علی هاشمی

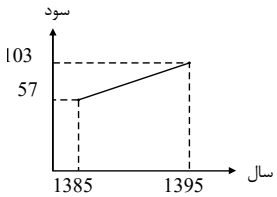
۱ - دو نقطه روی خط به معادله‌ی $x - y = ۱$ قراردارند که فاصله‌ی آن‌ها از خط به معادله‌ی $۲x + ۳y = ۶$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. مجموع عرض این دو نقطه کدام است؟

۲ - دو ضلع یک مربع، منطبق بر دو خط به معادلات $۳x + ۴y = ۵$ و $۶x + ۸y = ۷$ است. محیط این مربع چقدر است؟

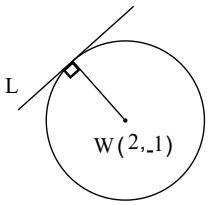
۳ - دو نقطه بر خطی به معادله‌ی $y = x - ۲$ قرار دارند که فاصله‌ی این نقاط از خط به معادله‌ی $۲x - ۳y = ۷$ برابر $۲\sqrt{۱۳}$ است. مجموع طول‌های این دو نقطه کدام است؟

۴ - اگر دو خط $۲y - ۳x = ۱$ و $y = mx + ۵$ با هم موازی باشند، مقدار m کدام است؟

۵ - سود سالانه‌ی یک کارگاه تولیدی (برحسب میلیون تومان) از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار زیر سیر صعودی داشته‌است. در کدام سال، مقدار سود سالانه‌ی این شرکت، با میانگین سود ده ساله برابر است؟

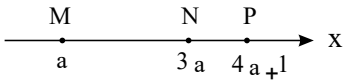


۶- خط $L : ۳x - ۴y = ۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره چقدر است؟



۷- فاصله‌ی دو خط $y = ۲x + ۱۱$ و $y = ۲x - ۴$ از یکدیگر چند برابر $\sqrt{۵}$ است؟

۸- در شکل مقابل داریم : $۲MN + MP = ۲۲$، اندازه‌ی پاره‌خط NP کدام است؟

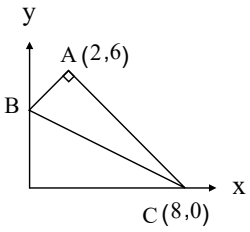


۹- یکی از اضلاع مربعی بر خط $L : y = ۲x - ۱$ واقع است. اگر $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن چقدر است؟

۱۰- در مثلثی با رئوس $A(۲,۵)$، $B(۳,۷)$ و $C(-۱,۵)$ معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع BC کدام است؟

۱۱ - قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a-۱, b-۵)$ نسبت به نقطه‌ی $M(-۱, ۴)$، نقطه‌ی $B(۲b+۵, ۲a+۱)$ می‌باشد. ab کدام است؟

۱۲ - با توجه به شکل مقابل، عرض نقطه‌ی B کدام است؟



۱۳ - اگر نقاط $A(۲, ۱)$، $B(۴, -۳)$، $C(۶, ۵)$ و $D(a, b)$ مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، حاصل ab کدام است؟

۱۴ - نقاط $A(۷, ۵)$ و $C(۳, ۹)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. محیط این مربع چقدر است؟

۱۵ - اگر سه نقطه‌ی متمایز $A(۴, ۱)$، $B(a+۱, ۲a-۲)$ و $C(a+۳, ۲a-۵)$ در یک امتداد باشند، مقدار a کدام است؟

۱۶ - نقاط $M(۴,۲)$، $N(۷,۶)$ و $P(۰,۵)$ رئوس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث چقدر است؟

۱۷ - مربع $ABCD$ در ناحیه‌ی اول صفحه‌ی مختصات واقع است؛ به‌طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند. معادله‌ی ضلع AD کدام است؟

۱۸ - اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(a,a-۱)$ از خط $۵x-۱۲y-۱۲=۰$ برابر $\frac{۲۱}{۱۳}$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر متمایز a کدام است؟

۱۹ - اگر خط $y=nx+۴$ بر دو خط $y=(m-۵)x+۷$ و $y=(۷-m)x-۱$ عمود باشد، حاصل $m-n$ کدام است؟

۲۰ - از نقطه‌ی $A(۳,۲)$ خط $y=۲x-۴$ را مماس بر دایره‌ای به مرکز $W(-۱,۲)$ رسم کرده‌ایم. فاصله‌ی A تا نقطه‌ی تماس چند برابر $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ است؟

۲۱ - فاصله‌ی بین دو خط با معادلات $۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ و $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ کدام است؟

۲۲ - اگر خطوط $-bx + (a-b)y - ۸ = ۰$ و $۳ax + by - c = ۰$ در نقطه‌ی $(۱, ۲)$ همدیگر را قطع کنند و بر هم عمود باشند، آن‌گاه c کدام است؟ $(a \neq b, a \neq ۰, b \neq ۰)$

