علی هاشمی

فصل اول: هندسه و معادله

سایت: ALIGEBRA,COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ - نقطهٔ $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

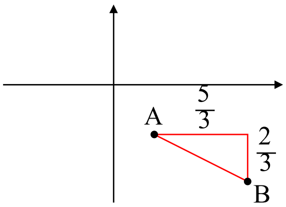
۲ - معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x + y = ۱$, $y = ۲x$ و $x = ۱$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

۳ - دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x - ۲y = ۳$ و $y = x + ۱$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

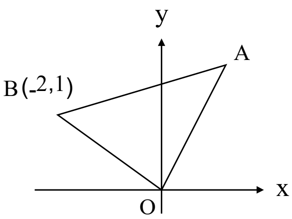
۴ - یک خط از دسته خطوط به معادلهٔ $(k+۱)y + ۲kx - k + ۱ = ۰$ بر خط گذرنده بر دو نقطهٔ $(۲,-۱)$ و $(۸,۳)$ عمود است، معادلهٔ آن خط کدام است؟

۵ - در مثلث با رئوس $A(۳,۲)$ ، $B(-۲,۱)$ و $C(-۱,۶)$، شیب ارتفاع CH کدام است؟

۶- در شکل زیر شیب خطی که از دو نقطهٔ B, A می‌گذرد کدام است؟



۷- نقطه‌ی A در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات و روی خط $y = 2x$ قرار دارد. اگر مثلث OAB در رأس O متساوی‌الساقین باشد، عرض نقطه‌ی A چقدر است؟



۸- نقاط $A(2,3)$، $B(-1,0)$ و $C(1,-2)$، سه رأس مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن کدام است؟

۹- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(3,2)$ نسبت به خط $y = x - 3$ کدام است؟

۱۰- دو خط به معادله‌ی $my - x = -7$ و $m^3x + y = 2$ بر دو ضلع مربع منطبق‌اند. در این صورت برای m چند جواب وجود دارد؟

۱۱ - اگر نقاط $A(3,4)$ و $B(-1,6)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، اندازهٔ مساحت مربع کدام است؟

۱۲ - معادلهٔ خطی که از محل برخورد دو خط $y=3x+1$ و $2x+3y=14$ می‌گذرد و با نیم‌ساز ربع دوم و چهارم موازی است، کدام است؟

۱۳ - مجموع مقادیر m، به‌طوری که به‌ازای آن‌ها دو خط $mx+(m+1)y=3$ و $(m^2-1)x+m(m+2)y=4$ برهم عمود باشند، کدام است؟

۱۴ - اگر $A(-4,-1)$ و $B(-2,-3)$ دو رأس غیرمجاور یک مربع باشند که مرکز آن روی خط $my+(m-2)x=1$ قرار داشته باشد، مساحت مربع چند برابر m است؟

۱۵ - به‌ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y+2x=0$, $2y+ax+5=0$, $y+3x=a$ همگی از یک نقطه می‌گذرند؟

۱۶ - عمودمنصف پاره‌خط AB که $A(-۲,۱)$ و $B(۲,۷)$ است، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱۷ - دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی $A(۱,۷)$ و $C(-۴,۱۹)$ هستند. در صورتی که زاویهٔ بین دو قطر مستطیل ۳۰° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱۸ - دو نقطه‌ی $A(-۴,۷)$ و $B(۱,۵)$ دو سر قطری از دایره هستند. معادله‌ی قطری از دایره که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟

۱۹ - مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات $y+x=۲$ و $۲y-x=۴$ وضلع دیگر آن بر محور x قرار دارد کدام است؟

۲۰ - معادلهٔ خطی که به موازات نیمساز ناحیهٔ اول و سوم بوده و نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ قطع می‌کند کدام است؟

۲۱ - مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوطی به معادلات $y=x+۳$ و $x=۴$ و محور yها و نیمساز ناحیهٔ اول برابر کدام است؟

