علی هاشمی

۱ - خط $2x + y = 4$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1,1)$ مماس است. اگر $A(1,2)$ نقطه‌ای روی خط مماس داده شده باشد، طول مماس AM کدام است؟ (M نقطه‌ی تماس خط و دایره است.)

۲ - فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد دو خط $y = 3x + 5$ و $2x + y = -10$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۳ - اگر دو خط $y = 4x + 2$ و $y = 4x + m^2 - 7$ ، بر دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع منطبق باشند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۴ - اگر دو خط به معادله‌های $(m+2)y = x + 3$ و $y = (2m+1)x + 1$ بر هم عمود باشند، m کدام است؟

۵ - اگر $A(5,2)$ و $C(-3,4)$ دو سر یک قطر یک مربع باشند، معادلهٔ قطر دیگر این مربع کدام است؟

۶ - نقاط $A\begin{vmatrix}۳\\۴\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}-۲\\۱\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}-۳\\-۲\end{vmatrix}$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مجموع طول و عرض مختصات رأس D آن کدام است؟

۷ - فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۱)$ از نقطه‌ای به طول ۴ روی خط $۳x+۲y=۲$ کدام است؟

۸ - یکی از اضلاع مربعی بر خط $y=۳x+۱$ واقع است. اگر $A\begin{vmatrix}-۱\\۲\end{vmatrix}$ یکی از رئوس این مربع باشد، طول قطر مربع کدام است؟

۹ - دایره‌ای به مرکز $(۲,۱)$، بر دو خط به معادلات $۳x+۴y=۵$ و $۱۲y-۵x=a$ مماس است. دو مقدار ممکن برای a کدام است؟

۱۰ - خط d و d' بر هم عمودند. خط d محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض $۳\sqrt{۳}$ قطع کرده است. اگر نقطه $(-\sqrt{۳},-۳)$ روی خط d' قرار داشته باشد، عرض نقطهٔ برخورد دو خط کدام است؟

۱۱ - اگر O مرکز دایرهٔ C، روی نیمساز ربع اول و سوم باشد و دو نقطهٔ $(k,۲k-۱)$ و $(۰,-۱)$ دو سر یک قطر دایره باشند، آنگاه مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(-۲,۳)$ نسبت به O کدام است؟

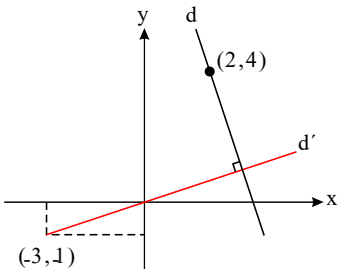
۱۲ - اگر نقاط $A(۲,۱)$ و $B(۰,-۱)$ و $C(۴,-۴)$ رئوس مثلث ABC باشند، مختصات محل برخورد ارتفاع AH و ضلع BC کدام نقطه است؟

۱۳ - اگر دو خط $۲y-۸x+۶=۰$ و $۱۲x-۳y=m$ دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع باشند، آن‌گاه محدودهٔ قابل قبول برای m کدام است؟

۱۴ - مساحت مثلثی که خط گذرنده از نقطهٔ $(۰,۱)$ با محورهای مختصات در ناحیهٔ دوم می‌سازد، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ است. معادلهٔ این خط کدام است؟

۱۵ - در مثلث ABC به رئوس $A\begin{vmatrix}۱\\۲\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}۱\\۴\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}-۱\\۲\end{vmatrix}$، امتداد میانهٔ AM محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱۶ - در شکل زیر معادلهٔ خط d کدام است؟

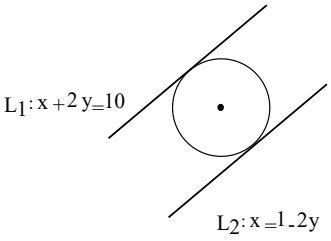


۱۷- اگر $A(۵,۶)$، $B(۲,-۳)$ و $C(-۱,۰)$ رأس‌های یک مثلث باشند، طول ارتفاع BH وارد بر ضلع AC کدام است؟

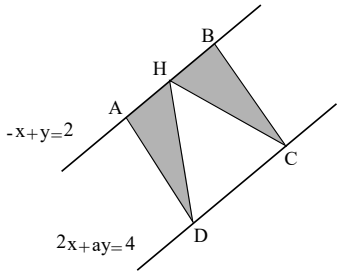
۱۸- اگر خط به معادله‌ی $ay+x=b$ بر خط به معادله‌ی $ax+by=۱$ عمود باشد و از نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ بگذرد، آنگاه $a+b$ کدام است؟ $(a,b\neq ۰)$

۱۹- سه نقطه‌ی متمایز $A(۳,۲)$، $B(m+۱,m)$ و $C(m^۲,m+۱)$ روی یک خط قرار دارند. در این صورت عرض از مبدأ خط کدام است؟

۲۰- دایره‌ای مطابق شکل، بر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ مماس است. مساحت دایره چقدر است؟



۲۱ - در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ مربع و مثلث DCH متساوی‌الساقین است. مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



۲۲ - نقطه‌ی $A(-۳,۲)$ رأس مربعی است که یک قطر آن منطبق بر خط $y-x=۴$ است. مساحت این مربع کدام است؟

۲۳ - اگر $A(x-۲,۰)$ و $B(x,۲x)$ و فاصله‌ی نقطه‌ی M وسط AB، از مبدأ مختصات $\sqrt{۵}$ باشد، مقادیر x کدام‌اند؟

۲۴ - مثلث ABC با رئوس $A(۲,۸)$، $B(۴,۰)$ و $C(۸,۱۰)$ را در نظر بگیرید. اندازه‌ی میانه‌ی BM کدام است؟

۲۵ - اگر خطوط $y=۲x+۳$ و $۲y+x-۶=۰$ معادلهٔ دو ضلع یک مستطیل و نقطهٔ $A(۱,۱)$ یکی از رئوس آن باشد، مساحت این مستطیل چقدر است؟

۲۶- اگر فاصلهٔ دو خط موازی $y = ax + b$ و $y = ۳x + ۱$ برابر $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ باشد، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

۲۷- دو رأس غیر مجاور یک مربع روی خط به معادلهٔ $۳x - ۴y = ۱$ قرار دارند. اگر نقطهٔ $(۲, ۱)$ رأس دیگری از مربع باشد، در این صورت مساحت مربع کدام است؟

۲۸- فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲m + ۱, ۳m - ۹)$ از دو محور مختصات به یک اندازه است. در این صورت OA برابر است با:

۲۹- مساحت مثلثی با رأس‌های $A(-۱, ۲)$، $B(۲, ۴)$ و $C(۴, -۱)$ برابر است با:

۳۰- خط $L_۱$ با شیب $m_۱ = ۲$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. اگر خط $L_۲$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و با خط $L_۱$ موازی باشد، در این صورت فاصلهٔ دو خط موازی $L_۱$ و $L_۲$ کدام است؟

