سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر عدد ۳، بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^{۲} - (۲m+۱)x + m^{۲} + m = ۰$ باشد، حدود m کدام است؟

۲ - اگر β, α ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲} - ۲x - ۱ = ۰$ باشند، در کدام یک از معادلات زیر، ریشه‌ها برابر $\frac{\alpha^{۲} - ۲\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta^{۲} - ۲\beta}{\alpha}$ می‌باشد؟

۳ - ریشه‌های کدام معادله از ریشه‌های معادله‌ی $۳x^{۲} + ۵x = \frac{۱}{۴}$ به مقدار $\frac{۱}{۲}$ بیشتر است؟

۴ - به ازای کدام مقدار m، منحنی تابع $y = (m+۲)x^{۲} + ۴x + m - ۱$ همواره بالای محور xهاست؟

۵ - مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^{۲}+x)^{۲} - ۱۸(x^{۲}+x) + ۷۲ = ۰$ کدام است؟

۶- منحنی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ محور طول‌ها را در ۳ و ۱ و محور عرض‌ها را در ۶ قطع کرده است. کمترین مقدار y کدام است؟

۷- اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

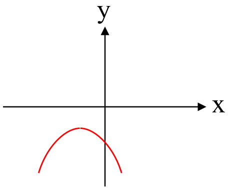
۸- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x-5=0$ باشند، حاصل $\alpha^3+14\beta$ کدام است؟

۹- اگر $f(2x-1)=4x^2-4x$ باشد. رأس سهمی $y=f(1+2x)$ کدام نقطه است؟

۱۰- اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور xها را در دو نقطه، به طول‌های -1 و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

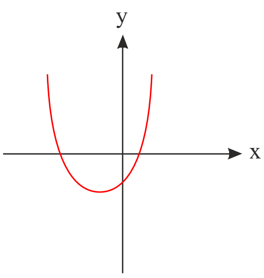
۱۱- اگر در معادله‌ی $ax^2-bx+c=0$ رابطه‌ی $25a+5b+c=0$ بین ضرایب برقرار باشد، یکی از ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱۲ـ به ازای چه حدودی از m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = mx^{۲} + ۴\sqrt{۲}x + m - ۲$ به‌صورت مقابل است؟



۱۳ـ اگر مجموع مجذورات سه ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(x-۲)(x^{۲}+mx+m+۳)=۰$ برابر ۱۳ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m چند عضو دارد؟

۱۴ـ اگر ضابطهٔ سهمی مقابل به‌صورت $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ باشد، کدام گزینه درست است؟



۱۵ـ اگر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ $(x_{۱} < x_{۲})$ ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} - ۳mx + ۴m - ۲ = ۰$ باشند و رابطهٔ $S + P = ۵$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن $x_{۱} + ۱$ و $x_{۲} + ۲$ باشد، کدام است؟

۱۶ - مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $(x-1)^4+2x=x^2+7$ کدام است؟

۱۷ - اگر بیشترین مقدار تابع $f(x)=(k+3)x^2-4x+k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

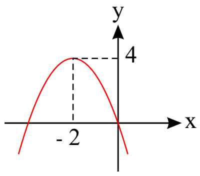
۱۸ - اگر $2\alpha+1$ و $2\beta+1$ ریشه‌های معادله‌ی $2x(x+2)=3$ باشند، کدام معادله ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است؟

۱۹ - به هر یک از جواب‌های معادله $x^2+2x-5=0$ دو واحد اضافه می‌کنیم. به حاصل‌ضرب آنها چند واحد اضافه می‌شود؟

۲۰ - به ازای کدام مقدار m، در معادله‌ی $x^2+8mx+4m+8=0$، یکی از جواب‌ها، ۳ برابر جواب دیگر است؟

۲۱ - ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-3x-1=0$ ، یک واحد کمتر است؟

۲۲ - با توجه به نمودار تابع $f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$، مقدار a کدام است؟



