



علی هاشمی

۱- خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر خطی که از نقاط $A|_1^2$ و $B|_{-3}^0$ می‌گذرد عمود است این خط، خط $x = 4$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۲- معادلات سه ضلع مثلثی به صورت $AB : x + 2y = 3$ و $AC : y = 2x - 1$ و $BC : x + y = 4$ است طول ارتفاع AH کدام است؟

۳- دو ضلع یک مربع بر دو خط به معادلات $2x + \sqrt{5}y = 3$ و $5y + 2\sqrt{5}x = 0$ قرار دارند محیط این مربع کدام است؟

۴- دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم وجود دارند که از خط $x + 2y = 0$ به فاصله $2\sqrt{5}$ هستند اگر این دو نقطه از A و B و بنامیم و نقطه C روی محور عرض به عرض ۳ باشد در این صورت مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟

۵- به ازای کدام مقدار k ، سه خط به معادلات $x - 6y + k = 0$ ، $7x + 6y - 1 = 0$ و $3y + 4x = 0$ در یک نقطه متقاطع‌اند؟



۶- مساحت مثلثی با رئوس $(5, 2)$ ، $(4, 0)$ و $(-1, 2)$ کدام است؟

۷- اگر نقاط $A(1, 0)$ ، $B(2, 3)$ ، $C(a, b)$ و $D(5, 0)$ مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

۸- یک ضلع مربع بر خط $3y - 4x = a$ قرار دارد و محل برخورد قطرهای آن $O(1, 1)$ است. اگر مساحت این مربع ۴ باشد، مقدار منفی a کدام است؟

۹- در مثلث ABC با رئوس $A(-1, 2)$ ، $B(0, 1)$ و $C(2, 0)$ معادله‌ی ارتفاع BH کدام است؟

۱۰- نقاط $A(2, 5)$ و $B(3, -1)$ و $C(0, 2)$ سه رأس مثلثی هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

۱۱- خطی که از نقاط متمایز $A(m, -1)$ ، $B(1, 1 - 2m)$ می‌گذرد، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است. این خط محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟



۱۲- نقطه‌ی $A(-2, 1)$ رأس مربعی است که یک قطر آن منطبق بر خط به معادله‌ی $x + y = 5$ است محیط این مربع، کدام است؟

۱۳- مرکز مربعی، نقطه‌ی $A(1, 4)$ و معادله‌ی یک ضلع آن $4x - 3y = 1$ است. مساحت این مربع کدام است؟

۱۴- رئوس مثلثی نقاط $A(3, 1), B(1, 2), C(-1, 4)$ هستند. امتداد ارتفاع CH محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱۵- مثلثی با رئوس $A(2, 6), B(-2, 5), C(2, 3)$ مفروض است. طول میانه‌ی AM کدام است؟

۱۶- اضلاع مربعی روی خطوط $x - y = 2$ و $y = x + 1$ قرار دارند. طول قطر آن کدام است؟



۱۷- دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند، که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟

۱۸- در مثلثی با رئوس $A(-1, -4)$ ، $B(-5, 6)$ و $C(3, 2)$ ، معادله ارتفاع AH کدام است؟

۱۹- یک راس مربعی، نقطه‌ی $A(2, -1)$ و یک ضلع آن واقع بر خط $3x + 4y = 1$ است. مساحت مربع کدام است؟

۲۰- دو نقطه‌ی روی نیمساز ربع اول و سوم داریم که از نقطه‌ی $A(1, 2)$ به فاصله‌ی ۲ هستند. مجموع طول‌های این نقاط کدام است؟

۲۱- یک قطر مربعی منطبق بر نیمساز ربع اول و سوم و یک راس آن نقطه‌ی $(3, -2)$ است. مساحت این مربع کدام است؟

۲۲- رأس‌های مثلثی $A(-5, 6)$ ، $B(-1, -4)$ و $C(3, 2)$ هستند. معادله ارتفاع BH از مثلث مذکور کدام است؟



۲۳- معادله‌ی چهارضلع یک مستطیل به صورت $2x + y = 5$, $2x + y = 3$, $x - 2y = 14$, و $x + ay = 6$ می‌باشد. محیط این مستطیل کدام است؟