۳۱- اگر داشته باشیم، $A(۶,۵), B(۴,۱)$ و $C(-۲,-۱)$، فاصلهٔ نقطهٔ A از عمود منصف پاره‌خط BC چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟

۳۲- اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,۱)$ از خط $۳x+۴y-a=۰$ برابر ۵ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۳۳- اگر به مرکز $A(-۲,۴)$ دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز $B(۱,۰)$ دایره‌ای به شعاع ۴ رسم کنیم، این دو دایره یکدیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند؟

۳۴- نقاط $A(m-n,۲m+۳)$ و $B(m+n,۲n-۳)$ نسبت به نقطهٔ $C(-۲,۲)$ قرینهٔ یکدیگرند. در این صورت $۳m-۲n$ کدام است؟

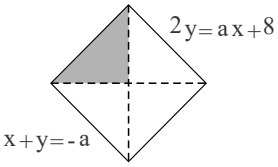
۳۵- مثلث ABC در صفحه مفروض است. اگر معادلهٔ خط گذرنده از ضلع BC به صورت $y=x$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس $A(۱,۲)$ کدام است؟

۳۶- عرض از مبدأ خطی که بر خط $۲y-۳x+۱=۰$ عمود است و از نقطه‌ای به طول ۲ روی خط $y+۲x=۳$ می‌گذرد، کدام است؟

۳۷- اگر خطوط $y=۲$ و $ax+ay-x=۱$ همدیگر را در نقطه‌ای به طول یک قطع کنند، a کدام است؟

۳۸- نمودار دو منحنی $y=\sqrt{x}-۲$ و $y=\sqrt{۲x-۷}-۱$ همدیگر را در نقطهٔ A قطع می‌کنند، فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقطهٔ $B(۰,۳)$ کدام است؟

۳۹- در مربع شکل زیر، مساحت ناحیهٔ هاشورخورده کدام است؟



۴۰- فاصلهٔ دو خط موازی $y=\frac{a}{۶}x+۴$ و $y=-\frac{b}{۳}x-۱$ برابر ۳ است. حاصل ab کدام است؟

۴۱- دو ضلع مجاور یک مربع روی دو خط به معادلات $mx+۲y=۳$ و $x+(m+۱)y=۱$ قرار دارند. m کدام است؟

۴۲- دایره‌ای به‌مرکز $(-۱,۲)$ و به‌مساحت ۹π برخط $۴y-۳x=k$ مماس است. مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

۴۳- اگر $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۱,۳)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC کدام است؟

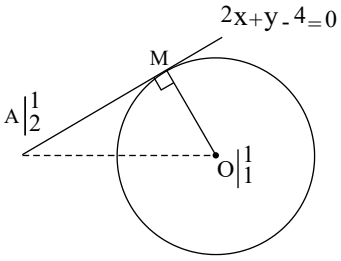
۴۴- نقاط $A(۲,۳)$، $B(۴,۱)$ و $C(۸,۲)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند، طول قطر BD کدام است؟

۴۵- دایره‌ای که مرکز آن روی خط $y=x-۱$ قرار دارد، بر دو خط $y=\frac{-۳}{۴}x$ و $۳x+۴y=۶$ مماس است. فاصلهٔ مرکز دایره تا مبدأ مختصات کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

ابتدا می‌توان یک تصویر کلی را رسم نمود.



باتوجه به تصویر ابتدا شعاع دایره یا OM را محاسبه می‌کنیم:

$$۲x + y - ۴ = ۰\ ,\ a = ۲ ،b = ۱ ،c = -۴\ ,\ x_۰ = ۱\ ,\ y_۰ = ۱$$

$$d = OM = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۲(۱) + ۱(۱) - ۴|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

حال با استفاده از فرمول فاصله‌ی دو نقطه طول OA را محاسبه می‌نماییم:

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^۲ + (y_A - y_O)^۲} \to OA = \sqrt{(۱ - ۱)^۲ + (۲ - ۱)^۲} = ۱$$

باتوجه به فیثاغورث داریم:

$$AM^۲ = OA^۲ - OM^۲ = ۱^۲ - (\frac{\sqrt{۵}}{۵})^۲ = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵} \to AM = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

۲ - گزینه ۲ ابتدا باید محل تلاقی دو خط را با حل دستگاه محاسبه نمود:

$$\begin{cases} y = ۳x + ۵ \\ ۲x + y = -۱۰ \end{cases} \to \begin{cases} y - ۳x = ۵ \\ -y - ۲x = +۱۰ \end{cases} \Rightarrow -۵x = ۱۵ \to x = -۳ \to y = ۳(-۳) + ۵ = -۴$$

پس مختصات محل تلاقی $A(-۳, -۴)$ است حال با فرمول فاصله‌ی دو نقطه جواب نهائی را محاسبه می‌نمائیم.

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^۲ + (y_A - y_O)^۲} \to OA = \sqrt{(-۳ - ۰)^۲ + (-۴ - ۰)^۲} = ۵$$

۳ - گزینه ۴ باتوجه به اینکه دو ضلع متوازی‌الاضلاع موازی و غیر منطبق هستند، داریم:

$$\begin{cases} ax + by + c = ۰ \\ a'x + b'y + c' = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{موازی و غیرمنطبق}} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

حال کافیست همین شرط را بررسی نمائیم:

$$\begin{cases} ۴x - y + ۲ = ۰ \\ ۴x - y + m^۲ - ۷ = ۰ \end{cases} \to \frac{۴}{۴} \neq \frac{m^۲ - ۷}{۲} \to m^۲ - ۷ \neq ۲ \to m^۲ \neq ۹ \to m \neq \pm ۳$$

پس m هر عددی می‌تواند باشد به جز ± ۳.

۴ - گزینه ۳ دو خط زمانی بر هم عمودند که حاصلضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ باشد یعنی $m_۱ \times m_۲ = -۱$. پس ابتدا خطوط را استاندارد می‌نمائیم تا شیب هر کدام مشخص شود:

$$(m + ۲)y = x + ۳ \to y = (\frac{۱}{m + ۲})x + \frac{۳}{m + ۲} \to m_۱ = \frac{۱}{m + ۲}$$

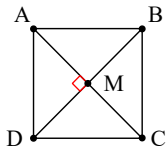
$$y = (۲m + ۱)x + ۱ \to m_۲ = ۲m + ۱$$

$$m_۱ \times m_۲ = -۱ \to \frac{۱}{m + ۲} \times (۲m + ۱) = -۱ \xrightarrow{\text{با فرض } m \neq -۲} ۲m + ۱ = -m - ۲$$

$$۳m = -۳ \to m = -۱$$

۵ - گزینه ۴ برای نوشتن معادلهٔ یک خط نیاز به شیب و یک نقطه از آن خط داریم. با توجه به تصویر می‌توان مختصات نقطهٔ M وسط قطر AC را محاسبه نماییم.

$$M\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{۲} = \dfrac{۵ + (-۳)}{۲} = ۱ \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{۲} = \dfrac{۴ + ۲}{۲} = ۳ \end{cases}$$



از طرفی قطرهای مربع برهم عمودند. شیب دو خط عمود برهم قرینه و معکوس یکدیگر می‌باشد.