۲۲ - در مثلثی معادله‌ی دو ضلع AB و AC به ترتیب $y + x = ۲$ و $۴x + ۳y = ۸$ است. مجموع مختصات راس A کدام است؟

۲۳ - دو نقطه بر خط $۲x - y = ۱$ قرار دارند که از خط $۴x + ۳y = ۱$ به فاصله‌ی ۲ هستند. مجموع عرض این نقاط کدام است؟

۲۴ - اگر نقاط $A(۲,۵)$, $B(-۱,۲)$ و $C(۵,۱)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، معادله‌ی ضلع DC کدام است؟

۲۵ - نقاط $A(۱,۹)$ و $B(۱۱,-۱)$ مفروض‌اند. اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد، معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AM کدام است؟

۲۶ - اگر نقاط $A(۰,۱)$، $B(۱,۴)$ و $C(۳,۰)$ رئوس مثلث ABC باشند، با مشخص کردن طول اضلاع، نوع این مثلث کدام است؟

بی نام

۲۷ - ضلع یک مثلث به مساحت ۶ بر خط به معادلهٔ $2y + x = 3$ واقع و یک رأس آن نقطهٔ $(-1, 0)$ است. اگر ضلع دیگر این مثلث بر محور xها منطبق باشد، طول میانهٔ وارد بر این ضلع چه‌قدر است؟

۲۸ - فاصله‌ی نقطه‌ی $(1, 2)$ از خط $2x + y = 6$ چند برابر فاصله‌ی این خط از خط $2y = 1 - 4x$ است؟

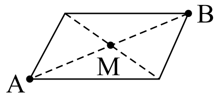
۲۹ - به ازای کدام مقدار k، سه خط به معادلات $2x + y = 5$ ، $x - 2y = 1$ و $x + y = k$ در یک نقطه متقاطع‌اند؟

۳۰ - دو نقطه روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارند که از نیمساز ربع اول و سوم به فاصله‌ی $4\sqrt{2}$ هستند. طول این نقاط کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

مختصات نقطهٔ A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطهٔ A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطهٔ B به دست آید.



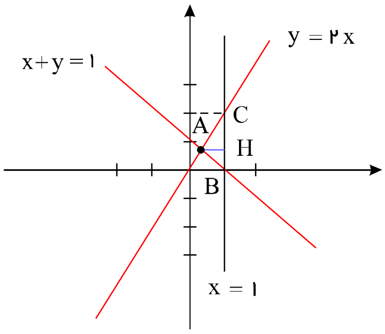
$$\begin{matrix} ۳ \\ -۲ \end{matrix}\begin{cases} ۲y-۳x=۱۱ \\ ۳y+۴x=۸ \end{cases} \to -۱۷x=۱۷ \Rightarrow x=-۱\,,\, y=۴ \Rightarrow B\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۴ \end{matrix}\right.$$

می‌دانیم نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳ \quad , \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵$$

۲ - گزینه ۱ سه خط داده‌شده را رسم می‌کنیم.

$$y=۲x \to \left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right. \,,\, \left|\begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix}\right. \text{ و } x+y=۱ \to \left|\begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix}\right. \,,\, \left|\begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix}\right. \to$$



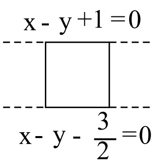
کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH است که معادله‌اش $y=\frac{۲}{۳}$ است، زیرا اگر با دو خط $x+y=۱$ و $y=۲x$ تشکیل دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ y=۲x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \,,\, y=\frac{۲}{۳}$$

یعنی مختصات نقطهٔ A به‌صورت $A\left|\begin{matrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} \end{matrix}\right.$ است، پس معادلهٔ ارتفاع AH به‌صورت $y=\frac{۲}{۳}$ است.

۳ - گزینه ۳

شیب هر دو خط یک است یعنی این دو خط موازی‌اند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصلهٔ بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.



