrow \left(x^2+3x+1\right)^2 + x^2+3x+1-2=0$$

$$\xrightarrow{x^2+3x+1=A} A^2+A-2=0 \rightarrow (A+2)(A-1)=0$$

$A=-2 \rightarrow x^2+3x+1=-2 \rightarrow x^2+3x+3=0 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=9-12<0$:ریشه‌ی حقیقی ندارد

$A=1 \rightarrow x^2+3x+1=1 \rightarrow x^2+3x=0 \rightarrow x(x+3)=0 \rightarrow x=0\ ,\ x=-3 \rightarrow$ مجموع ریشه‌ها $=-3$

۲۲ - گزینه ۳ صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=ax^2+bx+c$ می‌باشد و نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$ رأس سهمی است‌که درتابع صدق می‌کندوطولش ازرابطه‌ی $x_s=\dfrac{-b}{2a}$ به دست می‌آید

در ضمن نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ نیز روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می‌کند.

$$x_s=\frac{-b}{2a} \rightarrow 2=\frac{-b}{2a} \rightarrow 4a=-b \ \text{و}\ \left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -1=4a+2b+c \ \text{و}\ \left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1=c$$

$$-1=4a+2b+c \xrightarrow[c=1]{4a=-b} -1=-b+2b+1 \rightarrow b=-2\ ,\ a=\frac{1}{2}$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$ است و باتوجه به شکل، $x=\alpha$ ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $y=0$ است.

$$y=0 \xrightarrow{\times 2} x^2-4x+2=0 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=16-8=8$$

$$\text{ریشه‌ی بزرگتر} = \frac{4+\sqrt{8}}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$$

۲۳ - گزینه ۱ چون تابع درجهٔ ۲ محور xها را در $x=5$ و $x=-1$ قطع می‌کند، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=a(x+1)(x-5)$ نوشته می‌شود. ضمناً طول رأس سهمی وسط دو ریشه است، پس داریم:

$$x_S=\frac{5+(-1)}{2} \rightarrow x_S=2 \quad , \quad S\left|\begin{matrix}2\\18\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 18=a(3)(-3) \rightarrow a=-2$$

$$f(x)=a(x+1)(x-5) \overset{a=-2}{=\!=\!=} -2(x+1)(x-5) = -2(x^2-4x-5)$$

$$\rightarrow f(x)=-2x^2+8x+10 \rightarrow a=-2\ ,\ b=8\ ,\ c=10$$

پس: $A=-3a+\dfrac{b}{2}-c=-3(-2)+\dfrac{8}{2}-10 \rightarrow A=0$

۲۴ - گزینه ۴

$$\frac{x^۲+ax+۴}{x^۲-۲x-۳}=۰\rightarrow x^۲+ax+۴=۰\,,\ \rightarrow x^۲-۲x-۳\neq ۰\rightarrow (x-۳)(x+۱)\neq ۰$$

$$\rightarrow x\neq ۳\,,\ x\neq -۱$$

برای این‌که معادله یک ریشه داشته باشد، حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

۱- معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ یک ریشه داشته باشد، پس باید $\Delta=۰$ باشد و داریم:

$$a^۲-۴(۱)(۴)=۰\rightarrow a^۲-۱۶=۰\rightarrow a=\pm۴$$

$$\begin{cases} a=۴\rightarrow x^۲+۴x+۴=۰\rightarrow (x+۲)^۲=۰\rightarrow x=-۲\ \checkmark \\ a=-۴\rightarrow x^۲-۴x+۴=۰\rightarrow (x-۲)^۲=۰\rightarrow x=۲\ \checkmark \end{cases}$$

۲- معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=۳$ باشد و داریم:

$$۳^۲+a(۳)+۴=۰\rightarrow ۳a=-۱۳\rightarrow a=-\frac{۱۳}{۳}\rightarrow x^۲-\frac{۱۳}{۳}x+۴=۰$$

$\rightarrow (x-۳)(x-\frac{۴}{۳})=۰\rightarrow x=۳\,,\ x=\frac{۴}{۳}\rightarrow$ $a=-\frac{۱۳}{۳}$ قابل قبول است.