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{۴ - ۲}{-۳ - ۵} = \frac{۲}{-۸} = -\frac{۱}{۴} \to m_{BD} = +۴$$

حال می‌توان معادلهٔ قطر BD را به‌صورت زیر نوشت:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \to y - ۳ = ۴(x - ۱) \to \quad y = ۴x - ۴ + ۳$$
$$y = ۴x - ۱$$
$$۴x - y = ۱$$

۶ - گزینه ۱ قطرهای متوازی‌الاضلاع، یکدیگر را نصف می‌کنند و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \to ۳ + (-۳) = -۲ + x_D \to x_D = ۲ \\ y_A + y_C = y_B + y_D \to ۴ + (-۲) = ۱ + y_D \to y_D = ۱ \end{cases}$$
$$\to x_D + y_D = ۲ + ۱ = ۳$$

۷ - گزینه ۳

$$۳x + ۲y = ۲ \xrightarrow{x=۴ \text{ (نقطه‌ای به طول ۴)}} ۳(۴) + ۲y = ۲ \to ۱۲ + ۲y = ۲$$
$$\to ۲y = -۱۰ \to \boxed{y = -۵} \to B(۴, -۵) \ , \ A(۲, ۱)$$
$$\to \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۴ - ۲)^۲ + (-۵ - ۱)^۲}$$
$$\to \overline{AB} = \sqrt{۴ + ۳۶} = \sqrt{۴۰} = \sqrt{۴ \times ۱۰} \to \boxed{\overline{AB} = ۲\sqrt{۱۰}}$$

۸ - گزینه ۴ فاصله نقطه $A\begin{vmatrix} -۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ از خط $y = ۳x + ۱$ طول ضلع مربع است، بنابراین داریم:

$$y = ۳x + ۱ \to ۳x - y + ۱ = ۰$$
$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳(-۱) - ۲ + ۱|}{\sqrt{۳^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۱۰}}$$
$$\to \text{قطر مربع } d = \text{ضلع مربع} \times \sqrt{۲} = \frac{۴}{\sqrt{۱۰}} \times \sqrt{۲} = \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۴}{\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}$$
$$\boxed{\to \text{قطر مربع} = \frac{۴\sqrt{۵}}{۵}}$$

۹ - گزینه ۳ چون دایره بر دو خط مماس است، پس فاصلهٔ مرکز دایره با دو خط، مساوی و برابر شعاع دایره است:

$$O(۲, ۱) \ , \ ۳x + ۴y - ۵ = ۰ \ , \ -۵x + ۱۲y - a = ۰$$
$$d_۱ = \frac{|۳(۲) + ۴(۱) - ۵|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۵}{۵} = ۱$$
$$d_۲ = \frac{|-۵(۲) + ۱۲(۱) - a|}{\sqrt{(-۵)^۲ + ۱۲^۲}} = \frac{|۲ - a|}{\sqrt{۱۶۹}} = \frac{|۲ - a|}{۱۳}$$

$$d_۱ = d_۲ \to \frac{|۲ - a|}{۱۳} = ۱ \to |۲ - a| = ۱۳ \to \begin{cases} ۲ - a = ۱۳ \to ۲ - ۱۳ = a \to a = -۱۱ \\ ۲ - a = -۱۳ \to ۲ + ۱۳ = a \to a = ۱۵ \end{cases}$$

توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ از رابطهٔ $AH = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۱۰ - گزینه ۳ نقطه‌ای به طول ۳ روی محور xها یعنی: $A(۳, ۰)$

نقطه‌ای به عرض $۳\sqrt{۳}$ روی محور yها یعنی: $B(۰, ۳\sqrt{۳})$

$$\rightarrow m_d = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳\sqrt{۳} - ۰}{۰ - ۳} = -\frac{۳\sqrt{۳}}{۳} \rightarrow \boxed{m_d = -\sqrt{۳}}$$

$$\xrightarrow{(۳,۰)\in d} y - ۰ = -\sqrt{۳}(x - ۳) \rightarrow \boxed{y = -\sqrt{۳}x + ۳\sqrt{۳}} \leftarrow d \text{ معادلهٔ}$$

خط d و d' برهم عمودند : $m_{d'} = \frac{-۱}{m_d} = \frac{-۱}{-\sqrt{۳}} \rightarrow \boxed{m_{d'} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}}$

$$\xrightarrow{(-\sqrt{۳},-۳)\in d'} y - (-۳) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x - (-\sqrt{۳})) \rightarrow y + ۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x + \sqrt{۳})$$

$$\rightarrow y + ۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + ۱ \rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - ۲} \quad d' \text{ معادلهٔ}$$

محل برخورد دو خط : $\begin{cases} y = -\sqrt{۳}x + ۳\sqrt{۳} \\ y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - ۲ \end{cases} \xrightarrow{\times ۳}$

$$\begin{cases} y = -\cancel{\sqrt{۳}x} + ۳\sqrt{۳} \\ ۳y = \cancel{\sqrt{۳}x} - ۶ \end{cases} +$$

$$۴y = ۳\sqrt{۳} - ۶ \rightarrow \boxed{y = \frac{۳\sqrt{۳} - ۶}{۴}}$$

۱۱ - گزینه ۲ نقطهٔ O مرکز دایره، روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، یعنی: $O(\alpha, \alpha)$

دو نقطهٔ $(k, ۲k - ۱)$ و $(۰, -۱)$ دو سر یک قطر دایره هستند، پس نقطهٔ $O(\alpha, \alpha)$ وسط این دو نقطه است:

$$\begin{cases} x_O = \frac{۰ + k}{۲} \\ y_O = \frac{-۱ + ۲k - ۱}{۲} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{k}{۲} \\ \alpha = \frac{۲k - ۲}{۲} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{k}{۲} \\ \alpha = k - ۱ \end{cases} \rightarrow \frac{k}{۲} = k - ۱$$

$$\rightarrow k = ۲k - ۲ \rightarrow ۲ = ۲k - k \rightarrow \boxed{k = ۲} \rightarrow \boxed{\alpha = ۱}$$

$$\rightarrow O(۱, ۱)$$

و اگر نقطهٔ B قرینهٔ نقطهٔ $A(-۲, ۳)$ نسبت به نقطهٔ $O(۱, ۱)$ باشد؛ داریم:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{۲} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{۲} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۱ = \frac{-۲ + x_B}{۲} \\ ۱ = \frac{۳ + y_B}{۲} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲ = -۲ + x_B \\ ۲ = ۳ + y_B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{x_B = ۴} \\ \boxed{y_B = -۱} \end{cases}$$

$$\rightarrow B(۴, -۱)$$

۱۲ - گزینه ۱ ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است پس ابتدا شیب و معادلهٔ ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-۱ - (-۴)}{۰ - ۴} = \frac{۳}{-۴} \xrightarrow{B(۰,-۱)} y - (-۱) = -\frac{۳}{۴}(x - ۰)$$

$$\rightarrow \boxed{y = -\frac{۳}{۴}x - ۱} \quad BC \text{ معادلهٔ ضلع}$$

اکنون شیب و معادلهٔ AH را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{AH}=-\frac{1}{m_{BC}}=-\frac{1}{-\frac{3}{4}}\rightarrow \boxed{m_{AH}=\frac{4}{3}} \xrightarrow{A(2,1)} y-1=\frac{4}{3}(x-2)$$

$$\rightarrow y-1=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}\rightarrow \boxed{y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}}$$ معادلهٔ ارتفاع AH