۲۳ - به ازای چه حدودی از a، نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=ax^۲-(a-۴)x+\frac{۹}{۴}$ فقط از ناحیه‌ی چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۲۴ - به‌ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ ، برابر ۶ می‌باشد؟

۲۵ - به ازای کدام مقدار m، مجموع معکوس ریشه‌های متمایز معادله‌ی $x^۲-m^۲x+(m+۲)=۰$ برابر ۱ است؟

۲۶ - اگر ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+ax+b=۰$ دو برابر معکوس ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۷x+۳=۰$ باشد، مقدار a کدام است؟

۲۷ - به ازای کدام مقدار m، رابطه‌ی $x_۱x_۲+x_۱+x_۲=۴$ بین ریشه های حقیقی معادله‌ی $mx^۲+(۲m-۱)x=۵$ برقرار است؟

۲۸ - به ازای چه حدودی از a، نمودار $y=ax^۲+۲x+a$ همواره بالای محورxها قرار دارد؟

۲۹ - حدود m کدام باشد تا هیچ نقطه‌ای از تابع $y=x^۲-۴x+m$ دارای فاصله‌ی ۵ از محور xها نباشد؟

۳۰ - اگر قدر مطلق تفاضل ریشه‌های تابع $f(x)=-x^۲+x-m$ برابر ۳ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳

$$x^{۲}-(۲m+۱)x+m(m+۱)=۰\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x-m)(x-(m+۱))=۰\to x=m\ ,\ x=m+۱$$

باتوجه به صورت سوال داریم:

$$m<۳<m+۱\to\begin{cases}m<۳\\ ۳<m+۱\to ۲<m\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}۲<m<۳\ \text{یا}\ m\in(۲,۳)$$

۲ ـ گزینه ۳

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۲\ \text{و}\ P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

چون α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۲x-۱=۰$ می‌باشند بنابراین در معادله صدق می‌کنند. پس داریم:

$$\alpha\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}\alpha^{۲}-۲\alpha-۱=۰\to\alpha^{۲}-۲\alpha=۱\to\frac{\alpha^{۲}-۲\alpha}{\beta}=\frac{۱}{\beta}$$

$$\beta\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}\beta^{۲}-۲\beta-۱=۰\to\beta^{۲}-۲\beta=۱\to\frac{\beta^{۲}-۲\beta}{\alpha}=\frac{۱}{\alpha}$$

یعنی باید معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی داده شده باشد. برای این منظور کافی است جای a,c را عوض کنید.

$$x^{۲}-۲x-۱=۰\xrightarrow{\text{جای } a,c \text{ عوض}}-x^{۲}-۲x+۱=۰\to x^{۲}+۲x-۱=۰$$

۳ ـ گزینه ۲ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^{۲}+b(x-k)+c=۰$$

کافی است در معادله‌ی $۳x^{۲}+۵x-\frac{۱}{۴}=۰$ ، x را به $x-\frac{۱}{۲}$ تبدیل کنیم.

$$۳(x-\frac{۱}{۲})^{۲}+۵(x-\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۴}=۰\to ۳x^{۲}-۳x+\frac{۳}{۴}+۵x-\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۴}=۰\to ۳x^{۲}+۲x-۲=۰$$

۴ ـ گزینه ۱ y همواره مثبت است و می دانیم شرط مثبت بودن یک عبارت درجه‌ی دوم آن است که $\Delta<۰\ ,\ a>۰$ باشد.

$$I: a>۰\to m+۲>۰\to m>-۲$$

$$II:\ \Delta<۰\to ۱۶-۴(m+۲)(m-۱)<۰\to ۱۶-۴m^{۲}+۴m-۸m+۸<۰$$

$$\to ۴m^{۲}+۴m-۲۴>۰\to m^{۲}+m-۶>۰\to(m+۳)(m-۲)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}m<-۳, m>۲$$

از اشتراک $I\ ,\ II$ به جواب $m>۲$ می رسیم.