۲۴- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ از خط $3y = 4x + a$ برابر ۲ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۲۵- اگر نقاط $A(1, 2)$, $B(3, 7)$, $C(4, 5)$ و $D(m + 1, n - 1)$ مختصات چهار رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، حاصل mn کدام است؟

۲۶- عرض از مبدأ مثبت خطی که از خط به معادله‌ی $3x + 4y = 1$ به فاصله‌ی ۲ است، کدام است؟

۲۷- مساحت مثلثی با رئوس $A(1, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(k, -1)$ برابر ۳ است. مقادیر k کدام‌اند؟



۲۸- معادله دو ضلع از متوازی الاضلاع به صورت $2x + 3y = 7$ و $x - 2y = 0$ است. اگر یکی از رئوس متوازی الاضلاع باشد، کدام یک از نقاط زیر، رأس دیگری از این متوازی الاضلاع است؟

۲۹- اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع BH کدام است؟

۳۰- اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس A کدام است؟



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ ابتدا شیب خطی را که از دو نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix}$ می‌گذرد را می‌نویسیم.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 + 3}{2 - 0} = 2$$

چون خط مورد نظر بر خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B عمود است پس شیب خط مورد نظر برابر $-\frac{1}{2}$ می‌باشد حال، با داشتن نقطه و شیب، معادله‌ی خط را می‌نویسیم.

$$O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, m = -\frac{1}{2} \rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{x}{2}$$

۲ - گزینه ۲ از تلاقی دادن معادلات دو ضلع AB و AC می‌توانیم مختصات رأس A را بدست آوریم.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = 1 \rightarrow A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

حال، کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را از ضلع BC بدست آوریم.

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, x + y - 4 = 0 \rightarrow AH = \frac{|1 + 1 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

۳ - گزینه ۳

$$2x + \sqrt{5}y = 3 \rightarrow m = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad 5y + 2\sqrt{5}x = 0 \rightarrow m' = -\frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

چون شیب این دو خط با هم برابرند بنابراین این دو ضلع باهم موازیند و فاصله‌ی بین این دو ضلع موازی، ضلع مربع را می‌دهد.

می‌دانیم برای محاسبه فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌کنیم (ضرایب x و y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

$$\left. \begin{aligned} 2x + \sqrt{5}y - 3 &= 0 \xrightarrow{\times \sqrt{5}} 2\sqrt{5}x + 5y - 3\sqrt{5} = 0 \\ 2\sqrt{5}x + 5y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow d = \frac{|-3\sqrt{5} - 0|}{\sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 1 \rightarrow \text{محیط مربع} = 4(1) = 4$$

۴ - گزینه ۱ هر نقطه روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم ($y = x$) قرار دارد مختصاتش به صورت $\begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$ می‌باشد حال، کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی $\begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$ را از خط به معادله‌ی $x + y = 0$ بدست آوریم تا مختصات نقاط A و B بدست آیند.

$$2\sqrt{5} = \frac{|\alpha + 2\alpha + 0|}{\sqrt{1 + 4}} \rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{|3\alpha|}{\sqrt{5}} \rightarrow |3\alpha| = 10 \rightarrow |3\alpha| = \pm 10 \rightarrow \alpha = \pm \frac{10}{3}$$

حال با داشتن مختصات سه رأس مثلث یعنی $C \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \end{vmatrix}$ و $A \begin{vmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \end{vmatrix}$ مساحت مثلث را حساب می‌کنیم.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{10}{3} \left(-\frac{10}{3} - 3 \right) - \frac{10}{3} \left(3 - \frac{10}{3} \right) + 0 \left(\frac{10}{3} + \frac{10}{3} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{10}{3} \left(-\frac{19}{3} \right) - \frac{10}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| -\frac{190}{9} + \frac{10}{9} \right| = \frac{1}{2} \left| -\frac{180}{9} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{180}{9} \right) = 10$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

۵ - گزینه ۳ محل برخورد دو خط به معادلات $3y + 4x = 0$ و $7x + 6y - 1 = 0$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases} 7x + 6y - 1 = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = \frac{4}{3}$$