محل برخورد ضلع BC و ارتفاع AH $\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x-1 \\ y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3} \end{cases}\rightarrow -\frac{3}{4}x-1=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

$$\rightarrow -1+\frac{5}{3}=\frac{4x}{3}+\frac{3x}{4}\rightarrow \frac{2}{3}=\frac{16x+9x}{12}\rightarrow \frac{2}{3}=\frac{25x}{12}$$

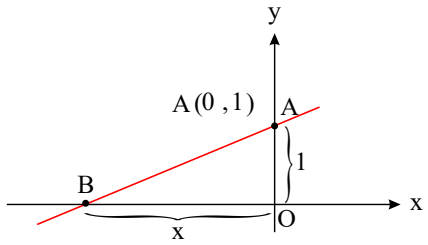
$$\rightarrow x=\frac{12\times 2}{25\times 3}\rightarrow \boxed{x=\frac{8}{25}}\rightarrow y=\frac{4}{3}\times\frac{8}{25}-\frac{5}{3}=\frac{32}{75}-\frac{5}{3}$$

$$\rightarrow y=\frac{32-125}{75}\rightarrow y=\frac{-93}{75}\rightarrow \boxed{y=\frac{-31}{25}}\rightarrow \boxed{H(\frac{8}{25},\frac{-31}{25})}$$

۱۳ - گزینه ۲ اگر دو خط $2y-8x+6=0$ و $12x-3y=m$ دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع باشند، آن‌گاه دو خط با هم موازی هستند، یعنی باید شیب خط مساوی و عرض از مبدأ نامساوی داشته باشند:

$$2y-8x+6=0\rightarrow 2y=8x-6\rightarrow y=4x-3$$
$$12x-3y=m\rightarrow 3y=12x-m\rightarrow y=4x-\frac{m}{3}$$
$$\rightarrow -3\neq -\frac{m}{3}\rightarrow m\neq 9\rightarrow m\in\mathbb{R}-\{9\}$$

۱۴ - گزینه ۲ مثلث مورد نظر به صورت شکل زیر می‌باشد:



$$\rightarrow S_{AOB}=\frac{x\times 1}{2}=\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}\rightarrow B\left|\begin{matrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0\end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\0\end{matrix}\right. \end{cases}\rightarrow \frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\rightarrow \frac{y-1}{x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\rightarrow y-1=\sqrt{3}x\rightarrow y-\sqrt{3}x-1=0\xrightarrow{\times\sqrt{3}}\sqrt{3}y-3x-\sqrt{3}=0$$

۱۵ - گزینه ۴

$$BC \text{ وسط } M\rightarrow \begin{cases} x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0 \\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{4+2}{2}=3 \end{cases}\rightarrow M\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$$

اکنون معادلهٔ میانهٔ AM را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right. \\ M\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right. \end{cases}\rightarrow \frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_M}{x_A-x_M}\rightarrow \frac{y-2}{x-1}=\frac{-1}{1}=-1\rightarrow y-2=-x+1\xrightarrow{y=0}x=3$$

۱۶ - گزینه ۲

$$A(-3,-1)\ ,\ O(0,0)\in d\rightarrow m_{d'}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{-1-0}{-3-0}\rightarrow \boxed{m_{d'}=\frac{1}{3}}$$

خط d و d' بر هم عمودند $\rightarrow m_d=\frac{-1}{m_{d'}}=\frac{-1}{\frac{1}{3}}\rightarrow \boxed{m_d=-3}$, $B(2,4)\in d$

$$\rightarrow y-y_B=m_d(x-x_B)\rightarrow y-4=-3(x-2)\rightarrow \boxed{y=-3x+10}$$

۱۷ - گزینه ۴ ابتدا معادلهٔ ضلع AC را به‌دست می‌آوریم و سپس فاصلهٔ نقطهٔ B از خط AC را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{۶-۰}{۵-(-۱)}\rightarrow m_{AC}=۱$$
$$y-y_C=m_{AC}(x-x_C)\rightarrow y-۰=۱(x-(-۱))\rightarrow y=x+۱$$
$$\rightarrow \boxed{x-y+۱=۰}\quad AC \text{ معادلهٔ خط}$$

$$BH=\frac{|ax_۰+by_۰+C|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱\times ۲-۱(-۳)+۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}\rightarrow \boxed{BH=۳\sqrt{۲}}$$

۱۸ - گزینه ۳ ابتدا دو خط را به فرم استاندارد می‌نویسیم تا شیب هر کدام مشخص شود.

$$ay+x=b\rightarrow ay=-x+b\rightarrow y=-\frac{۱}{a}x+\frac{b}{a}\rightarrow m_۱=-\frac{۱}{a}$$
$$a+by=۱\rightarrow by=-ax+۱\rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{۱}{a}\rightarrow m_۲=-\frac{a}{b}$$

حاصلضرب شیب دو خط عمود بر هم برابر -۱ می‌باشد پس داریم:

$$m_۱\times m_۲=-۱\rightarrow\left(-\frac{۱}{a}\right)\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-۱\xrightarrow{a\neq ۰}\frac{۱}{b}=-۱\rightarrow\boxed{b=-۱}\rightarrow ay+x=b\xrightarrow{b=-۱}ay+x=-۱$$

خط $ay+x=-۱$ از نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ عبور می‌نماید، پس مختصات این نقطه در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

$$a(-۲)+۱=-۱\rightarrow -۲a=-۲\rightarrow\boxed{a=۱}\rightarrow a+b=۱+(-۱)=۰$$

۱۹ - گزینه ۳

اگر ۳ نقطه A و B و C روی یک امتداد قرار داشته باشند، آن‌گاه شیب همه‌ی پاره‌خط‌های موجود با هم برابر می‌باشد.

$$m_{AB}=m_{AC}$$

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۲-m}{۳-(m+۱)}=\frac{۲-m}{۲-m}=۱\quad,\quad m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{m+۱-۲}{m^۲-۳}=\frac{m-۱}{m^۲-۳}$$

$$\rightarrow\frac{m-۱}{m^۲-۳}=۱\rightarrow m^۲-۳=m-۱\rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow(m-۲)(m+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\m=۲\end{cases}$$