(در محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادلهٔ خط باید یکسان باشند.)

$$\text{ضلع مربع}=d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱-(-\frac{۳}{۲})|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

$$S_{\text{مربع}}=(\text{ضلع})^۲=(\frac{۵}{۲\sqrt{۲}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطهٔ $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

۴ - گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} ۸ \\ ۳ \end{matrix}\right.$ را به دست می‌آوریم.

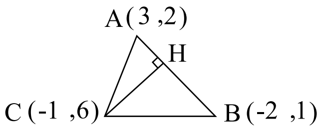
$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-۱-۳}{۲-۸}=\frac{-۴}{-۶}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{دسته خط}}=-\frac{۳}{۲}$$

$$m_{\text{دسته خط}}=-\frac{۲k}{k+۱}=-\frac{۳}{۲}\to ۴k=۳k+۳\to k=۳$$

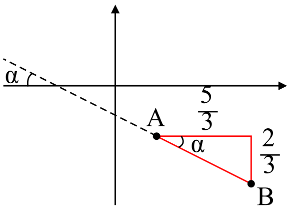
$$k=۳\xrightarrow{\text{معادلهٔ دسته خطوط}} ۴y+۶x-۲=۰\xrightarrow{\div ۲} ۲y+۳x=۱$$

۵ – گزینه ۴ ارتفاع CH از راس C بر ضلع AB عمود می‌شود. بنابراین شیب آن عکس و قرینه‌ی شیب AB است.

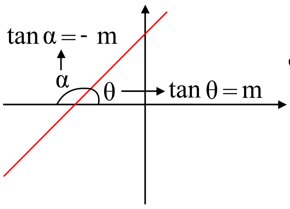
$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۲-۱}{۳-(-۲)}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow m_{CH}=\frac{-۱}{m_{AB}}=-۵$$



۶ – گزینه ۳



شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.



پس : $\tan\alpha=-m=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۲}{۵}\to m=-\frac{۲}{۵}$

۷ – گزینه ۲ نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰\,,y_۰)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲}$$

چون A روی خط $y=۲x$ است، پس مختصات آن به‌صورت $A(a,۲a)$ می‌باشد.

از طرفی طبق فرض مثلث OAB در رأس O متساوی‌الساقین است، پس $OB=OA$.

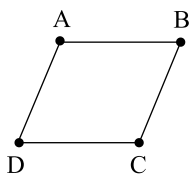
$$\begin{cases}OA=\sqrt{a^۲+(۲a)^۲}=\sqrt{۵a^۲}\\ OB=\sqrt{(-۲)^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}\end{cases}\xrightarrow{OA=OB}\sqrt{۵a^۲}=\sqrt{۵}\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow \boxed{a=\pm۱}$$

چون A در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات قرار دارد، پس فقط $a=۱$ قابل قبول است، بنابراین:

$$A(۱,۲)\to y_A=۲a=۲\times۱=۲$$

۸ – گزینه ۲ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ بین مختصات چهار رأس رابطه زیر را برقرار است.

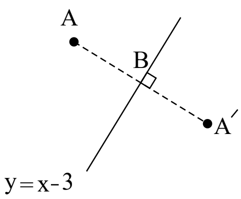
$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$



کافیست مختصات رئوس مطرح شده را جایگذاری نماییم.

$$\begin{array}{l}۲+۱=x_D+(-۱)\Rightarrow x_D=۴\\ ۳+(-۲)=y_D+۰\Rightarrow y_D=۱\end{array}\Rightarrow D(۴,۱)$$