۲۳ - نقطه‌ی $O'(۳, ۲)$ مرکز لوزی $ABCD$ است. اگر قطرهای لوزی به موازات محورهای مختصات و خط $۶x + y = ۸$ معادله‌ی یکی از اضلاع این لوزی باشد، محیط لوزی چقدر است؟

۲۴ - معادله‌ی خطی که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -۳ قطع کرده و بر خط $۲x + ۳y = -۱$ عمود باشد، کدام است؟

۲۵ - مثلث ABC که مختصات رأس‌های آن $A(۳, ۵)$، $B(۳, -۱)$ و $C(۷, ۲)$ است، چگونه است؟

۲۶ - خط $۶x - ۸y = ۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲, -۱)$ مماس است. اندازه‌ی شعاع دایره کدام است؟

۲۷ - دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۳)$ مفروض است، از نقطهٔ $(۸,-۵)$ واقع بر محیط دایره خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم. خط مماس محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۲۸ - نقاط $A\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۳\\-۲\end{vmatrix}$، $C\begin{vmatrix}۳\\۱\end{vmatrix}$ رئوس مثلث هستند. نوع مثلث و مساحت آن کدام است؟

۲۹ - اگر یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله‌ی $y=x+۲$ و نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ یک رأس آن باشد، مساحت مربع کدام است؟

۳۰ - اگر قطر یک مربع منطبق بر خط به معادله‌ی $۳x-۴y=۱$ و نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ یک رأس این مربع باشد، محیط این مربع کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ مختصات نقاط روی خط $y = x - ۱$ به صورت $\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha - ۱\end{vmatrix}$ هستند حال، فاصله‌ی این نقاط را از خط به معادله‌ی $۲x + ۳y - ۶ = ۰$ به دست آورده وبرابر $\sqrt{۱۳}$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{|۲\alpha + ۳\alpha - ۳ - ۶|}{\sqrt{۴ + ۹}} = \frac{|۵\alpha - ۹|}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳} \to |۵\alpha - ۹| = ۱۳$$

$$\to \begin{cases} ۵\alpha - ۹ = ۱۳ \to \alpha = \frac{۲۲}{۵} \to \alpha - ۱ = \frac{۲۲}{۵} - ۱ = \frac{۱۷}{۵} \\ ۵\alpha - ۹ = -۱۳ \to \alpha = -\frac{۴}{۵} \to \alpha - ۱ = -\frac{۴}{۵} - ۱ = -\frac{۹}{۵} \end{cases}$$

بنابراین مجموع عرض این دو نقطه برابر $\frac{۸}{۵} = \frac{۹}{۵} - \frac{۱۷}{۵}$ است.

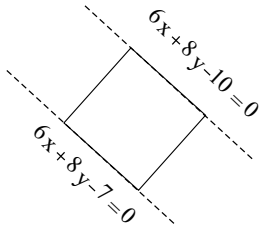
توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = ۰$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ بدست می‌آید.

۲ - گزینه ۳ اول باید مشخص کنیم این دو ضلع، نسبت به هم چه وضعی دارند.

$$۳x + ۴y = ۵ \to m = -\frac{۳}{۴}$$

$$۶x + ۸y = ۷ \to m' = -\frac{۶}{۸} = -\frac{۳}{۴}$$

$\to$ دو ضلع موازیند



$$\to \text{ضلع مربع} = \frac{|-۱۰ - (-۷)|}{\sqrt{۳۶ + ۶۴}} = \frac{۳}{۱۰} \to \text{محیط مربع} = ۴(\frac{۳}{۱۰}) = \frac{۱۲}{۱۰} = ۱٫۲$$

فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ از رابطه‌ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ بدست می‌آید.

۳ - گزینه ۲ نقاط روی خط به معادله‌ی $y = x - ۲$ به‌صورت $A\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha - ۲\end{vmatrix}$ می‌باشند.

$$\begin{cases} A\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha - ۲\end{vmatrix} \\ ۲x - ۳y - ۷ = ۰ \end{cases} \to \frac{|\alpha - ۳\alpha + ۶ - ۷|}{\sqrt{۴ + ۹}} = \frac{|-\alpha - ۱|}{\sqrt{۱۳}} = ۲\sqrt{۱۳} \to |-\alpha - ۱| = ۲۶$$

$$\to \begin{cases} -\alpha - ۱ = ۲۶ \to \alpha = -۲۷ \\ -\alpha - ۱ = -۲۶ \to \alpha = ۲۵ \end{cases} \to \text{مجموع طول نقاط} = -۲$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = ۰$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۴ - گزینه ۲ نکته: در معادله‌ی استاندارد خط به‌صورت $y = ax + b$، مقدار a را شیب و مقدار b را عرض از مبدأ می‌نامیم.