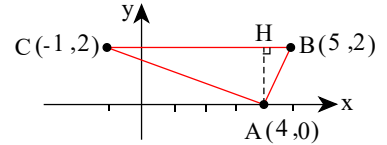
این نقطه باید در خط به معادله $x - 6y + k = 0$ هم صدق کند:

$$\begin{cases} -1 \\ 4 \\ 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} \begin{cases} -1 - 6(\frac{4}{3}) + k = 0 \\ -1 - 8 + k = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 9$$

۶ - گزینه ۳ هرگاه از سه رأس داده شده مثلث، دو نقطه دارای طولها یا عرضهای مساوی باشند برای پیدا کردن مساحت مثلث از رسم شکل استفاده کنید.

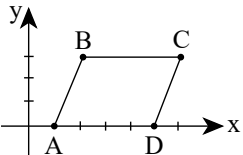
با توجه به شکل، اندازهی ارتفاع AH ، برابر ۲ و اندازهی قاعدهی BC برابر ۶ $(-1) - 5 = 6$ است. بنابراین:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$



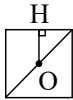
۷ - گزینه ۴ ابتدا رئوس را بر روی محور مختصات نمایش می‌دهیم:

واضح است که مختصات نقطه‌ی C به صورت $(6, 3)$ است و مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S = 3 \times 4 = 12$



۸ - گزینه ۳

معادله‌ی ضلع مربع $4x - 3y + a = 0$ می‌باشد و می‌دانیم فاصله‌ی مرکز مربع از هر ضلع، نصف طول ضلع است.



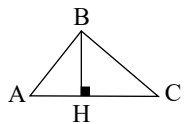
۱ = نصف ضلع \Rightarrow طول ضلع = ۲ \Rightarrow مساحت = ۴

$$\text{فاصله‌ی نقطه‌ی } O \text{ از ضلع مربع} = \frac{|4 - 3 + a|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|a + 1|}{5} = 1 \Rightarrow a + 1 = \pm 5 \xrightarrow{a < 0} a = -6$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \left| \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

۹ - گزینه ۲ ارتفاع BH از رأس B بر ضلع AC عمود می‌شود، پس شیب آن عکس و قرینه‌ی شیب AC است:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - 2}{2 - (-1)} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m_{BH} = \frac{3}{2}$$

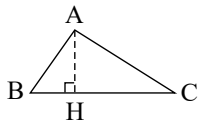


حال با داشتن شیب و یک نقطه، معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} B \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ m_{BH} = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow y - 1 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y - 3x = 2$$

۱۰ - گزینه ۳

کافی است معادلات ارتفاع AH و ضلع BC را بنویسیم سپس با آنها تشکیل دستگاه دهیم:



$$BC: \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \rightarrow \frac{y + 1}{x - 3} = \frac{-1 - 2}{3 - 0} = -1 \rightarrow y + 1 = -x + 3 \rightarrow y = -x + 2: \text{ معادله ضلع } BC$$

$$\begin{cases} A(2, 5) \\ m_{BC} = -1 \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = 1 \end{cases} \Rightarrow y - 5 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 3: \text{ معادله ارتفاع } AH$$

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} y = \frac{5}{2}, x = -\frac{1}{2}$$

۱۱ - گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(m, -1)$ ، $B(1, 1 - 2m)$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y + 1}{x - m} = \frac{-1 - 1 + 2m}{m - 1} = \frac{2m - 2}{m - 1} = \frac{2(m - 1)}{m - 1} = 2$$

$$\rightarrow y + 1 = 2x - 2m \rightarrow y = 2x - 2m - 1$$

چون خط، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند، بنابراین:

$$(0, 3) \in \text{خط} \Rightarrow 3 = 0 - 2m - 1 \Rightarrow m = -2$$

پس معادله‌ی خط به صورت $y = 2x + 4 - 1 = 2x + 3$ است.

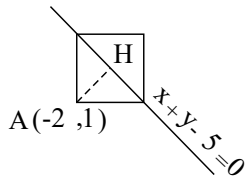


$$0 = 2x + 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

حال برای یافتن نقطه‌ی تقاطع خط با محور x ها، $y = 0$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم:

۱۲ - گزینه ۲

مختصات نقطه‌ی داده شده در معادله‌ی خط، صدق نمی‌کند پس نقطه‌ی A روی ضلع داده شده قرار ندارد.