۹ – گزینه ۲



معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(۳,۲)$ می‌گذرد و بر خط $y=x-۳$ عمود است را می‌نویسیم، دو خط عمود بر هم شیب های قرینه و معکوس هم دارند پس:

$$m'=۱\to m=-۱$$

$$y-۲=-۱(x-۳)\Rightarrow y-۲=-x+۳\Rightarrow y=-x+۵$$

برای به‌دست آوردن مختصات نقطه‌ی B، محل برخورد دو خط را به‌دست می‌آوریم (حل دستگاه):

$$\begin{cases} y=-x+۵ \\ \\ y=x-۳ \end{cases}\Rightarrow x-۳=-x+۵\Rightarrow ۲x=۸\Rightarrow x=۴\Rightarrow y=۴-۳=۱\Rightarrow B(۴,۱)$$

نقطه‌ی B وسط A و A' قرار دارد. مختصات وسط پاره خط با رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\text{وسط پاره خط } B\left|\begin{array}{l} x_B=\dfrac{x_A+x_{A'}}{۲} \\ y_B=\dfrac{y_A+y_{A'}}{۲}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases} ۴=\dfrac{۳+x_{A'}}{۲}\Rightarrow x_{A'}=۵ \\ ۱=\dfrac{۲+y_{A'}}{۲}\Rightarrow y_{A'}=۰\end{cases}\Rightarrow A'(۵,۰)$$

۱۰ - گزینه ۴ این دو خط ممکن دو ضلع موازی یا هر ضلع عمود بر هم باشند، لذا باید هر دو حالت را بررسی نماییم.

حالت اول: دو ضلع موازی باشند، در این حالت شیب دو خط برابر است. خطوط را به حالت استاندارد می‌نویسیم:

$$my-x=-۷\to y=\frac{۱}{m}x-\frac{۷}{m}\to m_۱=\frac{۱}{m}$$

$$m^۳x+y=۲\to y=-m^۳x+۲\to m_۲=-m^۳$$

$$\text{شرط موازی بودن } \frac{۱}{m}=-m^۳\to m^۴=-۱ \text{ غیر ممکن}$$

پس دو ضلع موازی نیستند.

حالت دوم: دو خط بر هم عمود باشد که حاصلضرب با شیب‌ها -۱ خواهد بود.

$$\frac{۱}{m}\times-(m^۳)=-۱\xrightarrow{\text{با فرض } m\neq ۰}m^۳=m\to m^۳-m=۰$$

$$m(m^۲-۱)=۰\Rightarrow m=\pm۱$$

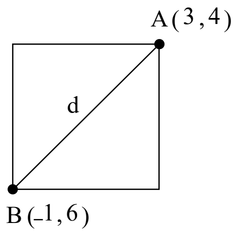
اگر $m=۰$ در این صورت نیز دو خط عمود بر هم می‌باشد، بنابراین $m=۰$ نیز جواب می‌باشد پس معادله ۳ جواب دارد.

۱۱ - گزینه ۲ مربع یک لوزی هم محسوب می‌شود که قطرهای برابر دارد لذا می‌توان از رابطهٔ مساحت لوزی استفاده کرد. قدم اول محاسبهٔ طول پاره‌خط AB یا همان قطر مربع می‌باشد.

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

$$\text{قطر مربع } d=|AB|=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۴-۶)^۲}=\sqrt{۲۰}$$

$$\text{مساحت } S=\frac{d^۲}{۲}=\frac{(\sqrt{۲۰})^۲}{۲}=۱۰$$



۱۲ - گزینه ۱ ابتدا نقطهٔ برخورد دو خط $y=۳x+۱$ و $۲x+۳y=۱۴$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} ۲x+۳y=۱۴ \\ y=۳x+۱\end{cases}\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}}۲x+۳(۳x+۱)=۱۴\to ۱۱x+۳=۱۴$$

$$\to ۱۱x=۱۱\to\boxed{x=۱}\quad,\quad y=۳(۱)+۱\to\boxed{y=۴}\to\boxed{A(۱,۴)}$$

خطی که با نیم‌ساز ربع دوم و چهارم $(y=-x)$ موازی است پس شیب آن برابر است با: $\boxed{m=-۱}$