۵ ـ گزینه ۲ $x^{۲}+x$ را متغیر جدید A در نظر می‌گیریم. معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$A^{۲}-۱۸A+۷۲=۰\Rightarrow(A-۱۲)(A-۶)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=۱۲\Rightarrow x^{۲}+x-۱۲=۰\xrightarrow{\Delta>۰}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۱\\ A=۶\Rightarrow x^{۲}+x-۶=۰\xrightarrow{\Delta>۰}\alpha'+\beta'=-\frac{b}{a}=-۱\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta+\alpha'+\beta'=-۲$$

۶ ـ گزینه ۲ ابتدا سه نقطه را در تابع صدق داده تا a و b و c به دست آیند.

$$\left.\begin{array}{l}A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.\to ۰=a+b+c\\ B\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.\to ۰=۹a+۳b+c\end{array}\right\}\to\begin{cases}a+b=-۶\\ ۹a+۳b=-۶\end{cases}\to a=۲\ ,\ b=-۸$$

$$C\left|\begin{matrix}۰\\۶\end{matrix}\right.\to ۶=c$$

کمترین مقدار تابع درجهٔ دوم همان عرض نقطهٔ S (رأس سهمی) است.

$$y=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴۸-۶۴}{۸}=\frac{-۱۶}{۸}=-۲$$

۷ ـ گزینه ۴

خط $x=۲$ محور تقارن تابع درجه‌ی دوم داده شده است.

$$x=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow x=۲=-\frac{۱}{۲a-۲}\Rightarrow ۴a-۴=-۱\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

$$y=-\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۳\xrightarrow[y=۰]{\times(-۴)}y=x^{۲}-۴x-۱۲=۰\Rightarrow(x-۶)(x+۲)=۰\begin{cases}x=-۲\\ x=۶\end{cases}$$

چون طول مثبت را خواسته پس $x=۶$ جواب مسأله است.

۸ - گزینه ۱ α ریشه‌ی معادله است پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \alpha^۲ - ۳\alpha - ۵ = ۰ \to \alpha^۲ = ۳\alpha + ۵ \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^۳ = ۳\alpha^۲ + ۵\alpha$$

$$\to \alpha^۳ = ۳(۳\alpha + ۵) + ۵\alpha \to \alpha^۳ = ۱۴\alpha + ۱۵$$

$$\alpha^۳ + ۱۴\beta = ۱۴\alpha + ۱۵ + ۱۴\beta = ۱۴(\alpha + \beta) + ۱۵ = ۱۴(-\frac{b}{a}) + ۱۵ = ۱۴(۳) + ۱۵ = ۵۷$$

۹ - گزینه ۴

ابتدا باید تابع $f(x)$ را پیدا کنیم.

$$f(۲x-۱) = ۴x^۲ - ۴x \to f(۲x-۱) = ۴x^۲ - ۴x + ۱ - ۱ \to f(۲x-۱) = (۲x-۱)^۲ - ۱$$

$$\xrightarrow{۲x-۱=t} f(t) = t^۲ - ۱ \to f(x) = x^۲ - ۱$$

$$f(۱+۲x) = (۱+۲x)^۲ - ۱ = ۴x^۲ + ۴x$$

$$S\left|\begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ \frac{۴ac-b^۲}{۴a} \end{matrix}\right. \to S\left|\begin{matrix} -\frac{۴}{۸} \\ \frac{۰-۱۶}{۱۶} \end{matrix}\right. \to S\left|\begin{matrix} -\frac{۱}{۲} \\ -۱ \end{matrix}\right.$$

۱۰ - گزینه ۱ رأس سهمی روی نیمساز ربع اول $(y = x)$ قرار دارد، بنابراین مختصات آن به‌صورت $S\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right.$ است و چون سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول -۱ و ۳ قطع کرده است، طول رأس سهمی دقیقاً وسط -۱ و ۳ است.