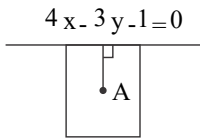
$$\text{فاصله‌ی نقطه‌ی } A \text{ تا قطر برابر نصف طول قطر مربع است} \Rightarrow AH = \frac{|-2 + 1 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر} = 6\sqrt{2} (*)$$

$$\text{محیط} = 4 \times 6 = 24 \Rightarrow \text{طول ضلع} = 6 \Rightarrow \sqrt{2}(\text{طول ضلع}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \times (\text{طول ضلع}) = \text{قطر}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

۱۳ - گزینه ۴

فاصله‌ی مرکز مربع از هر یک از اضلاع آن، نصف طول ضلع است.



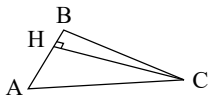
$$\text{فاصله‌ی نقطه‌ی } A \text{ از خط } (4x - 3y - 1 = 0) = \frac{|4(1) - 3(4) - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{5}$$

$$\text{مساحت} = (3,6)^2 = 12,96 \Rightarrow \frac{18}{5} = 3,6 \Rightarrow \text{طول ضلع} = \frac{18}{5}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

۱۴ - گزینه ۳

ارتفاع CH بر ضلع AB عمود است پس ابتدا شیب ضلع AB را پیدا می‌کنیم.

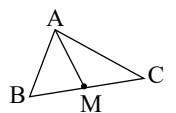


$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 1}{1 - 3} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{CH \perp AB} m_{CH} = 2$$

$$y - 4 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 6 \xrightarrow{\text{تلاقی با محور } y} y = 6$$

۱۵ - گزینه ۲ ابتدا مختصات نقطه‌ی M (وسط ضلع BC) را می‌یابیم:

$$M \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) \rightarrow M \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$



حال کافی است طول AM را به دست بیاوریم:

$$AM = \sqrt{(0 - \frac{3}{2})^2 + (4 - \frac{3}{2})^2} = \sqrt{(-\frac{3}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱۶ - گزینه ۱

$$x - y = 2 \rightarrow m = 1, y = x + 1 \rightarrow m' = 1$$

چون شیب دو خط داده شده برابر هستند پس این دو ضلع موازی هستند.

$$\text{فاصله‌ی دو خط } 0 = x - y + 1 \text{ و } 0 = x - y - 2 = \frac{|-2 - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{طول قطر مربع} = a\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 3$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌کنیم.

۱۷ - گزینه ۲ نقطه‌ی A را روی خط $y = x - 1$ در نظر گرفته و فاصله‌ی آن را از خط $2x - 3y = 5$ مساوی $\sqrt{13}$ قرار می‌دهیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \left(\alpha, \alpha - 1 \right) \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{array} \right. \rightarrow AH = \frac{|2\alpha - 3(\alpha - 1) - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|-\alpha - 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow |-\alpha - 2| = 13$$

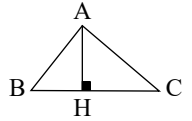


$-\alpha - 2 = 13 \rightarrow \alpha = -15$, $-\alpha - 2 = -13 \rightarrow \alpha = 11$

توجه کنید فاصله نقطه A از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می آید.

۱۸ - گزینه ۱ ارتفاع AH از رأس A بر امتداد BC عمود است. پس شیب آن قرینه و معکوس شیب BC است. بنابراین:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{6 - 2}{-5 - 3} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{AH} = 2$$

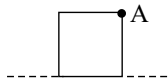


حال معادله خط گذرا از نقطه $A(-1, -4)$ با شیب ۲ را می نویسیم:

$y + 4 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x - 2$

۱۹ - گزینه ۴

مختصات نقطه داده شده در معادله خط، صدق نمی کند پس نقطه A روی ضلع داده شده قرار ندارد.



$3x + 4y - 1 = 0$

فاصله نقطه $(2, -1)$ از خط $3x + 4y - 1 = 0$ ضلع مربع $= \frac{|3 \times 2 + 4(-1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$

مساحت مربع $= \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0.04$

توجه کنید فاصله نقطه A از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می آید.