نکته: دو خط زمانی با هم موازی‌اند که شیب‌هایشان برابر باشند.

$$۲y - ۳x = ۱ \to ۲y = ۳x + ۱ \to y = \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲} \to \text{شیب} = \frac{۳}{۲}$$

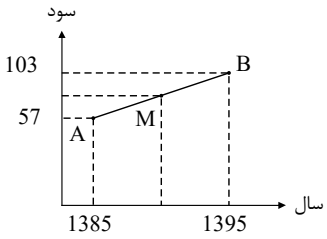
$$y = mx + ۵ \to \text{شیب} = m \to m = \frac{۳}{۲}$$

۵ - گزینه ۲

نکته: مختصات وسط پاره‌خط AB عبارت است از: $M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$

چون نمودار سود سالیانه به‌صورت خطی است، میانگین در نقطه‌ی میانی اتفاق می‌افتد.

با توجه به نکته‌ی بالا مختصات این نقطه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱۳۸۵ + ۱۳۹۵}{۲} = ۱۳۹۰$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۵۷ + ۱۰۳}{۲} = ۸۰$$

پس در سال ۱۳۹۰، سود سالانه برابر میانگین سود ده ساله خواهد بود که برابر ۸۰ میلیون تومان است.

بنابراین گزینه‌ی ۲ پاسخ است.

۶ - گزینه ۲ نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰ , y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$ برابر است با: $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$

نکته: اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، آن‌گاه فاصله‌ی مرکز دایره تا این خط، برابر شعاع دایره است.

کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی W را از خط L حساب کنیم.

$$L : ۳x - ۴y = ۰ \ , \ W(۲, -۱) : \quad R = \frac{|۳(۲) - ۴(-۱)|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

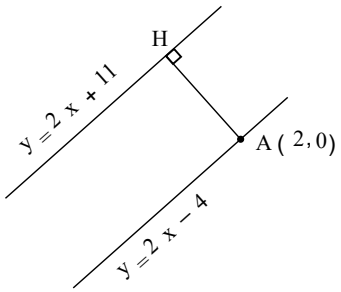
۷ - گزینه ۳ راه حل اول:

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$ برابر است با: $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$

نکته: برای محاسبه‌ی فاصله‌ی دو خط موازی، یک نقطه‌ی دلخواه روی یکی از آن‌ها درنظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را از خط دیگر به‌دست می‌آوریم.

ابتدا توجه کنید که دو خط $y = ۲x + ۱۱$ و $y = ۲x - ۴$ با هم موازیند. حال برای تعیین فاصله‌ی آن‌ها نقطه‌ی دلخواه $A(۲, ۰)$ را از خط $y = ۲x - ۴$ انتخاب می‌کنیم و فاصله‌ی آن را از خط $y - ۲x - ۱۱ = ۰$ به‌دست می‌آوریم.

$$AH = \frac{|۰ - ۲(۲) - ۱۱|}{\sqrt{۱ + ۴}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۵}} = ۳\sqrt{۵}$$



راه حل دوم:

نکته: فاصله‌ی دو خط موازی $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ برابر است با: $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$

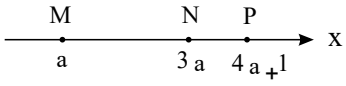
با توجه به نکته‌ی بالا، فاصله‌ی دو خط موازی $y - ۲x - ۱۱ = ۰$ و $y - ۲x + ۴ = ۰$ برابر است با:

$$\frac{|-۱۱ - ۴|}{\sqrt{۱^۲ + ۲^۲}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۵}} = ۳\sqrt{۵}$$

۸ - گزینه ۴ نکته‌ی ۱: اگر A و B دو نقطه‌ی هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه: $AB = |x_B - x_A|$

نکته‌ی ۲: اگر A و B دو نقطه‌ی هم طول در صفحه باشند، آن‌گاه: $AB = |y_B - y_A|$

با توجه به اینکه هر سه نقطه روی محور xها واقع‌اند، پس هم‌عرض هستند، بنابراین با استفاده از نکته‌ی بالا می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} MN = x_N - x_M = ۳a - a = ۲a \\ MP = x_P - x_M = ۴a + ۱ - a = ۳a + ۱ \end{cases}$$