$$x_S = \frac{-۱+۳}{۲} = ۱ \to S\left|\begin{matrix}۱\\ ۱\end{matrix}\right.$$

معادلهٔ سهمی: $y = a(x-۳)(x+۱) \xrightarrow[\text{صدق}]{S\left|\begin{smallmatrix}۱\\ ۱\end{smallmatrix}\right.} ۱ = a(-۲)(۲) \to -۴a = ۱ \to a = \frac{-۱}{۴}$

معادلهٔ سهمی: $y = \frac{-۱}{۴}(x-۳)(x+۱) \xrightarrow{x=۰} y = \frac{-۱}{۴}(-۳)(۱) = \frac{۳}{۴}$

توجه کنید اگر یک سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع کند، می‌توان معادلهٔ آن را به‌صورت $y = a(x-x_۱)(x-x_۲)$ نشان داد.

۱۱ - گزینه ۱ از رابطه‌ی $۲۵a + ۵b + c = ۰$ متوجه می‌شویم که یک ریشه‌ی معادله $x' = -۵$ است.

$(x' = -۵ \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} ۲۵a + ۵b + c = ۰)$ و می‌دانیم حاصل دو ریشه برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$x'x'' = \frac{c}{a} \to -۵x'' = \frac{c}{a} \to x'' = -\frac{c}{۵a}$$

۱۲ - گزینه ۴

$$Max \to x^۲ \text{ ضریب} < ۰ \to m < ۰ : I$$

$$\text{تابع، محورطول‌را قطع نمی‌کند} \to \Delta < ۰ \to b^۲ - ۴ac < ۰ \to ۳۲ - ۴m(m-۲) < ۰ \to ۳۲ - ۴m^۲ + ۸m < ۰$$

$$\to ۴m^۲ - ۸m - ۳۲ > ۰ \to m^۲ - ۲m - ۸ > ۰ \to (m-۴)(m+۲) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -۲ \text{ یا } m > ۴ : II$$

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $\frac{-b}{۲a}$ منفی می‌باشد.

$$\frac{-b}{۲a} < ۰ \to \frac{-۴\sqrt{۲}}{۲m} < ۰ \to m > ۰ : III$$

که اشتراک جواب‌های I و II و III تهی می‌باشد.

۱۳ - گزینه ۲

$$(x-۲)(x^۲ + mx + m + ۳) = ۰ \to \begin{cases} x = ۲ \\ x^۲ + mx + m + ۳ = ۰ \end{cases}$$

یک ریشه‌ی معادله $x = ۲$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ + mx + m + ۳ = ۰$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت مسأله $\underbrace{\alpha^۲ + \beta^۲ + ۲^۲}_{\text{مجموع مجذورات ریشه‌ها}} = ۱۳$ است.

$$\alpha^۲ + \beta^۲ + ۴ = ۱۳ \to \alpha^۲ + \beta^۲ = ۹ \to (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta = ۹ \xrightarrow[\alpha\beta = \frac{c}{a} = m+۳]{\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -m}$$

$$m^۲ - ۲(m+۳) = ۹ \to m^۲ - ۲m - ۱۵ = ۰ \to (m-۵)(m+۳) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} m=۵ \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^۲+۵x+۸=۰ \rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۲۵-۳۲<۰ \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\ m=-۳ \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^۲-۳x=۰ \rightarrow x(x-۳)=۰ \rightarrow x=۰, x=۳ \end{cases}$$

بنابراین فقط $m=-۳$ قابل قبول است.

۱۴ - گزینه ۳ راه‌حل اول: نکته: در مورد سهمی $y=ax^۲+bx+c$ داریم:

■ اگر $a>۰$ ($a<۰$)، آن‌گاه دهانهٔ سهمی رو به بالا (پایین) است و برعکس.

■ رأس سهمی نقطهٔ $(-\frac{b}{۲a}, f(-\frac{b}{۲a}))$ است.

■ عرض نقطهٔ تقاطع نمودار سهمی با محور yها برابر c است.