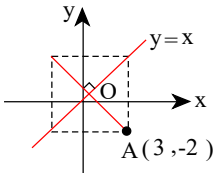
۲۰ - گزینه ۳ نقاط مذکور به صورت $M(\alpha, \alpha)$ هستند. (چون معادله خط نیمساز ربع اول و سوم به صورت $y = x$ است)

طبق فرض داریم:

$AM = 2 \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 2)^2} = 2 \Rightarrow (\alpha - 1)^2 + (\alpha - 2)^2 = 4$
 $\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 4 \Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$

مجموع طولها $= \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{2} = 3$

۲۱ - گزینه ۳



فاصله نقطه $A(3, -2)$ از خط $x - y = 0$ (نیمساز ربع اول و سوم)، نصف طول قطر مربع است و دقت کنید طول قطر مربعی به ضلع a برابر $a\sqrt{2}$ است.

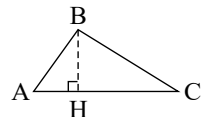
$AO = \frac{|3 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ قطر $= d = 2 \times \frac{5}{\sqrt{2}} \xrightarrow{d=\sqrt{2}a} \frac{10}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a \rightarrow 2a = 10 \rightarrow a = 5$

مساحت مربع $= (5)^2 = 25$

توجه کنید فاصله نقطه A از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می آید.

۲۲ - گزینه ۴ ارتفاع BH از رأس B بر ضلع AC عمود می شود:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{6 - 2}{-5 - 3} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{BH} = 2$$



حال، با داشتن شیب و یک نقطه، معادله ارتفاع را می نویسیم:

$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{B(-1, -4)} \xrightarrow{m=2} y + 4 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x - 2 \Rightarrow 2x - y - 2 = 0$

۲۳ - گزینه ۳ چهارضلع مستطیل، دو به دو با هم موازیند.

$2x + y = 5 \rightarrow m = -2$
 $2x + y = 3 \rightarrow m' = -2$
 دو خط موازیند. \rightarrow

حال، فاصله بین دو خط $2x + y - 5 = 0$ و $2x + y - 3 = 0$ را حساب می کنیم.

$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5 - (-3)|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

۱۰

اکنون توجه کنید باید دو خط $x - y = 14$ و $x + ay = 6$ موازی باشند یعنی شیب هایشان برابر باشند. پس $a = -2$ است. حال، فاصله بین دو خط $x - 2y - 14 = 0$ و $x - 2y - 6 = 0$ را حساب می کنیم.



$$\text{محیط مستطیل} = (\text{عرض} + \text{طول}) \times ۲ = \left(\frac{۸}{\sqrt{۵}} + \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right) \times ۲ = \frac{۲۰}{\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = \frac{۲۰\sqrt{۵}}{۵} = ۴\sqrt{۵}$$

برای محاسبه فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌کنیم.

۲۴ - گزینه ۱ فاصله نقطه $A \begin{pmatrix} -1 \\ ۲ \end{pmatrix}$ را از خط به معادله $۴x - ۳y + a = 0$ به دست می‌آوریم.

$$AH = \frac{|۴(-۱) - ۳(۲) + a|}{\sqrt{۱۶ + ۹}} = \frac{|-۱۰ + a|}{۵} = ۲ \rightarrow |-۱۰ + a| = ۱۰$$

$$\rightarrow -۱۰ + a = ۱۰ \rightarrow a = ۲۰, -۱۰ + a = -۱۰ \rightarrow a = ۰$$

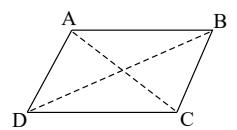
پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۲۰ است.