۳- معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=-۱$ باشد و داریم:

$$(-۱)^۲+a(-۱)+۴=۰\rightarrow -a+۵=۰\rightarrow a=۵\rightarrow x^۲+۵x+۴=۰$$

$\rightarrow (x+۱)(x+۴)=۰\rightarrow x=-۱\,,\ x=-۴\rightarrow$ $a=۵$ قابل قبول است.

۴ مقدار برای a داریم یعنی $\{\pm۴,-\frac{۱۳}{۳},۵\}$

۲۵ - گزینه ۴

$$x^۲-۶x+۴=۰\rightarrow \begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۶ \\ \text{ضرب ریشه‌ها}: \alpha\beta=\frac{c}{a}=۴ \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}+\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}=A\rightarrow A^۲=\frac{\alpha}{\beta^۲}+\frac{\beta}{\alpha^۲}+\frac{۲\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\rightarrow A^۲=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{(\alpha\beta)^۲}+\frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۲}+\frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\rightarrow A^۲=\frac{۶^۳-۳(۴)(۶)}{۱۶}+\frac{۲}{۲}=\frac{۱۴۴}{۱۶}+۱=۹+۱\rightarrow A^۲=۱۰\xrightarrow{A>۰} A=\sqrt{۱۰}$$

۲۶ - گزینه ۱

$$f(x)=ax^۲+bx+c$$

$$f(۰)=-۲\rightarrow a(۰)^۲+b(۰)+c=-۲\rightarrow \boxed{c=-۲}$$

$$f(۲)=۲\rightarrow a(۲)^۲+b(۲)+c=۲\rightarrow ۴a+۲b=۴$$

$$\text{رأس سهمی}\ x_S=۲\rightarrow -\frac{b}{۲a}=۲\rightarrow -b=۴a$$

$$\begin{cases} ۴a+۲b=۴ \\ ۴a=-b \end{cases}\rightarrow -b+۲b=۴\rightarrow \boxed{b=۴}\ ,\ \boxed{a=-۱}$$

$$\rightarrow f(x)=-x^۲+۴x-۲=۰\rightarrow \text{است.}\ f(x)\ \text{ریشه‌های سهمی}\ \alpha,\beta\rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{۴}{-۱}=۴ \\ P=\alpha\beta=\frac{-۲}{-۱}=۲ \end{cases}$$

$$\alpha\beta^۳+۲\alpha^۲=\alpha\beta(\beta^۲)+۲\alpha^۲=۲\beta^۲+۲\alpha^۲=۲(\alpha^۲+\beta^۲)$$

$$=۲(S^۲-۲P)=۲(۴^۲-۲(۲))=۲(۱۶-۴)=۲۴$$

۲۷ - گزینه ۳

$$x^2+2x-5=0 \to \begin{cases} S=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2}{1}=-2 \\ P=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{5}{1}=-5 \end{cases}$$

$$P=\frac{1}{\alpha+1}\times\frac{1}{\beta+1}=-5 \to (\alpha+1)(\beta+1)=-\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$S=\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=-2 \to \frac{\alpha+\beta+2}{-\frac{1}{5}}=-2$$

$$\to \alpha+\beta+2=\frac{2}{5} \to \boxed{\alpha+\beta=-\frac{8}{5}} \quad (2)$$

طبق رابطهٔ (۱) داریم:

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-\frac{1}{5} \xrightarrow{(2)} \alpha\beta-\frac{8}{5}+1=-\frac{1}{5}$$

معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌هایش برابر $-\frac{8}{5}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌هایش $\frac{2}{5}$ باشد را می‌نویسیم:

$$\to \boxed{\alpha\beta=\frac{2}{5}}$$

$$\to x^2-(-\frac{8}{5})x+\frac{2}{5}=0 \xrightarrow{\times 5} 5x^2+8x+2=0$$

۲۸ - گزینه ۲ روش اول: با توجه به معادله، با یک معادلهٔ درجهٔ ۴ برخورد کرده‌ایم؛ می‌توان با یک تغییر متغیر آن را به یک معادلهٔ درجه ۲ تبدیل کرد.