نمودار سهمی رو به بالا است، پس: $a>۰$

طول رأس سهمی منفی است، پس داریم: $-\frac{b}{۲a}<۰$، با توجه به اینکه $a>۰$ نتیجه می‌گیریم: $b>۰$

عرض نقطهٔ تقاطع نمودار سهمی با محور yها منفی است، پس: $c<۰$

در نتیجه:

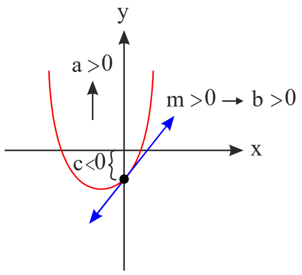
$$ab>۰ \ , \ ac<۰ \ , \ bc<۰ \ , \ abc<۰$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

راه‌حل دوم: در یک سهمی می‌توان از پارامترهای زیر برای تحلیل علامت a, b, c استفاده کرد:

$$f(x)=\underset{\substack{\downarrow \\ \text{جهت دهانهٔ سهمی}}}{a}x^۲+\overset{\substack{\text{شیب خط مماس در } x=۰ \\ \uparrow}}{b}\,x+\underset{\substack{\downarrow \\ \text{عرض از مبدأ}}}{c} \rightarrow a>۰, b>۰, c<۰$$

نتیجه: b و c هم‌علامت نیستند پس: $bc<۰$



۱۵ - گزینه ۲ نکته: در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$، مجموع ریشه‌ها برابر $S=\frac{-b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $P=\frac{c}{a}$ است.

نکته: اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو عدد حقیقی باشند، $S=x_۱+x_۲$ و $P=x_۱x_۲$. آنگاه معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $x_۱$ و $x_۲$ باشد عبارت است از: $x^۲-Sx+P=۰$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳mx+۴m-۲=۰$ برابر است با:

$$S=۳m \ , \quad P=۴m-۲$$

با جایگذاری این مقدار در رابطهٔ $S+P=۵$، داریم:

$$۳m+۴m-۲=۵ \Rightarrow ۷m=۷ \Rightarrow \boxed{m=۱}$$

با جایگذاری $m=۱$ در معادله، به معادلهٔ $x^۲-۳x+۲=۰$ خواهیم رسید.

$$x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۱,۲ \xrightarrow{x_۱<x_۲} x_۱=۱ \quad , \quad x_۲=۲$$

معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $x_۱+۱=۲$ و $x_۲+۲=۴$ باشد عبارت است از:

$$(x-۲)(x-۴)=۰ \rightarrow x^۲-۶x+۸=۰$$

۱۶ - گزینه ۲

$$(x-۱)^۴+۲x=x^۲+۷ \rightarrow (x-۱)^۴=x^۲-۲x+۱+۶ \rightarrow (x-۱)^۴=(x-۱)^۲+۶$$

$$(x-۱)^۲=A \rightarrow A^۲=A+۶ \rightarrow A^۲-A-۶=۰ \rightarrow (A-۳)(A+۲)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=۳ \rightarrow (x-۱)^۲=۳ \rightarrow x-۱=\pm\sqrt{۳} \rightarrow \begin{cases} x=۱+\sqrt{۳} \\ x=۱-\sqrt{۳} \end{cases} \\ A=-۲ \rightarrow (x-۱)^۲=-۲ \rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = (\sqrt{۳}+۱)^۲+(-\sqrt{۳}+۱)^۲=۳+۱+۲\sqrt{۳}+۳+۱-۲\sqrt{۳}=۸$$

۱۷ - گزینه ۱ بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم همان عرض رأس سهمی است.

$$y_S=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=۰\Rightarrow ۴ac-b^۲=۰\Rightarrow ۴(k+۳)(k)-۱۶=۰\Rightarrow k^۲+۳k-۴=۰$$
$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}k=۱\\ k=\frac{c}{a}=-۴\end{cases}$$

تابع درجهٔ دوم وقتی دارای Max است که ضریب $x^۲$ منفی باشد، پس فقط $k=-۴$ قابل قبول است.