حال با جایگذاری مقادیر بالا در معادله‌ی $۲MN + MP = ۲۲$، خواهیم داشت:

$$۲(۲a) + ۳a + ۱ = ۲۲ \Rightarrow ۷a + ۱ = ۲۲ \Rightarrow \boxed{a = ۳}$$

پس اندازه‌ی پاره‌خط NP برابر است با:

$$NP = x_P - x_N = ۴a + ۱ - ۳a = a + ۱ = ۳ + ۱ = ۴ \Rightarrow \boxed{NP = ۴}$$

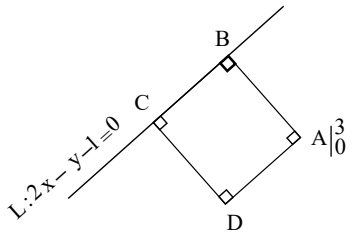
۹ - گزینه ۲

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$، برابر است با:

$$\frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

چون مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی خط L صدق نمی‌کند، پس A روی خط L قرار ندارد. بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L برابر طول ضلع مربع است. با توجه به نکته‌ی بالا، این مقدار برابر است با:

$$\text{طول ضلع مربع} = AB = \frac{|۲(۳) - ۰ - ۱|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$



پس مساحت این مربع برابر است با:

$$S = (AB)^۲ = (\sqrt{۵})^۲ = ۵$$

۱۰ - گزینه ۲

نکته: مختصات وسط پاره‌خط AB، عبارت است از:

$$M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$$

ابتدا مختصات نقطه‌ی M (وسط ضلع BC) را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{۳ + (-۱)}{۲} = ۱ \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{۷ + ۵}{۲} = ۶ \end{cases} \Rightarrow M(۱, ۶)$$

اکنون کافی است معادله‌ی خطی را که از دو نقطه‌ی $A(۲, ۵)$ و $M(۱, ۶)$ می‌گذرد، بنویسیم. برای این منظور دو راه حل ارائه می‌کنیم:

راه حل اول:

نکته: معادله‌ی خطی با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت $y = mx + h$ است.

نکته: شیب خط گذرا از نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

شیب خط گذرا از نقاط A و M برابر است با:

$$m_{AM} = \frac{۶ - ۵}{۱ - ۲} = -۱$$

بنابراین معادله‌ی میانه‌ی AM به صورت $y = -x + h$ است.

چون $A(۲, ۵)$ روی این خط واقع است، پس مختصات آن در این معادله صدق می‌کند:

$$۵ = -۲ + h \Rightarrow h = ۷$$

بنابراین معادله‌ی میانه‌ی AM به صورت $y = -x + ۷$ یا $x + y = ۷$ است.

راه حل دوم:

نکته: معادله‌ی خط گذرا از نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$، عبارت است از:

$$y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$$

$$y - ۵ = \frac{۶ - ۵}{۱ - ۲}(x - ۲) \Rightarrow y - ۵ = -x + ۲ \Rightarrow \boxed{x + y = ۷}$$

۱۱ - گزینه ۴ **راه حل اول:**

نکته: مختصات وسط پاره‌خط AB، عبارت است از:

$$M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$$

نقاط A و B نسبت به نقطه‌ی M قرینه‌اند، پس نقطه M وسط آن‌ها قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{۲} = x_M \Rightarrow \frac{a - ۱ + ۲b + ۵}{۲} = -۱ \\ \frac{y_A + y_B}{۲} = y_M \Rightarrow \frac{b - ۵ + ۲a + ۱}{۲} = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + ۲b = -۶ \\ ۲a + b = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۰ \\ b = -۸ \end{cases} \Rightarrow \boxed{ab = -۸۰}$$

راه حل دوم:

نکته: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه‌ی $M(x_M, y_M)$، عبارت است از:

$$B(۲x_M - x_A, ۲y_M - y_A)$$

با توجه به نکته‌ی بالا، قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a-۱, b-۵)$ نسبت به نقطه‌ی $M(-۱, ۴)$ عبارت است از:

$$B(-۲-a+۱, ۸-b+۵) = B(-a-۱, -b+۱۳)$$

طبق فرض مختصات این نقطه به‌صورت $B(۲b+۵, ۲a+۱)$ است. پس :

$$\begin{cases} ۲b+۵ = -a-۱ \\ ۲a+۱ = -b+۱۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+۲b = -۶ \\ ۲a+b = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۰ \\ b = -۸ \end{cases} \Rightarrow \boxed{ab = ۸۰}$$

۱۲ - گزینه ۴

نکته: شیب خط گذرا از نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$، برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

نکته: دو خط غیر موازی با محورهای مختصات، زمانی بر هم عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌هایشان برابر -۱ باشد.