$$y-y_A=m(x-x_A)\to y-۴=-۱(x-۱)\to y-۴=-x+۱$$

$$y=-x+۵\to\boxed{y+x-۵=۰}$$

۱۳ - گزینه ۳

$$d_۱ : mx+(m+۱)y=۳ \to m_۱ = -\frac{m}{m+۱}$$

$$d_۲ : (m^۲-۱)x+m(m+۲)y=۴ \to m_۲ = -\frac{m^۲-۱}{m(m+۲)}$$

$$\text{دو خط بر هم عمود} \to m_۱ \cdot m_۲ = -۱ \to \frac{-m}{m+۱} \times \frac{-(m^۲-۱)}{m(m+۲)} = -۱$$

$$\to \frac{m}{(m+۱)} \cdot \frac{(m+۱)(m-۱)}{m(m+۲)} = -۱ \xrightarrow{m\neq ۰,-۱,-۲} \frac{m-۱}{m+۲} = -۱$$

$$m-۱=-m-۲ \to ۲m=-۱ \to \boxed{m=-\frac{۱}{۲}}$$

$$m=۰ \to \begin{cases} d_۱ : y=۳ \\ d_۲ : x=-۴ \end{cases} \text{دو خط بر هم عمودند.} \to \boxed{m=۰}$$

$$m=-۱ \to \begin{cases} d_۱ : x=-۳ \\ d_۲ : y=-۴ \end{cases} \text{دو خط بر هم عمودند.} \to \boxed{m=-۱}$$

$$m=-۲ \to \begin{cases} d_۱ : -۲x-y=۳ \\ d_۲ : ۳x=۴ \end{cases} \text{دو خط بر هم عمود نیستند.}$$

$$m \text{ مجموع مقادیر } = -\frac{۱}{۲}+۰+(-۱) = -\frac{۳}{۲}$$

۱۴ - گزینه ۲ چون $A(-۴,-۱)$ و $B(-۲,-۳)$ دو رأس غیرمجاور یک مربع هستند پس طول پاره‌خط AB برابر قطر مربع است و مرکز مربع (نقطهٔ M وسط قطرها) روی خط $my+(m-۲)x=۱$ قرار دارد.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(-۴+۲)^۲+(-۱+۳)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}$$

$$\longrightarrow AB=۲\sqrt{۲} \longrightarrow \text{قطر مربع } d=۲\sqrt{۲} \longrightarrow S=\frac{d^۲}{۲}=\frac{(\sqrt{۸})^۲}{۲}=\frac{۸}{۲} \longrightarrow S=۴$$

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{-۴-۲}{۲}=-۳ \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{-۱-۳}{۲}=-۲ \end{cases} \to M(-۳,-۲) \xrightarrow{my+(m-۲)x=۱} -۲m-۳m+۶=۱ \to m=۱$$

پس $\frac{S}{m}=۴$ است.

۱۵ - گزینه ۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادلهٔ خط سوم صدق کند.

$$-\begin{cases} y+۲x=۰ \\ y+۳x=a \end{cases} \Rightarrow x=a\ ,\ y=-۲a$$

$$A\left|\begin{matrix} a \\ -۲a \end{matrix}\right. \xrightarrow[۲y+ax+۵=۰]{\text{صدق در خط سوم}} -۴a+a^۲+۵=۰ \Rightarrow a^۲-۴a+۵=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۲۰=-۴<۰ \to \text{ریشهٔ حقیقی ندارد} \to \text{این سه خط هیچ‌گاه متقارب نیستند.}$$

۱۶ - گزینه ۲ ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را به‌دست آورده و سپس معادلهٔ خط d (عمودمنصف AB) را می‌نویسیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{-۲+۲}{۲}=۰\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۱+۷}{۲}=۴$$