۱۸ - گزینه ۳ $۲\alpha+۱$ و $۲\beta+۱$ ریشه‌های معادله $۲x^۲+۴x-۳=۰$ می‌باشند، پس:

$$\begin{cases}(۲\alpha+۱)+(۲\beta+۱)=-\frac{b}{a}=-\frac{۴}{۲}=-۲\Rightarrow \alpha+\beta=-۲\\ (۲\alpha+۱)(۲\beta+۱)=\frac{c}{a}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴\alpha\beta+۲\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-۲}+۱=-\frac{۳}{۲}\rightarrow \alpha\beta=\frac{۳}{۸}\end{cases}$$

$$\begin{cases}S=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-۲}{\frac{۳}{۸}}=\frac{-۱۶}{۳}\\ P=\frac{۱}{\alpha}\cdot\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۸}{۳}\end{cases}$$

$$x^۲-Sx+P=۰\rightarrow x^۲-(-\frac{۱۶}{۳})x+\frac{۸}{۳}=۰\xrightarrow{\times۳}۳x^۲+۱۶x+۸=۰$$

۱۹ - گزینه ۴

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+۲x-۵=۰$ باشند، در این صورت:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۲\ ,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=-۵$$

سوال، حاصلضرب $(\alpha+۲)(\beta+۲)$ را خواسته است بنابراین:

$$(\alpha+۲)(\beta+۲)=\alpha\beta+۲\alpha+۲\beta+۴=\alpha\beta+۲(\alpha+\beta)+۴=\alpha\beta-۴+۴=\alpha\beta$$

پس به حاصلضرب مقداری اضافه نمی‌شود.

۲۰ - گزینه ۴ شرط آنکه در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، یک ریشه‌ی معادله، k برابر ریشه‌ی دیگر باشد آن است که داشته باشیم: $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}$

$$\frac{۶۴m^۲}{۴m+۸}=\frac{۱۶}{۳}\rightarrow\frac{۴m^۲}{۴m+۸}=\frac{۱}{۳}\rightarrow ۱۲m^۲=۴m+۸\rightarrow ۱۲m^۲-۴m-۸=۰$$
$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}m=۱\\ m=\frac{c}{a}=\frac{-۸}{۱۲}=\frac{-۲}{۳}\end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند چون به ازای آنها $\Delta>۰$ است.

۲۱ - گزینه ۴ روش اول:

می‌دانیم برای نوشتن معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$۲x^۲-۳x-۱=۰\xrightarrow[\text{جای } a,c \text{ عوض}]{\text{معکوس}}-x^۲-۳x+۲=۰\xrightarrow[x\rightarrow x+۱]{\text{یک واحد کمتر}}-(x+۱)^۲-۳(x+۱)+۲=۰$$
$$\Rightarrow -x^۲-۲x-۱-۳x-۳+۲=۰\Rightarrow x^۲+۵x+۲=۰$$

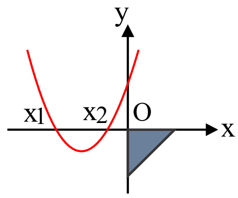
۲۲ - گزینه ۲ طول رأس سهمی برابر $x_s=-۲$ است و چون تابع درجهٔ دوم از مبدأ مختصات گذشته، پس یکی از نقاط برخورد تابع با محور xها $x_۱=۰$ است، بنابراین محل دیگر برخورد تابع با محور xها $x_۲=-۴$ است $(x_S=\frac{x_۱+x_۲}{۲})$

$$f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)\xrightarrow[x_۲=-۴]{x_۱=۰}f(x)=a(x-۰)(x+۴)\rightarrow f(x)=ax(x+۴)$$