توجه کنید: فاصله نقطه $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow ۱ + ۴ = ۳ + m + ۱ \rightarrow m = ۱ \\ y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow ۲ + ۵ = ۷ + n - ۱ \rightarrow n = ۱ \end{cases} \rightarrow mn = ۱$$

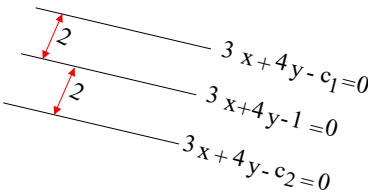
۲۵ - گزینه ۳



۲۶ - گزینه ۲

مطابق شکل، دو خط موازی با خط $۳x + ۴y - ۱ = 0$ وجود دارند که به فاصله ۲ از آن می‌باشند که می‌توانیم معادلات آن‌ها را به صورت

$۳x + ۴y - c = 0$ نشان دهیم.



$$\begin{aligned} ۳x + ۴y - ۱ = 0 & \xrightarrow{\text{فاصله}} d = \frac{|-۱ + c|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{|-۱ + c|}{۵} = ۲ \rightarrow |-۱ + c| = ۱۰ \\ ۳x + ۴y - c = 0 & \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -۱ + c = ۱۰ \rightarrow c = ۱۱ \rightarrow ۳x + ۴y - ۱۱ = 0 \xrightarrow{x=0} y = \frac{۱۱}{۴} = ۲,۷۵ \\ -۱ + c = -۱۰ \rightarrow c = -۹ \rightarrow ۳x + ۴y + ۹ = 0 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{۹}{۴} = -۲,۲۵ \end{cases}$$

توجه کنید فاصله بین دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

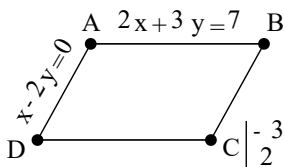
۲۷ - گزینه ۳ هرگاه مختصات سه رأس مثلث ABC را داشته باشیم مساحت مثلث از این رابطه به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$\rightarrow ۳ = \frac{1}{2} |۱(۳ + ۱) + ۲(-۱ - ۱) + k(۱ - ۳)|$$

$$\rightarrow ۶ = |۴ - ۴ + ۲k| \rightarrow |۲k| = ۶ \rightarrow ۲k = \pm ۶ \rightarrow k = \pm ۳$$

۲۸ - گزینه ۳



یک شکل فرضی رسم می‌کنیم. توجه کنید مختصات نقطه $(-۳, ۲)$ در هیچ کدام از خطوط داده شده صدق نمی‌کند پس این نقطه را رأسی در نظر

می‌گیریم که روی هیچ کدام از این اضلاع نیست. در شکل بالا رأس C است.

$$A \text{ مختصات نقطه } \begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ x - ۲y = ۰ \end{cases} \Rightarrow A(۲, ۱)$$

حالا معادله ضلع BC را می‌نویسیم. نقطه C روی این خط است و شیب آن برابر شیب خط $x - ۲y = 0$ یعنی برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - ۲ = \frac{1}{2}(x + ۳) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{۷}{۲}$$

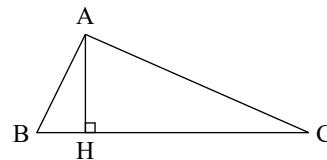
$$B \text{ مختصات نقطه } \begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{۷}{۲} \end{cases} \Rightarrow B(-۱, ۳)$$

۲۹ - گزینه ۳



۳۰ - گزینه ۲ شکل فرضی روبرو را در نظر بگیرید، در ابتدا شیب ضلع BC را به دست می آوریم و چون ارتفاع، بر ضلع BC عمود است پس شیبش عکس و قرینه ی شیب ضلع BC است.

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0 + 2}{3 - 1} = 1 \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = -1$$



$$AH \text{ معادله ی ارتفاع } y - 2 = -1(x + 1) \rightarrow y = -x + 1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲

۲ - ۲

۳ - ۳

۴ - ۱

۵ - ۳

۶ - ۳

۷ - ۴

۸ - ۳

۹ - ۲

۱۰ - ۳

۱۱ - ۳

۱۲ - ۲

۱۳ - ۴

۱۴ - ۳

۱۵ - ۲

۱۶ - ۱

۱۷ - ۲

۱۸ - ۱

۱۹ - ۴

۲۰ - ۳

۲۱ - ۳

۲۲ - ۴

۲۳ - ۳

۲۴ - ۱

۲۵ - ۳

۲۶ - ۲

۲۷ - ۳

۲۸ - ۳

۲۹ - ۳

۳۰ - ۲