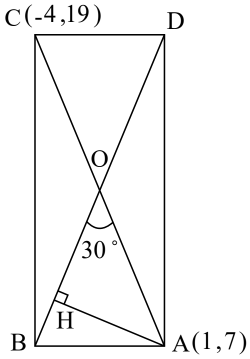
$$\to \boxed{M(۰,۴)}\quad,\quad m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۷-۱}{۲-(-۲)}=\frac{۶}{۴} \to m_{AB}=\frac{۳}{۲}$$

$$\to m_d=\frac{-۱}{m_{AB}}=\frac{-۱}{\frac{۳}{۲}} \to \boxed{m_d=-\frac{۲}{۳}}$$

$$d: y-y_M=m_d(x-x_M) \to y-۴=-\frac{۲}{۳}(x-۰)$$

$$\to \boxed{y=-\frac{۲}{۳}x+۴} \xrightarrow[y=۰]{\text{محل تلاقی با محور } x \text{ ها}} ۰=-\frac{۲}{۳}x+۴ \to \frac{۲}{۳}x=۴ \to \boxed{x=۶}$$

۱۷ - گزینه ۱ ابتدا طول قطر AC را به‌دست می‌آوریم:



$$\rightarrow AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۱-(-۴))^۲+(۷-۱۹)^۲}=\sqrt{۲۵+۱۴۴}=\sqrt{۱۶۹}\rightarrow AC=۱۳$$

و چون در مستطیل قطرها هم‌دیگر را نصف می‌کنند داریم:

$$OA=OC=OB=OD=\frac{۱۳}{۲}$$

قطرهای مستطیل، مستطیل را به چهار مثلث هم مساحت تقسیم می‌کنند پس داریم:

$$S_{ABCD}=۴S_{OAB}\rightarrow S_{ABCD}=۴(\frac{۱}{۲}\times OA\times OB\times \sin ۳۰^\circ)=۴(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۳}{۲}\times\frac{۱۳}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۱۶۹}{۴}$$

توجه کنید مساحت هر مثلث را می‌توان از نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها به‌دست آورد.

۱۸ – گزینه ۱ ابتدا با استفاده از مختصات دو سر قطر، مختصات مرکز دایره را محاسبه می‌کنیم. مرکز دایره وسط قطر قرار دارد پس:

$$O'\left|\begin{array}{l} x_O=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{-۴+۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}\\ y_O=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۷+۵}{۲}=۶\end{array}\right. \Rightarrow O'\left|\begin{array}{l}-\frac{۳}{۲}\\ ۶\end{array}\right.$$

حال باید معادله خطی را بنویسیم که از نقاط $O'\left|\begin{array}{l}-\frac{۳}{۲}\\ ۶\end{array}\right.$ و مبدأ مختصات $O\left|\begin{array}{l}۰\\ ۰\end{array}\right.$ عبور می‌نماید. ابتدا شیب را محاسبه می‌نماییم.

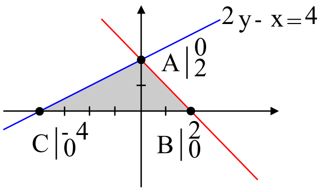
$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۶-۰}{-\frac{۳}{۲}-۰}=-۴\ \Rightarrow y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow\ y-۰=-۴(x-۰)$$

$$\Rightarrow y=-۴x\Rightarrow \boxed{y+۴x=۰}$$

۱۹ – گزینه ۲ ابتدا محل برخورد این خطوط را با محورهای مختصات پیدا می‌کنیم.

$$y+x=۲\rightarrow\begin{cases}x=۰\rightarrow y=۲\\ y=۰\rightarrow x=۲\end{cases},\ ۲y-x=۴\rightarrow\begin{cases}x=۰\rightarrow y=۲\\ y=۰\rightarrow x=-۴\end{cases}$$

سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را بدست می‌آوریم.