حال باید هر دو مقدار را جایگذاری نمائیم

$m=۲\rightarrow A(۳,۲)\ ,\ B(۳,۲)\ ,\ (۴,۳)$ غیر قابل قبول

$m=۲$ غیرقابل قبول است، زیرا در نقطهٔ A و B بر هم منطبق می‌شوند.

$$m=-۱\rightarrow A(۳,۲)\,,\ B(۰,-۱)\ ,\ C(۱,۰)$$

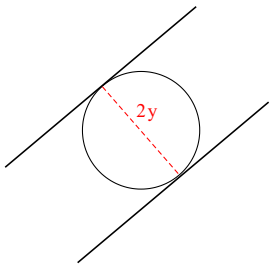
حال می‌توان معادله‌ی خط گذرنده از این نقاط را محاسبه کرد.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۲-(-۱)}{۳-۰}=\frac{۳}{۳}=۱$$

$$\begin{matrix}m_{AB}=۱\\B(۰,-۱)\end{matrix}\quad\rightarrow y-y_۰=m(x-x_۰)\rightarrow y+۱=۱(x-۰)\rightarrow y=x-۱$$

۲۰ - گزینه ۱

باتوجه به نمودار فاصله بین دو خط همان قطر دایره می‌باشد.



$$\begin{matrix}L_۱:x+۲y-۱۰=۰\\L_۲:x+۲y-۱=۰\end{matrix}\quad\rightarrow a=۱\,,\ b=۲\,,\ c=-۱\,,\ c'=۱۰$$

چون دو خط $L_۱$ و $L_۲$ موازی هستند، حال می‌توان با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی قطر دایره را محاسبه نمود:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۱-(-۱۰)|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\frac{۹}{\sqrt{۵}}\rightarrow d=۲r\rightarrow\frac{۹}{\sqrt{۵}}=۲r\rightarrow\text{شعاع دایره}\ r=\frac{۹}{۲\sqrt{۵}}$$

مساحت دایره $S=\pi r^۲=\pi(\frac{۹}{۲\sqrt{۵}})^۲=\frac{۸۱\pi}{۲۰}$

۲۱ - گزینه ۱ باتوجه به این که اضلاع چهارضلعی موازی هستند، دو خط مطرح شده موازی و دارای شیب یکسان می‌باشند داریم:

$$-x+y=۲\rightarrow y=x+۲$$
$$۲x+ay=۴\rightarrow y=-\frac{۲}{a}x+\frac{۴}{a}\quad\rightarrow -\frac{۲}{a}=۱\rightarrow a=-۲$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو خط موازی ابتدا معادلات باید شبیه یکدیگر شوند.

$$\begin{cases}-x+y=۲\\ ۲x-۲y=۴\end{cases}\quad\begin{cases}۲x-۲y=-۴\\ ۲x-۲y=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x-۲y+۴=۰\\ ۲x-۲y-۴=۰\end{cases}\rightarrow a=۲\,,\ b=-۲\,,\ c=۴\,,\ c'=-۴$$

با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی جواب را محاسبه می‌نماییم.

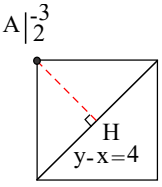
$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴-(-۴)|}{\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۸}}=\sqrt{۸}\rightarrow AD=AB=\sqrt{۸}\ \text{مربع}$$

چون مثلث متساوی‌الساقین است پس H وسط AB قرار دارد و می‌توان گفت:

$$AH=HB=\frac{\sqrt{۸}}{۲}$$

هاشورخورده $S=۲S_{\underset{ADH}{\triangle}}=۲\times\frac{۱}{۲}\times AD\times AH=\sqrt{۸}\times\frac{\sqrt{۸}}{۲}=۴$

۲۲ - گزینه ۲ باتوجه به تصویر فاصله‌ی نقطه‌ی A تا قطر مربع نصف طول قطر است. پس کافیست این فاصله را محاسبه نمائیم.



$$\begin{cases}A\left|\begin{matrix}-۳\\ ۲\end{matrix}\right.\\ x-y+۴=۰\end{cases}$$

(نصف قطر) $AH=d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱(-۳)-۱(۲)+۴|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$$\Rightarrow\ \text{طول قطر}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

مربع یک لوزی هم می‌باشد پس با رابطه‌ی لوزی هم می‌توان مساحت را محاسبه کرد.

$$S=\frac{۱}{۲}(\text{قطر})^۲=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲})^۲=۱$$

۲۳ - گزینه ۱

ابتد نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB را محاسبه می‌نماییم.

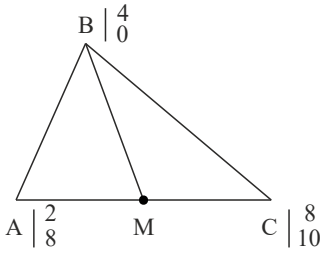
$$M\left|\begin{matrix}x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{x-۲+x}{۲}=x-۱\\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۰+۲x}{۲}=x\end{matrix}\right.$$

در این مرحله فاصله‌ی دو نقطهٔ مبدأ و M را محاسبه می‌نمائیم و برابر $\sqrt{۵}$ قرار می‌دهیم.

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^۲+(y_M-y_O)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+x^۲}=\sqrt{۵}$$
$$\rightarrow(x-۱)^۲+x^۲=۵\rightarrow ۲x^۲-۲x-۴=۰\rightarrow x^۲-x-۲=۰$$
$$\rightarrow(x-۲)(x+۱)=۰\ \begin{cases}x=-۱\\ x=۲\end{cases}$$

۲۴ - گزینه ۱

ابتدا یک تصویر کلی از مثلث رسم می‌نماییم.



نقطهٔ M وسط ضلع c قرار دارد، می‌توان مختصات نقطهٔ M را به شکل زیر محاسبه کرد:

$$M\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{۲+۸}{۲}=۵\\ y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{۸+۱۰}{۲}=۹\end{cases}\rightarrow m\left|\begin{matrix}۵\\ ۹\end{matrix}\right.$$

حال با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه طول میانهٔ BM را محاسبه می‌نماییم.

$$|BM| = \sqrt{(x_M - x_B)^۲ + (y_M - y_B)^۲} = \sqrt{(۵-۴)^۲ + (۹-۰)^۲} = \sqrt{۱ + ۸۱} = \sqrt{۸۲}$$

۲۵ - گزینه ۳ برای حل ابتدا شیب دو خط را محاسبه می‌نماییم:

$$y = ۲x + ۳ \rightarrow m = ۲$$

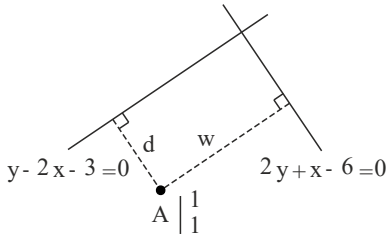
$$۲y + x - ۶ = ۰ \rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + ۳ \rightarrow m' = -\frac{۱}{۲}$$

شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر می‌باشد، پس دو خط بر هم عمودند.