چون نقطهٔ $\begin{vmatrix}-۲\\ ۴\end{vmatrix}$ روی سهمی قرار دارد، پس مختصاتش در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix}-۲\\ ۴\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{صدق}}۴=-۲a(-۲+۴)\rightarrow ۴=-۴a\rightarrow a=-۱$$

۲۳ - گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، برای این که نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم نگذرد باید حالت مقابل رخ دهد، با توجه به این حالت:



$f(۰) = \frac{۹}{۴} \Rightarrow$ تابع بالای مبدأ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

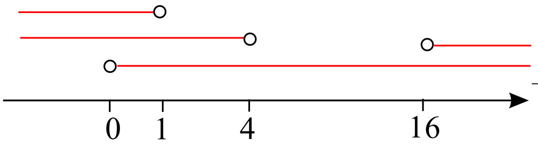
تابع باید مینیمم داشته باشد. $\Rightarrow \quad a > ۰ \quad (I)$

$S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} < ۰ \xrightarrow{a>۰} a - ۴ < ۰ \Rightarrow a < ۴ \quad (II)$

$P = x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} > ۰ \xrightarrow{a>۰} c > ۰ \Rightarrow \frac{۹}{۴} > ۰$ همواره برقرار است

$\Delta = b^۲ - ۴ac > ۰ \Rightarrow \Delta = (a-۴)^۲ - ۹a = a^۲ - ۱۷a + ۱۶ > ۰$

$(a-۱)(a-۱۶) > ۰ \Rightarrow a < ۱$ یا $a > ۱۶ \quad (III)$



$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)} ۰ < a < ۱$

۲۴ - گزینه ۱ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+۳}{m} \ , \ x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{۵}{m}$$

فرض مسأله: $x'^۲ + x''^۲ = ۶ \Rightarrow (x'+x'')^۲ - ۲x'x'' = ۶ \Rightarrow (\frac{m+۳}{m})^۲ - \frac{۱۰}{m} - ۶ = ۰$

$$\Rightarrow \frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲} - \frac{۱۰}{m} - ۶ = ۰ \xrightarrow{\times m^۲} m^۲ + ۶m + ۹ - ۱۰m - ۶m^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۵m^۲ + ۴m - ۹ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} m = ۱ \xrightarrow{\text{معادله}} x^۲ - ۴x + ۵ = ۰ : \quad \Delta = ۱۶ - ۲۰ < ۰ \ \text{غ ق ق} \\ m = -\frac{۹}{۵} \rightarrow \text{با توجه به گزینه ها } \Delta > ۰ \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

۲۵ - گزینه ۴

$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = \frac{x_۱ + x_۲}{x_۱ \cdot x_۲} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-(-m^۲)}{m+۲} = ۱$$

$$\Rightarrow m^۲ = m + ۲ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱) = ۰ \Rightarrow m = -۱, ۲$$

$$m = ۲ \rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \rightarrow (x-۲)^۲ = ۰ \rightarrow x = ۲$$

بنابراین $m = ۲$ غیر قابل قبول است زیرا دو ریشه ی متمایز بدست نمی آید.

$$m = ۱ \rightarrow x^۲ - x + ۱ = ۰ \rightarrow \Delta = ۱ - ۴ = -۳ < ۰$$

بنابراین $m = -۱$ غیر قابل قبول است زیرا معادله، ریشه حقیقی ندارد.

۲۶ - گزینه ۱

روش اول: اگر t ریشهٔ معادلهٔ جدید و x ریشهٔ معادلهٔ قدیم باشد، داریم:

$$t = \frac{۲}{x} \Rightarrow x = \frac{۲}{t} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله قدیم}} \frac{۱۶}{t^۲} - \frac{۱۴}{t} + ۳ = ۰ \xrightarrow{\times t^۲} ۱۶ - ۱۴t + ۳t^۲ = ۰ \rightarrow ۳t^۲ - ۱۴t + ۱۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۳x^۲+ax+۱۰=۰} a = -۱۴ \ , \ b = ۱۶$$