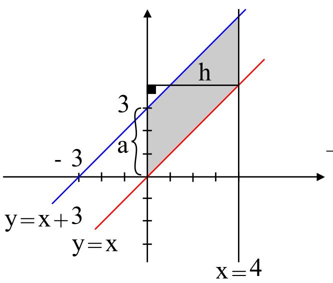


$$\rightarrow S=\frac{۶\times ۲}{۲}=۶$$

۲۰ – گزینه ۴ معادلهٔ خط نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $y=x$ است که شیب آن یک است و چون خط باید با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یک است. چون این خط، نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $(y=-x)$ را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ قطع می‌کند پس عرض آن $y=-۲$ است.

$$A\Big|^{۲}_{-۲},m=۱\rightarrow y-(-۲)=۱(x-۲)\rightarrow y+۲=x-۲\rightarrow y-x=-۴$$

۲۱ – گزینه ۲ بهترین روش برای حل این تست رسم شکل است.



$$\rightarrow S=a\times h=۳\times ۴=۱۲$$

۲۲ – گزینه ۴ رأس A محل برخورد دو ضلع AB و AC است پس کافی است با معادلات داده شده تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه‌ی A بدست آید.

$$-3\begin{cases}y+x=2\\3y+4x=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3y-3x=-6\\3y+4x=8\end{cases}\to x=2\ ,\ y=0$$

$\Rightarrow A(2,0)\Rightarrow$ مجموع مختصات رأس A $=2$

۲۳ - گزینه ۳ نقطه‌ی $(\alpha, 2\alpha-1)$ را برروی خط $2x-y=1$ $(y=2x-1)$ درنظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را از خط $4x+3y-1=0$ به دست می‌آوریم و مساوی ۲ قرار می دهیم پس داریم:

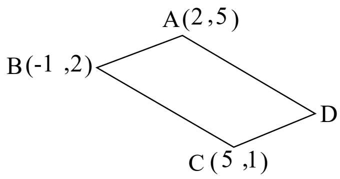
$$\frac{|4\alpha+3(2\alpha-1)-1|}{\sqrt{16+9}}=2\to\frac{|10\alpha-4|}{5}=2\to|10\alpha-4|=10$$

$$10\alpha-4=10\to\alpha=1.4\to(1.4\,,\,1.8)\ ,\ 10\alpha-4=-10\to\alpha=-0.6\to(-0.6\,,\,-2.2)$$

بنابراین مجموع عرض‌ها برابر -0.4 می‌باشد.

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\Big|_{\beta}^{\alpha}$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ بدست می‌آید.

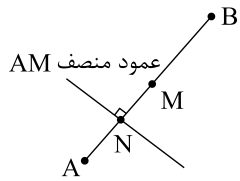
۲۴ - گزینه ۱ ضلع DC از نقطه‌ی C می‌گذرد و با خط AB موازی است، پس:



$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{5-2}{2-(-1)}=1=m_{DC}$$

معادله‌ی ضلع DC: $\xrightarrow[m=1]{C(5,1)} y-1=1(x-5)\Rightarrow y=x-4$

۲۵ - گزینه ۱ نقطه‌ی M وسط AB و نقطه‌ی N وسط AM است، پس می‌توان نوشت:



وسط پاره خط AB: $M(\frac{1+11}{2},\frac{-1+9}{2})\Rightarrow M(6,4)$

وسط پاره خط AM: $N(\frac{6+1}{2},\frac{4+9}{2})\Rightarrow N(\frac{7}{2},\frac{13}{2})$

$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{9+1}{1-11}=-1\Rightarrow m$ عمود $=1$

معادله‌ی عمود منصف AM: $\xrightarrow[m=1]{(\frac{7}{2},\frac{13}{2})} y-\frac{13}{2}=1(x-\frac{7}{2})\Rightarrow y=x+3$

۲۶ - گزینه ۱ نکته: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ (طول پاره خط AB) برابر است با:

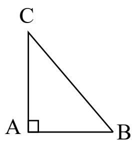
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

