



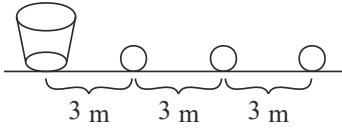
علی هاشمی

نام آزمون: فصل اول حسابان ۱

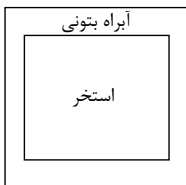
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله‌ی ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله‌ی توپ اول تا سبد ۳ متر است (شکل زیر). دنده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی برود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دنده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، تعیین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟



۲- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد، طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



۳- فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از ۲ ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

۴- محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.



۵- معادله زیر را حل کنید.

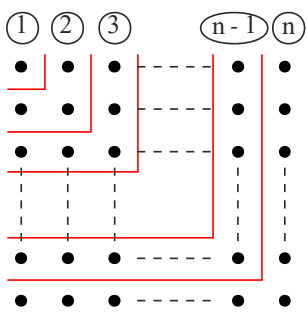
$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

۶- مجموع همه‌ی عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

۷- مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی مقابل را به دست آورید:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

۸- در دنباله‌ی حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله‌ی آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟



۹- الف) به کمک شکل روبرو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) =$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود را در قسمت الف بررسی کنید.



۱۰- مجموع همه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

۱۱- در ۲۰ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۱۲- جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ می‌باشد. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع ۲۵۵ شود؟

۱۳- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟



۱۴- برای عددی حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n :
الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

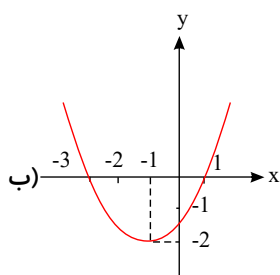
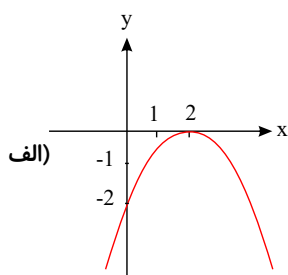
ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

۱۵- اگر $x = -1$ یک ریشه‌ی معادله‌ی $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟

۱۶- مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر -2 باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

۱۷- در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه‌ی آن را مشخص کنید.





۱۸- یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود. ارتفاع این موشک (h) در زمان t از رابطه‌ی $h(t) = -16t^2 + 144t$ به دست می‌آید. ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به دست آورید.

۱۹- طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت $52,8$ متر مربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

۲۰- معادله $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$ را حل کنید.

۲۱- اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم $\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L}$ آن‌گاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است. اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟



۲۲- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = -\frac{3}{2}$$

۲۳- پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد، قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

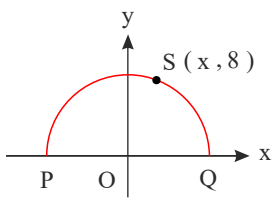
۲۴- ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

۲۵- خط $5 = 4x + 3y$ بر دایره‌ی C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

۲۶- $A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ نقاط دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.



- ۲۷- مثلث ABC به رأس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.
 الف) مثلث را رسم کنید.
 ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.
 پ) معادله‌ی عمودمنصف ضلع BC را به دست آورید.
 ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟



- ۲۸- نقطه‌ی $S(x, 8)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه‌رو داده شده است.
 الف) مقدار x را به دست آورید.
 ب) شیب خط‌های PS و SQ را به دست آورید.
 پ) نشان دهید \widehat{PSQ} قائمه است.

۲۹- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

- ۳۰- سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 3)$ و $C(3, 1)$ می‌باشند.
 الف) طول عمودی را که از رأس B در میانه‌ی نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.
 ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

۳۱- نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه‌ی $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.



۳۲- نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر M و H به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را بیابید.

۳۳- معادله درجه دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)

۳۴- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$$

۳۵- معادله زیر را حل کنید.

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$$



۳۶- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{5}{\sqrt{x} + 2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$$

۳۷- معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x + 1} = 4$$

۳۸- بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد؟

۳۹- هریک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدرمطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

(الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

(ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.