روش دوم: ابتدا معادلهٔ درجهٔ دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم اولیه باشد، سپس معادلهٔ درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه هایش دو برابر ریشه‌های معادلهٔ ثانویهٔ باشد پس جای a , c را عوض کرده و سپس b را در ۲ و c را در $۲^۲$ ضرب کنیم:

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{معکوس کردن ریشه}} ۳x^۲ - ۷x + ۴ = ۰ \xrightarrow{\text{دو برابر کردن}} ۳x^۲ - ۱۴x + ۱۶ = ۰$$

این معادله را با $۳x^۲ + ax + b = ۰$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a = -۱۴ \ , \ b = ۱۶$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^۲ + bx + a = ۰$ عکس ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ است و ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bkx + ck^۲ = ۰$ ، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می‌باشند.

۲۷ - گزینه ۴ معادله‌ی درجه‌ی دوم را مرتب می کنیم: $mx^۲ + (۲m-۱)x - ۵ = ۰$

$$x_۱x_۲ + x_۱ + x_۲ = ۴ \to -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = ۴ \to \frac{۱-۲m}{m} - \frac{۵}{m} = ۴$$
$$\xrightarrow{\times m} ۱ - ۲m - ۵ = ۴m \to ۶m = -۴ \to m = -\frac{۲}{۳}$$
$$\xrightarrow{\text{معادله}} -\frac{۲}{۳}x^۲ - \frac{۷}{۳}x - ۵ = ۰ \to \Delta < ۰ \;:\; \text{غ ق ق}$$

۲۸ - گزینه ۱ برای این که عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد، باید:

$$\begin{cases} \Delta < ۰ & \Rightarrow ۲^۲ - ۴(a)(a) < ۰ \Rightarrow ۴a^۲ > ۴ \Rightarrow a^۲ > ۱ \Rightarrow a < -۱ \text{ یا } a > ۱ (*) \\ x^۲\text{ضریب} & > ۰ \Rightarrow a > ۰ \quad (**) \end{cases}$$

از اشتراک : $(*)$, $(**)$ داریم: $a \in (۱, +\infty)$

۲۹ - گزینه ۱

$$x^۲ - ۴x + m = ۵ \Rightarrow x^۲ - ۴x + m - ۵ = ۰$$

این معادله‌ی درجه‌ی دوم نباید ریشه حقیقی داشته باشد.

$$\Delta < ۰ \to b^۲ - ۴ac < ۰ \to \Delta = ۱۶ - ۴(m-۵) < ۰ \Rightarrow ۴m > ۳۶ \Rightarrow m > ۹$$

۳۰ - گزینه ۱ اگر ریشه‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\text{قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها} = |x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۱ - ۴(-۱)(-m)}}{|-۱|} = ۳$$
$$\Rightarrow \sqrt{۱ - ۴m} = ۳ \Rightarrow ۱ - ۴m = ۹ \Rightarrow ۴m = -۸ \Rightarrow m = -۲$$

پس معادله‌ی تابع به صورت $f(x) = -x^۲ + x + ۲$ است.

چون ضریب $x^۲$، (a) منفی است بنابراین تابع ماکسیمم دارد و بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، همان عرض راس سهمی یعنی $\frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ می‌باشد.

$$\text{عرض ماکسیمم} = \frac{۴(-۱)(۲) - ۱}{۴(-۱)} = \frac{۹}{۴}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۲	۱۱ - ۱	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۱
۲ - ۳	۷ - ۴	۱۲ - ۴	۱۷ - ۱	۲۲ - ۲	۲۷ - ۴
۳ - ۲	۸ - ۱	۱۳ - ۲	۱۸ - ۳	۲۳ - ۴	۲۸ - ۱
۴ - ۱	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۴	۲۴ - ۱	۲۹ - ۱
۵ - ۲	۱۰ - ۱	۱۵ - ۲	۲۰ - ۴	۲۵ - ۴	۳۰ - ۱