شیب خط گذرا از نقاط $A(۲, ۶)$ و $C(۸, ۰)$ برابر است با:

$$m_{AC} = \frac{۰-۶}{۸-۲} = -۱$$

با توجه به شکل، AB بر AC عمود است، پس:

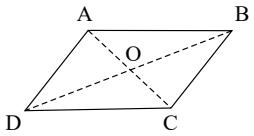
$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -۱ \Rightarrow m_{AB} = \frac{-۱}{m_{AC}} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$$

نقطه B را به‌صورت $(۰, b)$ در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه $m_{AB} = ۱$، داریم:

$$\frac{b-۶}{۰-۲} = ۱ \Rightarrow b-۶ = -۲ \Rightarrow \boxed{b = ۴}$$

۱۳ - گزینه ۳ نکته: در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس اگر نقطه‌ی O محل تقاطع قطرهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_A + x_C}{۲} = \dfrac{x_B + x_D}{۲} \\ y_O = \dfrac{y_A + y_C}{۲} = \dfrac{y_B + y_D}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



طبقه فرض نقاط $A(۲, ۱)$، $B(۴, -۳)$، $C(۶, ۵)$ و $D(a, b)$ مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. پس با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases} ۲+۶ = ۴+a \\ ۱+۵ = -۳+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۹ \end{cases} \Rightarrow \boxed{ab = ۳۶}$$

۱۴ - گزینه ۱

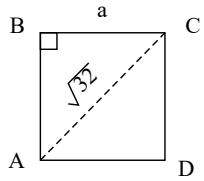
نکته: فاصله‌ی نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ (طول پاره‌خط AB) برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

نکته (قضیه‌ی فیثاغورس): در مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

طول پاره‌خط AC برابر طول قطر مربع است که با توجه به نکته‌ی بالا برابر است با:

$$\text{طول قطر مربع} : d = AC = \sqrt{(۳-۷)^۲ + (۹-۵)^۲} = \sqrt{۱۶+۱۶} = \sqrt{۳۲}$$



اگر طول ضلع مربع a باشد، طبق رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC خواهیم داشت:

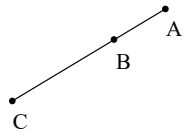
$$a^۲ + a^۲ = (\sqrt{۳۲})^۲ \Rightarrow ۲a^۲ = ۳۲ \Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow \boxed{a = ۴}$$

بنابراین محیط این مربع برابر است با: $۴ \times ۴ = ۱۶$.

تذکر: در مربعی به‌طول ضلع a، طول قطر برابر $d = \sqrt{۲}a$ است.

۱۵ - گزینه ۲

نکته: شیب خط گذرا از نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با: $m_{AB} = \dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$



با توجه به اینکه نقاط A، B و C در یک راستا قرار دارند، باید شیب AB و شیب BC برابر باشد.

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{(۲a-۲)-۱}{(a+۱)-۴} = \frac{(۲a-۵)-(۲a-۲)}{(a+۳)-(a+۱)} \Rightarrow \frac{۲a-۳}{a-۳} = \frac{-۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴a-۶ = -۳a+۹ \Rightarrow ۷a = ۱۵ \Rightarrow \boxed{a = \frac{۱۵}{۷}}$$

۱۶ - گزینه ۳ نکته: طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$

نکته (عکس قضیه‌ی فیثاغورس): اگر در یک مثلث، مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

نکته: مساحت مثلث قائم‌الزاویه، برابر نصف حاصل‌ضرب طول اضلاع قائمه است.

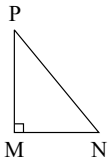
ابتدا طول هر یک از اضلاع مثلث را تعیین می‌کنیم:

$$MN=\sqrt{(۷-۴)^۲+(۶-۲)^۲}=۵\ ,\ MP=\sqrt{(۰-۴)^۲+(۵-۲)^۲}=۵$$

$$NP=\sqrt{(۰-۷)^۲+(۵-۶)^۲}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

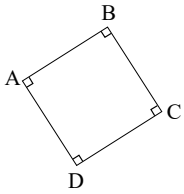
با توجه به اینکه بین اضلاع این مثلث رابطه‌ی $NP^۲=MN^۲+MP^۲$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم مثلث MNP در رأس M قائمه است. پس مساحت آن برابراست با:

$$S=\frac{۱}{۲}MN\times MP=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۵=\frac{۲۵}{۲}=۱۲٫۵$$



۱۷ - گزینه ۳

نکته: شیب خط گذرا از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:



$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

نکته: دو خط غیر موازی محورهای مختصات، زمانی برهم عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌هایشان برابر -۱ باشد.

شیب ضلع AB برابر است با: $m_{AB}=\frac{۴-۱}{۱۰-۵}=\frac{۳}{۵}$

طبق شکل، ضلع AD بر ضلع AB عمود است، پس : $m_{AD}=\frac{-۱}{m_{AB}}=-\frac{۵}{۳}$

حال برای نوشتن معادله‌ی ضلع AD دو راه حل ارائه می‌کنیم:

راه حل اول: نکته: معادله‌ی خطی با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت $y=mx+h$ است.