(پ) فاصله بین x و ۳- بزرگتر از ۲ است.

۴۰- نمودار هریک از دو تابع زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y = 3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

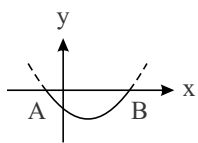
(الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

(ب) $y = x^2 - 6x$



۴۱- نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۴۲- نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید. سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید.



۴۳- شکل نمایی جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = x^2 - 8x - 20$ مطابق شکل زیر مدل سازی می شود. الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به دست آورید.

ب) اگر x بر حسب سانتی متر باشد طول AB را به دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

۴۴- ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ می باشد.

۴۵- دو معادله زیر را حل کنید.



الف

$$\frac{2-x}{|x-3|} = 1$$

ب

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$$

۴۶- با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

الف

$$f(x) = x|x|$$

**ب**

$$g(x) = |x^2 - 1|$$

پ

$$h(x) = |x - 1| + |x + 1|$$

۴۷- معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$x^2 - 3x^2 - 4 = 0$$



ب

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$$

پ

$$(4 - x^2)^2 - (4 - x^2) = 12$$

۴۸ - صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف

$$f(x) = x^3 - 4x$$



ب

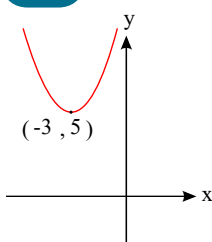
$$g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$$

پ

$$h(x) = x^4 + 3x^2 + 5$$

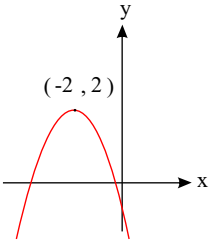
۴۹- هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است، نقطه‌ی راس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.

الف

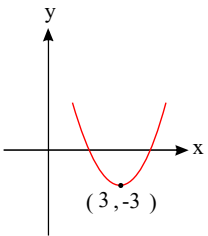




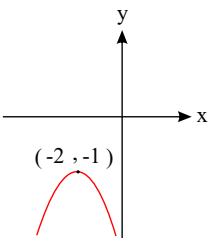
ب



ب



ب



۵۰- معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.



الف

$$\sqrt{1-x^2} = x$$

ب

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$$

پ

$$2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x}$$



پاسخنامه تشریحی

۱ - دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید $۳ + ۳ = ۶$ متر طی کند، برای توپ دوم باید $۶ + ۶ = ۱۲$ متر و برای توپ سوم $۹ + ۹ = ۱۸$ متر و... طی کند. پس داریم:

ضرب دو عدد متوالی $a_1 = ۶, d = ۶$; دنباله‌ی مسافت‌ها $۶, ۱۲, ۱۸, \dots$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = ۹۱۸ \Rightarrow \frac{n}{2}(۱۲ + ۶n - ۶) = ۹۱۸$$

$$3n(n+1) = ۹۱۸ \Rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = ۳۰۶ = \underbrace{۱۷ \times ۱۸}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} \Rightarrow n = ۱۷$$

- ۲

اگر پهنای آبراه را x در نظر بگیریم. داریم:

	x	x	x
x	10		
	3	3	
x	10		x
	x	x	

$$S = ۴x^2 + ۲ \times ۱۰ \times x + ۲ \times ۳ \times x = ۱۴$$

$$\Rightarrow ۴x^2 + ۲۰x + ۶x - ۱۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴x^2 + ۲۶x - ۱۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^2 + ۱۳x - ۷ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۳^2 - ۴ \times ۲(-۷) = ۱۶۹ + ۵۶ = ۲۲۵$$

$$x = \frac{-۱۳ \pm ۱۵}{۴} = -۷ \text{ غ قق } , \boxed{x = \frac{۱}{۲}}$$

- ۳

$$\text{زمان برگشت} = \frac{۱۴۴}{V} \rightarrow \text{سرعت حرکت در خلاف جریان}$$

$$\text{زمان رفت} = \frac{۱۴۴}{V+۸} \rightarrow \text{سرعت حرکت در جهت جریان}$$

$$\frac{۱۴۴}{V} + \frac{۱۴۴}{V+۸} = ۱۷ - ۲ \rightarrow ۱۴۴\left(\frac{1}{V} + \frac{1}{V+۸}\right) = ۱۵$$