مختصات نقطهٔ A در معادلات صدق نمی‌کند پس خارج دو خط قرار دارد.

فاصلهٔ نقطه تا خط از رابطهٔ $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ محاسبه می‌شود.

که فاصلهٔ نقطهٔ A تا دو خط طول و عرض مستطیل است.



$$d = \frac{|۱(۱) - ۲(۱) - ۳|}{\sqrt{۱^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۵}} \qquad \omega = \frac{|۲(۱) + ۱(۱) - ۶|}{\sqrt{۱^۲ + ۲^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

مساحت برابر است با: $S = d\omega = \frac{۴}{\sqrt{۵}} \times \frac{۳}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۲}{۵}$

۲۶ - گزینه ۲ اولین نکتهٔ قابل توجه این است که دو خط موازی شیب‌هایشان برابر است، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ y = ۳x + ۱ \end{array}\right\} \rightarrow a = ۳$$

حال دو معادله را به فرم $ax + by + c = ۰$ می‌نویسیم

$$۳x - y + b = ۰$$
$$۳x - y + ۱ = ۰$$

برای محاسبه فاصلهٔ دو خط رابط زیر کاربرد دارد:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|b - ۱|}{\sqrt{۳^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|b-۱|}{\sqrt{۱۰}}$$

طبق متن سوال این فاصله $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ می‌باشد.

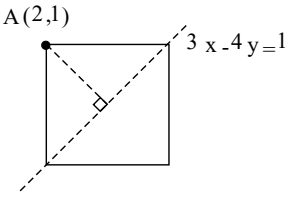
$$\frac{|b-۱|}{\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} \rightarrow |b-۱| = ۵ \rightarrow \begin{cases} b - ۱ = ۵ \rightarrow b = ۶ \\ b - ۱ = -۵ \rightarrow b = -۴ \end{cases}$$

حال $a + b$ را محاسبه نماییم:

$$\begin{cases} a + b = ۶ + ۳ = ۹ \\ a + b = -۴ + ۳ = -۱ \rightarrow \min \end{cases}$$

۲۷ - گزینه ۲

رسم یک تصویر مقدماتی به حل سوال کمک می‌نماید.



با توجه به نمودار، فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط مورد نظر، نصف طول قطر می‌باشد. برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه از خط معادله را به فرم $۳x - ۴y - ۱ = ۰$ نوشته و از رابطهٔ زیر استفاده می‌نماییم.

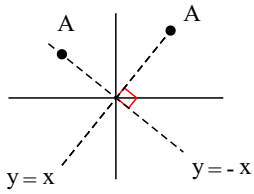
نصف طول قطر : $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳(۲) - ۴(۱) - ۱|}{\sqrt{(۳)^۲ + (-۴)^۲}} = \frac{۱}{۵}$

$\rightarrow$ قطر $= \frac{۱}{۵} \times ۲ = \frac{۲}{۵}$

مربع یک لوزی هم می‌باشد پس برای محاسبهٔ مساحت می‌توان نوشت:

مساحت $S = \frac{۱}{۲}$ (قطر)$^۲ = \frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۴}{۵۰} = \frac{۲}{۲۵}$

۲۸ ـ گزینه ۳



روش اول: با توجه به اینکه فاصلهٔ نقطهٔ A از محورهای مختصات برابر است، می‌توان نقطهٔ A را به صورت زیر فرض کرد. یعنی نقطه A روی نیمساز ناحیه اول و سوم یا نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد:

حالت اول:

نیمساز ناحیهٔ اول و سوم: $y = x \to ۳m - ۹ = -۲m + ۱ \to ۵m = ۱۰ \to m = ۲ \to A = (-۳, -۳)$

بنابراین فاصلهٔ مبدأ مختصات از A برابر است با: $OA = \sqrt{(-۳ - ۰)^۲ + (-۳ - ۰)^۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$

حالت دوم:

نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم : $y = -x \to ۳m - ۹ = ۲m - ۱ \to m = ۸ \to A(-۱۵, ۱۵)$

فاصلهٔ مبدأ مختصات از A برابر است با: $OA = \sqrt{(-۱۵ - ۰)^۲ + (۱۵ - ۰)^۲} = \sqrt{۴۵۰} = ۱۵\sqrt{۲}$

روش دوم:

$$|x_A| = |x_B| \to |-۲m + ۱| = |۳m - ۹|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} ۴m^۲ - ۴m + ۱ = ۹m^۲ - ۵۴m + ۸۱$$

$$\to ۵m^۲ - ۵۰m + ۸۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۵} m^۲ - ۱۰m + ۱۶ = ۰$$

$$\to (m - ۲)(m - ۸) = ۰ \begin{cases} m - ۲ = ۰ \to m = ۲ \\ m - ۸ = ۰ \to m = ۸ \end{cases}$$

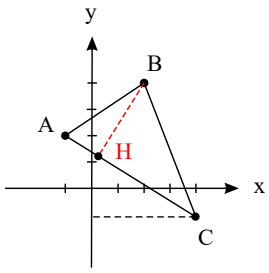
$$m = ۲ \to A(-۳, -۳) \to OA = \sqrt{(-۳ - ۰)^۲ + (-۳ + ۰)^۲} = \sqrt{۱۸} \to OA = ۳\sqrt{۲}$$

$$m = ۸ \to A(-۱۵, ۱۵) \to OA = \sqrt{(-۱۵ - ۰)^۲ + (۱۵ - ۰)^۲} = \sqrt{۴۵۰} \to OA = ۱۵\sqrt{۲}$$

۲۹ ـ گزینه ۲

قدم اول رسم یک تصویر کلی از مثلث مورد نظر می‌باشد.

برای محاسبهٔ مساحت باید طول ارتفاع BH و ضلع AC را محاسبه نماییم.