نکته (عکس قضیه‌ی فیثاغورس): اگر در مثلثی، مربع یک ضلع برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

$$AB=\sqrt{(1-0)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$$

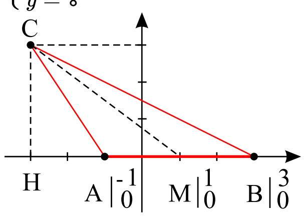
$$AC=\sqrt{(3-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}\ ,\ BC=\sqrt{(3-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}$$

بنابراین $AB=AC$ و $BC^2=AB^2+AC^2$. پس مثلث ABC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



۲۷ - گزینه ۴ اگر خط به معادلهٔ $2y+x=3$ را با محور xها تلاقی دهیم، مختصات رأس دیگر مثلث به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}2y+x=3\\y=0\end{cases}\to x=3$$



بنابراین نقاط $A\Big|_{0}^{-1}$ و $B\Big|_{0}^{3}$ دو رأس این مثلث هستند.

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{CH\times AB}{2}\to 6=\frac{CH\times 4}{2}\to CH=3$$

اندازهٔ پاره‌خط CH برابر ۳ می‌باشد، بنابراین عرض رأس C برابر ۳ است.

$$\begin{cases}2y+x=3\\y=3\end{cases}\to x=-3\to C\Big|_{3}^{-3}$$

$$CM=\sqrt{(-3-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

۲۸ - گزینه ۴ ۱): فاصله‌ی نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$، برابر است با:

$$AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۲): فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$، برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

با استفاده از شماره‌ی (۱) داریم:

$$\text{فاصله‌ی نقطه‌ی } (۱,۲) \text{ از خط } ۲x+y-۶=۰ = \frac{|۲(۱)+۲-۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

حال با استفاده از شماره‌ی (۲)، داریم:

$$۲y=۱-۴x\Rightarrow ۴x+۲y-۱=۰\Rightarrow ۲x+y-\frac{۱}{۲}=۰\ ,\ ۲x+y-۶=۰$$

$$\text{فاصله‌ی دو خط موازی} = \frac{|-\frac{۱}{۲}+۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{\frac{۱۱}{۲}}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۱}{۲\sqrt{۵}}$$

نسبت این دو مقدار، برابر $\frac{۴}{۱۱}=\dfrac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{۱۱}{۲\sqrt{۵}}}$ است.

۲۹ - گزینه ۴

ابتدا با دو خط، تشکیل دستگاه داده و محل تلاقی آن‌ها را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} x-۲y=۱ \\ ۲x+y=۵ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x-۲y=۱ \\ ۴x+۲y=۱۰ \end{cases}\Rightarrow ۵x=۱۱\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۵}\ ,\ \ y=\frac{۳}{۵}$$

باید محل تلاقی دو خط اول در معادله‌ی خط سوم صدق کند.

$$k=x+y=\frac{۱۱}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۱۴}{۵}=۲/۸$$

۳۰ - گزینه ۲ نقطه‌ی دلخواه $A\,(\alpha,۲\alpha+۱)$ را روی خط $y=۲x+۱$ درنظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را از نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y=x$ بدست می‌آوریم.

$$\text{فاصله ی نقطه‌ی } A \text{ از خط } x-y=۰ = \frac{|\alpha-۲\alpha-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} \overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=} ۴\sqrt{۲}\rightarrow |-\alpha-۱|=۸$$

$$\Rightarrow |\alpha+۱|=۸\Rightarrow \alpha+۱=\pm ۸\Rightarrow \alpha=-۹ \text{ یا } ۷$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\Big|_{\beta}^{\alpha}$ ازخط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\dfrac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۳	۱۱ - ۲	۱۶ - ۲	۲۱ - ۲	۲۶ - ۱
۲ - ۱	۷ - ۲	۱۲ - ۱	۱۷ - ۱	۲۲ - ۴	۲۷ - ۴
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۳	۱۸ - ۱	۲۳ - ۳	۲۸ - ۴
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۱	۲۹ - ۴
۵ - ۴	۱۰ - ۴	۱۵ - ۴	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