شیب ضلع AD برابر $-\frac{۵}{۳}$ است. پس معادله‌ی آن به صورت $y=-\frac{۵}{۳}x+h$ می‌باشد، چون $A(۵,۱)$ روی این ضلع قرار دارد پس مختصات آن در معادله‌ی این ضلع صدق می‌کند.

$$۱=-\frac{۵}{۳}(۵)+h\Rightarrow h=۱+\frac{۲۵}{۳}=\frac{۲۸}{۳}$$

بنابراین معادله‌ی ضلع AD عبارت است از:

$$y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}\Rightarrow ۳y+۵x=۲۸$$

راه حل دوم: نکته: معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ با شیب m، عبارت است از:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

با توجه به نکته‌ی بالا، معادله‌ی ضلع AD (گذرا از نقطه‌ی $A(۵,۱)$ با شیب $m_{AD}=-\frac{۵}{۳}$)، عبارت است از:

$$y-۱=\frac{-۵}{۳}(x-۵)\Rightarrow y-۱=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۵}{۳}\rightarrow y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}\rightarrow ۳y+۵x=۲۸$$

۱۸ - گزینه ۱ نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

ابتدا با استفاده از نکته‌ی بالا، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(a,a-۱)$ را از خط $۵x-۱۲y-۱۲=۰$ محاسبه می‌کنیم:

$$AH=\frac{|۵a-۱۲(a-۱)-۱۲|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{|۷a|}{۱۳}$$

طبق فرض این مقدار برابر $\frac{۲۱}{۱۳}$ است، پس:

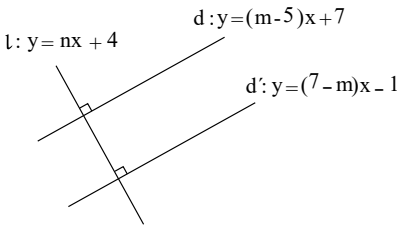
$$\frac{|۷a|}{۱۳}=\frac{۲۱}{۱۳}\Rightarrow |۷a|=۲۱\Rightarrow |a|=۳\Rightarrow \boxed{a=\pm ۳}$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر متمایز a برابر است با: $-۹=۳\times -۳$.

۱۹ - گزینه ۳ نکته: دو خط زمانی موازی‌اند که شیب‌هایشان برابر باشد.

نکته: دو خط غیرموازی محورهای مختصات، زمانی بر هم عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌هایشان برابر -۱ باشد.

نکته: اگر خط L بر دو خط d و d' در صفحه عمود باشد، آن گاه d و d' با هم موازی‌اند.



طبق فرض، خط L بر دو خط d و d' عمود است، پس خط‌های d و d' با هم موازی‌اند، بنابراین شیب‌هایشان برابر است:

$$m - ۵ = ۷ - m \Rightarrow \boxed{m = ۶}$$

پس معادله‌ی خط‌های d و d' به‌صورت $y = x + ۷$ و $y = x - ۱$ می‌باشد.

حال با توجه به اینکه خط $y = nx + ۴$ بر این خط‌ها عمود است، نتیجه می‌گیریم: $n = -۱$، بنابراین: $m - n = ۷$

۲۰ - گزینه ۴ نکته: خط مماس بر دایره در نقطه‌ی تماس بر شعاع نظیر عمود است.

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

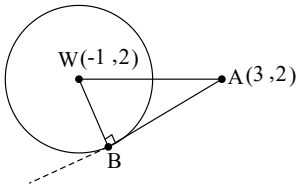
نکته: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

نکته (قضیه فیثاغورس): در مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است.

نقطه‌ی تماس را B می‌نامیم. در این صورت مثلث ABW در رأس B قائم‌الزاویه است.

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در این مثلث داریم:



$$AB^۲ + BW^۲ = AW^۲ \Rightarrow AB^۲ = AW^۲ - BW^۲ \quad (*)$$

AW فاصله‌ی نقاط $A(۳, ۲)$ و $W(-۱, ۲)$ است که برابر است با:

$$AW = \sqrt{(۳ + ۱)^۲ + (۲ - ۲)^۲} = ۴$$

BW فاصله‌ی نقطه‌ی $W(-۱, ۲)$ از خط $y - ۲x + ۴ = ۰$ است که برابر است با:

$$BW = \frac{|۲ - ۲(-۱) + ۴|}{\sqrt{۱^۲ + ۲^۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۵}}$$

با جایگذاری این مقادیر در $(*)$ داریم:

$$AB^۲ = ۴^۲ - (\frac{۸}{\sqrt{۵}})^۲ = ۱۶ - \frac{۶۴}{۵} = \frac{۸۰ - ۶۴}{۵} = \frac{۱۶}{۵} \Rightarrow \boxed{AB = \frac{۴}{\sqrt{۵}}}$$

۲۱ - گزینه ۲

راه حل اول:

برای به‌دست آوردن فاصله‌ی دو خط موازی کافیست یک نقطه‌ی دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله‌ی آن را از خط دیگر به‌دست آورید.