$$\frac{۲V+۸}{V(V+۸)} = \frac{۱۵}{۱۴۴} = \frac{۵}{۴۸} \rightarrow ۵V^2 + ۴۰V = ۹۶V + ۳۸۴$$

$$\Rightarrow ۵V^2 - ۵۶V - ۳۸۴ = ۰ \rightarrow \Delta = ۳۱۳۶ + ۷۶۸۰ = ۱۰۸۱۶$$

$$V = \frac{۵۶ \pm ۱۰۴}{۱۰} = -۴,۸ \text{ غ قق } , \boxed{V = ۱۶}$$

- ۴

$$۲(x+y) = ۱۸ \Rightarrow (x+y) = ۹ \Rightarrow y = ۹ - x$$

$$xy = ۱۴ \Rightarrow x(۹-x) = ۱۴ \Rightarrow x^2 - ۹x + ۱۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۷) = ۰$$

$$\begin{cases} x = ۲ \Rightarrow y = ۹ - ۲ = ۷ \\ x = ۷ \Rightarrow y = ۹ - ۷ = ۲ \end{cases}$$

- ۵

$$\frac{۳y+۵}{y^2+۵y} + \frac{y+۴}{y+۵} = \frac{y+۱}{y} \xrightarrow{\times y(y+۵)} (۳y+۵) + y(y+۴) = (y+۱)(y+۵)$$

$$\Rightarrow ۳y + ۵ + y^2 + ۴y = y^2 + ۶y + ۵ \Rightarrow y = ۰$$

چون $y = ۰$ و y مخرج را صفر می‌کنند پس y به دست آمده قابل قبول نمی‌باشد و معادله جواب ندارد.

- ۶

$$۱۰ \leq ۴k \leq ۹۹ \Rightarrow ۲,۵ \leq k \leq ۲۴,۷۵$$

$$k = ۳, ۴, ۵, \dots, ۲۴ \Rightarrow n = ۲۴ - ۳ + ۱ = ۲۲$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$۱۲, ۱۶, ۲۰, \dots, ۹۶ \quad a_1 = ۱۲, \quad d = ۴$$

$$S_{۲۲} = \frac{۲۲}{۲}(a_1 + a_{۲۲}) = ۱۱(۱۲ + ۹۶) = ۱۱۸۸$$

- ۷



$$a_1 = \frac{1}{8}, q = 2 \quad S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{8}(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{1023}{8}$$

- ۸

$$a_1 = 5, d = 3 \rightarrow S_n > 493 \rightarrow \frac{n}{2}(10 + 3n - 3) > 493$$

$$3n^2 + 7n - 986 > 0 \quad \Delta = 49 + 12 \times 986 = 11881$$

$$n = \frac{-7 \pm 109}{6} = -\frac{58}{3}, 17 \Rightarrow n < -\frac{58}{3} \text{ یا } n > 17 \Rightarrow n \geq 18 \quad \text{حداقل ۱۸ جمله}$$

- ۹

(الف)

نقطه‌های مسیر $n + \dots +$ نقطه‌های مسیر (۳) + نقطه‌های مسیر (۲) + نقطه‌های مسیر (۱) = تعداد کل نقطه‌ها

$$\text{تعداد کل نقطه‌ها} = n \times n = n^2 \quad \text{جدول } n \times n \text{ از نقطه‌ها}$$

$$\Rightarrow n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

(ب) $2n - 1$ برابر با m امین عدد فرد است پس: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ مجموع n جمله اول دنباله‌ی اعداد فرد است پس داریم:

$$a_1 = 1, d = 2 \rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2 + (n - 1) \times 2) = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