$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-۱ - ۲}{۴ - (-۱)} = \frac{-۳}{۵}$$

معادله ضلع AC: $y - y_۰ = m(x - x_۰) \to y - ۲ = -\frac{۳}{۵}(x + ۱) \to y = -\frac{۳}{۵}x - \frac{۳}{۵} + ۲$

$$\to ۵y = -۳x + ۷ \to ۳x + ۵y - ۷ = ۰$$

کافیست فاصلهٔ نقطهٔ B را تا خط AC محاسبه نماییم

طول ارتفاع BH: $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳(۲) + ۵(۴) - ۷|}{\sqrt{۳^۲ + ۵^۲}} = \frac{۱۹}{\sqrt{۳۴}}$

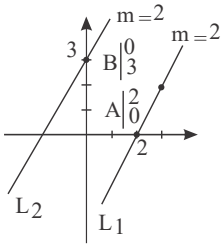
طول ضلع AC : $|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{(۴ + ۱)^۲ + (-۱ - ۲)^۲} = \sqrt{۳۴}$

مساحت: $S = \frac{۱}{۲} \times AC \times BH = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۹}{\sqrt{۳۴}} \times \sqrt{۳۴} = \frac{۱۹}{۲}$

۳۰ ـ گزینه ۱ برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو خط موازی ابتدا با معادله هر دو خط را داشته باشیم. با توجه به اطلاعات مسئله تصویر هر دو خط را رسم می‌نماییم:

معادلهٔ $L_۱$: $y = mx + h_۱ \to y = ۲x + h_۱ \xrightarrow{A(۲,۰)} ۰ = ۲(+۲) + h_۱ \to h_۱ = -۴ \to y = ۲x - ۴$

L_2 معادلهٔ : $y = mx + h_2 \to y = 2x + h_2 \to 3 = 2(0) + h_2 \to h_2 = 3 \to y = 2x + 3$



حال هر دو معادله را به فرم کلی می‌نویسیم و با استفاده از رابطهٔ زیر فاصلهٔ دو خط را محاسبه می‌نماییم:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \to d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 - (-4)|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

۳۱ - گزینه ۲

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = m_{BC} = \frac{-1 - 1}{-2 - 4} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC \text{ شیب عمود منصف} = -\frac{1}{m_{BC}} = -3$$

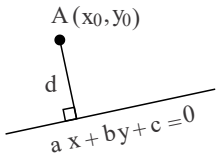
$$(BC \text{ وسط}) M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{-1 + 1}{2}\right) \Rightarrow M = (1, 0)$$

$$BC \text{ معادلهٔ عمودمنصف} : y - 0 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3 \Rightarrow 3x + y - 3 = 0$$

$$A(6,5) \Rightarrow AH = \frac{|3(6) + 5 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

۳۲ - گزینه ۴ برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه (x_0, y_y) از خط می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$\begin{matrix} 3x + 4y - a = 0 \\ A(a, 1) \end{matrix} \to d = \frac{|3a + 4(1) - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|2a + 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|2a + 4|}{5} = 5$$

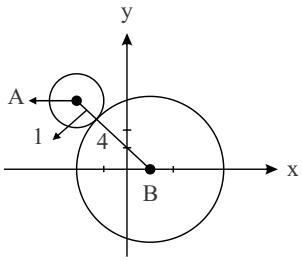
$$|2a + 4| = 25 \begin{cases} 2a + 4 = 25 \to 2a = 2 \to a_1 = \frac{21}{2} \\ 2a + 4 = -25 \to 2a = -29 \to a_2 = -\frac{29}{2} \end{cases} \to a_1 + a_2 = \frac{21}{2} - \frac{29}{2} = -4$$

۳۳ - گزینه ۱ نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر است با: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

ابتدا فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

چون مجموع شعاع دایره‌ها برابر فاصلهٔ دو مرکز است، یعنی $AB = R + R'$، پس این دو دایره بر هم مماس‌اند؛ یعنی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.



بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۳۴ - گزینه ۲ A و B نسبت به C قرینه‌اند. پس C وسط AB است. بنابراین:

$$x_C = \frac{x_A - x_B}{2} \to \frac{m + n + m - n}{2} = -2 \Rightarrow \boxed{m = -2}$$

$$y_C = \frac{y_A - y_B}{2} \to \frac{2n - 3 + 2m + 3}{2} = 2 \Rightarrow n + m = 2$$

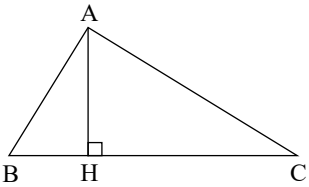
$$\xrightarrow{m=-2} n - 2 = 2 \Rightarrow \boxed{n = 4}$$

در نتیجه:

$$۳m - ۲n = ۳ \times (-۲) - ۲ \times (۴) = -۱۴$$

۳۵ - گزینه ۱ برای حل سوال توجه به این نکته الزامیست، هرگاه دو خط برهم عمود باشند، شیب یکی معکوس و قرینهٔ دیگریست.

$$y = x \to m_{BC} = ۱ \to m_{AH} = -۱$$



حال می‌توان معادلهٔ خطی را نوشت که یک نقطه و شیب آن را داریم:

$$y - y_{۰} = m(x - x_{۰}) \xrightarrow[A(۱,۲)]{m_{AH}=-۱} y - ۲ = -۱(x - ۱) \to y = -x + ۳$$

۳۶ - گزینه ۳

$$۲y - ۳x + ۱ = ۰ \to ۲y = ۳x - ۱ \to y = \frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲} \to m' = \frac{۳}{۲}$$

$$\to m = \frac{-۱}{\frac{۳}{۲}} \to \boxed{m = -\frac{۲}{۳}}$$ شیب خط

$$y + ۲x = ۳ \xrightarrow[x=۲]{\text{نقطه‌ای به طول ۲}} y + ۲(۲) = ۳ \to y = -۱ \to \boxed{A(۲, -۱)}$$

اکنون معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که شیب آن $m = -\frac{۲}{۳}$ است و از نقطهٔ $A(۲, -۱)$ می‌گذرد:

$$y - y_A = m(x - x_A) \to y - (-۱) = -\frac{۲}{۳}(x - ۲) \to y + ۱ = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۴}{۳}$$

$$\to \boxed{y = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۱}{۳}} \to \boxed{\text{عرض از مبدأ} = \frac{۱}{۳}}$$

۳۷ - گزینه ۲

دو خط یکدیگر را در نقطه‌ای به‌طول یک قطع کنند. $\xrightarrow[y=۲]{x=۱} a(۱) + a(۲) - ۱ = ۱ \longrightarrow ۳a = ۲ \longrightarrow a = \frac{۲}{۳}$

۳۸ - گزینه ۳

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} - ۲ \\ y = \sqrt{۲x - ۷} - ۱ \end{cases} \longrightarrow \sqrt{x} - ۲ = \sqrt{۲x - ۷} - ۱ \longrightarrow \sqrt{x} - ۱ = \sqrt{۲x - ۷}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x - ۲\sqrt{x} + ۱ = ۲x - ۷ \longrightarrow -x + ۸ = ۲\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ - ۱۶x + ۶۴ = ۴x$$

$$\longrightarrow x^۲ - ۲۰x + ۶۴ = ۰ \longrightarrow (x - ۱۶)(x - ۴) = ۰ \longrightarrow \begin{cases} x = ۱۶ \text{ غ ق ق} \\ x = ۴ \to y = ۰ \end{cases}$$

$$\longrightarrow A(۴, ۰), B(۰, ۳) \longrightarrow AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(۴ - ۰)^۲ + (۰ - ۳)^۲}$$

$$\longrightarrow \boxed{AB = ۵}$$

۳۹ - گزینه ۳ دو خط $۲y = ax + ۸$ و $x + y = -a$ دو ضلع روبه‌روی یک مربع هستند و دارای شیب یکسان هستند و فاصلهٔ دو خط برابر ضلع مربع است، پس داریم:

$$\begin{cases} x + y + a = ۰ \\ ax - ۲y + ۸ = ۰ \end{cases} \longrightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۱}{-۲} \neq \frac{a}{۸} \longrightarrow \boxed{a = -۲}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x + y - ۲ = ۰ \\ -۲x - ۲y + ۸ = ۰ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y - ۲ = ۰ \\ x + y - ۴ = ۰ \end{cases}$$