$$(x^2+3)^2-5x^2-11=0 \xrightarrow[x^2=t-3]{x^2+3=t} t^2-5(t-3)-11=0$$

$$t^2-5t+15-11=0 \to t^2-5t+4=0 \to (t-1)(t-4)=0$$

$$\begin{cases} t=1 \to x^2+3=1 \to x^2=-2 & \text{غیر قابل قبول} \\ t=4 \to x^2+3=4 \to x^2=1 \to x\pm 1 \to x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}$$

روش دوم:

$$\left(x^2+3\right)^2-5x^2-11=0 \to x^4+6x^2+9-5x^2-11=0$$

$$\to x^4+x^2-2=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2+t-2=0$$

$$\to (t-1)(t+2)=0 \begin{cases} t=1 \to x^2=1 \to x_1=1\ ,\ x_2=-1 \\ t=-2 \to x^2=-2 \to \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\to x_1\cdot x_2=-1$$

۲۹ - گزینه ۱ برای حل مسئله ابتدا مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ اول را محاسبه می‌نماییم.

$$2x^2+(c+2)x+8=0 \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-(c+2)}{2} \quad (I) \\ P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{8}{2}=4 \end{cases}$$

حال سراغ معادلهٔ دوم برویم: $\begin{cases} x_1=\sqrt{\alpha\beta} \\ x_2=2\sqrt{\alpha\beta} \end{cases}$ $x^2+bx+c=0\ ,$

$$\text{جدید } S=x_1+x_2=\sqrt{\alpha\beta}+2\sqrt{\alpha\beta}=3\sqrt{\alpha\beta}=3\sqrt{P}=3\sqrt{4}=6$$

$$\text{جدید } P=x_1\cdot x_2=\sqrt{\alpha\beta}\times 2\sqrt{\alpha\beta}=2\alpha\beta=2(4)=8$$

حال می‌توان با فرمول زیر معادله را بازنویسی کرد: $x^2-Sx+P=0$.

$$\left.\begin{array}{l} x^2-6x+8=0 \\ x^2+bx+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c=8 \xrightarrow{(I)} \alpha+\beta=\frac{-(c+2)}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

۳۰ - گزینه ۳ ابتدا تابع درجه‌ی دوم داده شده را به‌صورت $f(x)=ax^2+2x+2a-1$ مرتب می‌کنیم. چون تابع درجه‌ی دوم دارای Min است بنابراین ضریب x^2 باید مثبت باشد یعنی $a>0$ است (I). چون تابع دارای Min است و در ربع سوم قرار دارد پس محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز قطع می‌کند یعنی $\Delta>0$ است.

$\Delta > 0 \to b^2 - 4ac > 0 \to 4 - 4a(2a-1) > 0 \to 4 - 8a^2 + 4a > 0$

$\Longrightarrow 8a^2 - 4a - 4 < 0 \Longrightarrow$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
عبارت >0		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Longrightarrow -\frac{1}{2} < a < 1 \ : II$

از اشتراک I و II به جواب $0 < a < 1$ می‌رسیم.

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $-\frac{b}{2a}$ نیز باید منفی باشد.

$\frac{-b}{2a} < 0 \to \frac{-2}{2a} < 0 \to$ برقرار است چون $0 < a < 1$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۳	۱۱ - ۲	۱۶ - ۲	۲۱ - ۱	۲۶ - ۱
۲ - ۲	۷ - ۴	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۳
۳ - ۱	۸ - ۴	۱۳ - ۱	۱۸ - ۲	۲۳ - ۱	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۱	۲۴ - ۴	۲۹ - ۱
۵ - ۲	۱۰ - ۲	۱۵ - ۲	۲۰ - ۴	۲۵ - ۴	۳۰ - ۳