نقطه‌ی $M(۸, ۴)$ در معادله‌ی خط $۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ صدق می‌کند، فاصله‌ی M از خط $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|-۱۰ \times (۸) + ۲۴ \times (۴) + ۱۰|}{\sqrt{۱۰^۲ + ۲۴^۲}} = \frac{|۲۶|}{۲۶} = ۱$$

راه حل دوم:

ابتدا با تغییراتی معادلات هر خط را به یک فرم تبدیل می‌نمائیم.

$$-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰ \xrightarrow{\div(-۲)} ۵x - ۱۲y - ۵ = ۰ \rightarrow a = ۵\,,\ b = -۱۲\,,\ c = -۵\,,\ c' = ۸$$

حال با استفاده از رابطه زیر فاصله دو خط موازی را محاسبه می‌نماییم.

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|-۵ - ۸|}{\sqrt{۵^۲ + (-۱۲)^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۶۹}} = \frac{۱۳}{۱۳} = ۱$$

۲۲ - گزینه ۲ هر دو خط از نقطه‌ی $(۱, ۲)$ می‌گذرند. لذا مختصات این نقطه در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases} -b(۱) + (a - b)(۲) - ۸ = ۰ \Rightarrow ۲a - ۳b - ۸ = ۰ \\ ۳a(۱) + b(۲) - c = ۰ \Rightarrow ۳a + ۲b - c = ۰ \end{cases} \quad (*)$$

از طرفی بنابر فرض سؤال، دو خط بر هم عمودند. شیب آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$-bx+(a-b)y-۸=۰ \Rightarrow (a-b)y=bx+۸$$

$$\Rightarrow y=\frac{b}{(a-b)}x+\frac{۸}{(a-b)} \Rightarrow m_۱=\frac{b}{a-b}$$

$$۳ax+by-c=۰ \Rightarrow by=-۳ax+c \Rightarrow y=-\frac{۳a}{b}x+\frac{c}{b} \Rightarrow m_۲=-\frac{۳a}{b}$$

از آنجایی که شیب دو خط بر هم عمودند داریم:

$$m_۱m_۲=-۱ \Rightarrow \frac{b}{a-b}\times(-\frac{۳a}{b})=-۱ \xrightarrow{b\neq ۰} \frac{-۳a}{a-b}=-۱ \Rightarrow ۳a=a-b \Rightarrow \boxed{۲a=-b}$$

در رابطه‌های دستگاه $(*)$ به جای $۲a$، مقدار $-b$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۲a-۳b-۸=۰ \xrightarrow{۲a=-b} -۴b-۸=۰ \Rightarrow \boxed{b=-۲}, \boxed{a=۱} \\ ۳a+۲b-c=۰ \Rightarrow ۳\times(۱)+۲\times(-۲)-c=۰ \Rightarrow ۳-۴-c=۰ \Rightarrow \boxed{c=-۱} \end{cases}$$

۲۳ - گزینه ۱ نکته : فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

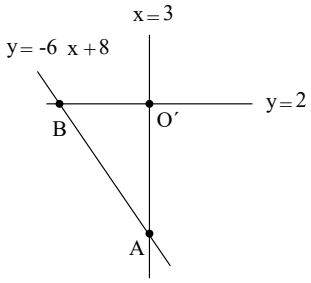
$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

نکته: لوزی یک متوازی‌الاضلاع با چهار ضلع برابر است.

مطابق شکل مقابل و با توجه به صورت سؤال می‌توان فهمید خطوط $x=۳$ و $y=۲$ معادله‌ی قطرهای این لوزی هستند.

پس می‌توان مختصات رئوس A و B را تعیین کرد.

نقطه‌ی A محل تقاطع خطوط $y=-۶x+۸$ و $x=۳$ است، پس: $A(۳,-۱۰)$، همچنین نقطه‌ی B محل تقاطع خطوط $y=-۶x+۸$ و $y=۲$ است، پس: $B(۱,۲)$ بنابراین طول ضلع این لوزی برابر است با:



$$AB=\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۱۰-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱۴۴}=\sqrt{۱۴۸}=۲\sqrt{۳۷}$$

در نتیجه محیط این لوزی برابر است با: $۴AB=۸\sqrt{۳۷}$.

تذکر: در برخی سؤالات مانند این سؤال، رسم شکل به درک و حل سؤال کمک شایانی می‌کند.