فاصلهٔ دو خط (ضلع مربع) $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|-۲ - (-۴)|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$

$$S_{\square} = (\sqrt{۲})^۲ = ۲ \longrightarrow \underset{\text{هاشور}}{S} = \frac{S_{\square}}{۴} = \frac{۲}{۴} \longrightarrow \boxed{\underset{\text{هاشور خورده}}{S} = \frac{۱}{۲}}$$ (مساحت مربع)

۴۰ - گزینه ۳ دو خط موازی هستند پس شیب یکسان دارند، یعنی:

$$\frac{a}{۶} = -\frac{b}{۳} \to a = -۲b$$

فاصلهٔ دو خط برابر ۳ است، پس داریم:

$$\frac{a}{۶}x - y + ۴ = ۰ \quad , \quad -\frac{b}{۳}x - y - ۱ = ۰$$

$$\to d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \to ۳ = \frac{|۴ - (-۱)|}{\sqrt{(\frac{a}{۶})^۲ + (-۱)^۲}} \to \sqrt{(\frac{a}{۶})^۲ + ۱} = \frac{۵}{۳}$$

$$\to (\frac{a}{۶})^۲ + ۱ = \frac{۲۵}{۹} \to (\frac{a}{۶})^۲ = \frac{۱۶}{۹} \to (\frac{a}{۶})^۲ = (\frac{۴}{۳})^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{۶} = \frac{۴}{۳} \to a = ۸\ ,\ b = -۴ \to ab = -۳۲ \\ \frac{a}{۶} = -\frac{۴}{۳} \to a = -۸\ ,\ b = ۴ \to ab = -۳۲ \end{cases}$$

توجه کنید فاصلهٔ دو خط موازی $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ از رابطهٔ $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۴۱ - گزینه ۴ دو ضلع مجاور یک مربع برهم عمودند، پس شیب آن‌ها را به‌دست آورده و حاصل‌ضربشان را مساوی -۱ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} mx + ۲y = ۳ \to \text{شیب} = -\frac{m}{۲} \\ x + (m+۱)y = ۱ \to \text{شیب} = -\frac{۱}{m+۱} \end{cases}$$

$$\text{دو خط برهم عمودند} \to (-\frac{m}{۲})(\frac{-۱}{m+۱}) = -۱ \to \frac{m}{۲m+۲} = -۱ \to ۲m + ۲ = -m$$

$$\to ۳m = -۲ \to m = -\frac{۲}{۳}$$

۴۲ - گزینه ۳

$$\text{مساحت دایره} = ۹\pi \to \pi R^۲ = ۹\pi \to \text{شعاع دایره } R = ۳$$

شعاع دایره ۳ است و چون دایره برخط $۴y - ۳x = k$ مماس است پس فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۴y - ۳x = k$ برابر شعاع دایره یعنی ۳ است.

$$\text{مرکز: } O(-۱, ۲) \quad , \quad ۳x - ۴y + k = ۰$$

$$\to R = \frac{|۳(-۱) - ۴(۲) + k|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = ۳ \to \frac{|k - ۱۱|}{۵} = ۳ \to |k - ۱۱| = ۱۵ \to \begin{cases} k - ۱۱ = ۱۵ \to k = ۲۶ \\ k - ۱۱ = -۱۵ \to k = -۴ \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها $k = -۴$ پاسخ است.

توجه کنید فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ از رابطهٔ $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۴۳ - گزینه ۱ ارتفاع وارد بر ضلع BC، عمود بر ضلع BC است پس شیب آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{۴ - ۳}{۵ - (-۱)} = \frac{۱}{۶} \to m_{AH} = -۶$$

معادلهٔ ارتفاع AH عبارت است از معادلهٔ خطی که شیب آن -۶ است و از نقطهٔ $A(۲, ۰)$ می‌گذرد:

$$y - ۰ = -۶(x - ۲) \to y = -۶x + ۱۲$$

۴۴ - گزینه ۴ در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگر هستند و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \to ۲ + ۸ = ۴ + x_D \to x_D = ۶ \\ y_A + y_C = y_B + y_D \to ۳ + ۲ = ۱ + y_D \to y_D = ۴ \end{cases} \to D(۶, ۴)$$

$$\to \text{طول قطر } BD = \sqrt{(۶ - ۴)^۲ + (۴ - ۱)^۲} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$$

۴۵ - گزینه ۱

$$y = \frac{-۳}{۴}x \to ۴y = -۳x \to ۳x + ۴y = ۰$$

پس دو خط $۳x + ۴y = ۰$ و $۳x + ۴y = ۶$ موازی هستند و مرکز دایره در معادلهٔ خط وسط این دو خط صدق می‌کند، یعنی:

$$۳x + ۴y = \frac{۶ + ۰}{۲} \to ۳x + ۴y = ۳ \quad (\star)$$

مرکز دایره هم روی خط $y = x - ۱$ قرار دارد پس مختصات مرکز دایره $C\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha - ۱\end{matrix}\right.$ است و این مختصات را در معادلهٔ خط $(\star)$ قرار می‌دهیم:

$$۳\alpha + ۴(\alpha - ۱) = ۳ \to ۷\alpha = ۷ \to \alpha = ۱ \to C\left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$\to |CO| = \sqrt{(۱ - ۰)^۲ + (۰ - ۰)^۲} = ۱$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۸ - ۴	۱۵ - ۴	۲۲ - ۲	۲۹ - ۲	۳۶ - ۳	۴۳ - ۱
۲ - ۲	۹ - ۳	۱۶ - ۲	۲۳ - ۱	۳۰ - ۱	۳۷ - ۲	۴۴ - ۴
۳ - ۴	۱۰ - ۳	۱۷ - ۴	۲۴ - ۱	۳۱ - ۲	۳۸ - ۳	۴۵ - ۱
۴ - ۳	۱۱ - ۲	۱۸ - ۳	۲۵ - ۳	۳۲ - ۴	۳۹ - ۳	
۵ - ۴	۱۲ - ۱	۱۹ - ۳	۲۶ - ۲	۳۳ - ۱	۴۰ - ۳	
۶ - ۱	۱۳ - ۲	۲۰ - ۱	۲۷ - ۲	۳۴ - ۲	۴۱ - ۴	
۷ - ۳	۱۴ - ۲	۲۱ - ۱	۲۸ - ۳	۳۵ - ۱	۴۲ - ۳	