۲۴ - گزینه ۱ هر نقطه روی محور xها دارای عرض صفر می‌باشد یعنی $A(-۳,۰)$، هرگاه دو خط بر هم عمود باشند شیب یکی قرینه و معکوس دیگری است یعنی $m\cdot m'=-۱$، پس داریم:

$$۲x+۳y=-۱ \Rightarrow ۳y=-۲x-۱ \Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۳} \Rightarrow m=-\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m=+\frac{۳}{۲}$$

حال معادله خط مورد نظر برابر است با:

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\ ,\ m=\frac{۳}{۲}\ ,\ x_۰=-۳\ ,\ y_۰=۰$$

$$y-۰=\frac{۳}{۲}(x-(-۳)) \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}(x+۳) \xrightarrow{\times ۲} ۲y=۳(x+۳) \Rightarrow ۲y=۳x+۹$$

۲۵ - گزینه ۱ دو نقطه‌ی A و B هم‌طول هستند، پس:

AB طول پاره‌خط $\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$

$$AB=|y_A-y_B|=|۵-(-۱)|=۶$$

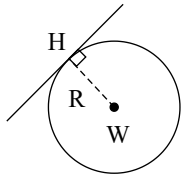
$$AC=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$BC=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۲-(-۱))^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

چون $BC=AC$ است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲۶ - گزینه ۲ می‌دانیم شعاع دایره، در نقطه‌ی تماس بر خط مماس بر دایره عمود است. لذا برای به‌دست آوردن اندازه‌ی شعاع دایره کافیست فاصله‌ی مرکز دایره به مختصات $(۲,-۱)$ تا خط $۶x-۸y=۰$ را محاسبه کنیم:

$$a=۶\ ,\ b=-۸\ ,\ c=۰\ ,\ x_۰=۲\ ,\ y_۰=-۱$$



$$R=WH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۶\times(۲)-۸\times(-۱)|}{\sqrt{۶^۲+۸^۲}}=\frac{۲۰}{۱۰}=۲$$

۲۷ - گزینه ۲ هر خط مماس بر دایره در محل مماس بر شعاع گذرنده از نقطهٔ مماس عمود است، پس داریم:

$$O(۲,-۳)\ ,\ A(۸,-۵) \to m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{-۵-(-۳)}{۸-۲}=\frac{-۲}{۶}=-\frac{۱}{۳}$$

شیب خط مماس (d) برابر است با:

$$m_d=\frac{-۱}{m_{OA}}=\frac{-۱}{\frac{-۱}{۳}} \to \boxed{m_d=۳}$$

معادلهٔ خط مماس (d) برابر است با:

$$y-y_A=m_d(x-x_A) \to y-(-۵)=۳(x-۸) \to y=۳x-۲۹$$

$$\xrightarrow[y=۰]{\text{محل تلاقی با محور طول‌ها}} ۰=۳x-۲۹ \to \boxed{x=\frac{۲۹}{۳}} \to (\frac{۲۹}{۳},۰)$$

۲۸ - گزینه ۳

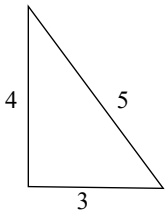
طول اضلاع مثلث را به‌دست می‌آوریم.

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۱۶}=۴$$

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۱-(-۲))^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۹}=۳$$

$۵^۲=۴^۲+۳^۲$ است پس مثلث قائم‌الزاویه است.



$$\to S=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$$

۲۹ - گزینه ۱ نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ در معادله‌ی $y=x+۲$ صدق نمی‌کند. پس رأس A روی این خط قرار ندارد.

اندازه‌ی ضلع مربع برابر با فاصله‌ی A تا خط $x-y+۲=۰$ است و داریم:

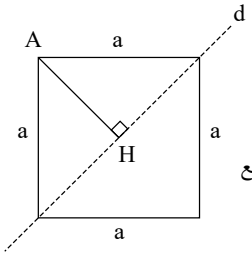
$$a=۱\ ,\ b=-۱\ ,\ c=۲$$

$$\text{طول ضلع مربع}: d=\frac{|۳-(-۱)+۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}$$

$$S=(\frac{۶}{\sqrt{۲}})^۲=\frac{۳۶}{۲}=۱۸$$

۳۰ - گزینه ۲ چون نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ در معادله‌ی خط صدق نمی‌کند، بر آن واقع نیست و وضعیت خط و نقطه به‌صورت زیر است:

$$d: ۳x-۴y=۱ \Rightarrow ۳x-۴y-۱=۰$$



ضلع مربع $=a$

قطر مربع $=a\sqrt{2}$

نصف‌قطر مربع $=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\text{نصف قطر}: AH=\frac{|۳(۱)-۴(-۲)-۱|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲=\frac{a\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \boxed{a=\frac{۴}{\sqrt{۲}}}$$

(فاصله A از خط d)

$$\text{محیط مربع}: P=۴a=۴\left(\frac{۴}{\sqrt{۲}}\right)=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۲}=۸\sqrt{۲}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۲	۱۱ - ۴	۱۶ - ۳	۲۱ - ۲	۲۶ - ۲
۲ - ۳	۷ - ۳	۱۲ - ۴	۱۷ - ۳	۲۲ - ۲	۲۷ - ۲
۳ - ۲	۸ - ۴	۱۳ - ۳	۱۸ - ۱	۲۳ - ۱	۲۸ - ۳
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۱	۱۹ - ۳	۲۴ - ۱	۲۹ - ۱
۵ - ۲	۱۰ - ۲	۱۵ - ۲	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