- ۱۰

$$166,5 \leq k \leq 16,6 \rightarrow 16,6 \leq k \leq 999 \rightarrow 100 \leq 6k \leq 6k = \text{مضارب شش}$$

$$k = 17, 18, \dots, 166 \rightarrow \text{تعداد } n = 166 - 17 + 1 = 150$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$102, 108, \dots, 996$$

$$S_{150} = \frac{150}{2}(a_1 + a_{150}) = \frac{150}{2}(102 + 996) = 82350$$

۱۱ - جملات فرد دنباله‌ی حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ می‌باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است. پس:

$$\text{فرد } S = \frac{10}{2}(2a_1 + 9 \times 2d) = 135 \rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

جملات زوج نیز دنباله‌ی حسابی با جمله اول a_p و قدرنسبت $2d$ می‌باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است پس:

$$\text{زوج } S = \frac{10}{2}(2a_p + 9 \times 2d) = 150 \rightarrow 2(a_1 + d) + 18d = 30 \rightarrow a_1 + 10d = 15$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ a_1 + 10d = 15 \end{cases} \Rightarrow d = 1,5, a_1 = 0$$

روش دوم:

$$\begin{cases} a_p + a_p + \dots + a_{p0} = 150 \\ a_1 + a_p + \dots + a_{19} = 135 \end{cases}$$

$$a_p - a_1 + a_p - a_p + \dots + a_{p0} - a_{19} = 150 - 135 \Rightarrow 10d = 15 \rightarrow d = 1,5$$

$$S_{p0} = 135 + 150 \rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 285 \Rightarrow 2a_1 + 19 \times 1,5 = 28,5 \rightarrow a_1 = 0$$

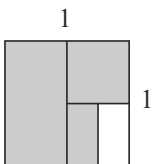
- ۱۲

$$a_n = 1 \times 2^{n-1} \Rightarrow a_1 = 1, q = 2 \rightarrow \text{دنباله: } 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$S_n = 255 \rightarrow \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \rightarrow n = 8$$

- ۱۳

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$$





$$S_n \geq \frac{99}{100} \times 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \rightarrow 2^n \geq 100 \rightarrow n \geq 7 \rightarrow \text{حداقل 7 مرحله}$$

۱۴ - الف) مجموع $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول یک و قدر نسبت a می‌باشد.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} \quad a_1 = 1, q = a$$

\downarrow جمله اول \downarrow جمله دوم \downarrow جمله سوم \downarrow جمله n ام

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(a^n - 1)}{a - 1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

(ب)

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

- ۱۵

$$x = -1 \rightarrow 4x^2 - mx - 7 = 0 \rightarrow 4 + m - 7 = 0 \rightarrow \boxed{m = 3}$$

$$4x^2 - 3x - 7 = 0 \Rightarrow (x + 1)(4x - 7) = 0 \rightarrow x = -1, \boxed{x = \frac{7}{4}}$$

- ۱۶

$$x = -2 \rightarrow x^2 + kx^2 - x - 2 = 0 \rightarrow -4 + 4k + 2 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = 2}$$

$f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است.

$$f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 2$$

$$x^2 + 2x^2 - x - 2 \left| \begin{array}{l} x+2 \\ x^2-1 \end{array} \right.$$

$$\frac{-x^2 - 2x^2}{-x - 2}$$

$$\frac{+x + 2}{0}$$

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

روش دیگر: می‌توان $f(x)$ را تجزیه کرد.

$$x^2 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

۱۷ - الف) تابع دارای یک ریشه‌ی مضاعف در $x = 2$ است.

روش اول:

$$x = 0 \rightarrow P(0) = c = -2 \rightarrow P(x) = ax^2 + bx - 2$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a, (2, 0) \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2(-4a) = 2 \Rightarrow -4a = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 2$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

روش دوم:

$$\text{ریشه‌ی مضاعف} \Rightarrow x = 2 \rightarrow P(x) = a(x - 2)^2 \quad (0, -2) \Rightarrow -2 = a(0 - 2)^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

(ب) روش اول:

$$x = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$x = -3 \rightarrow y = 0 \rightarrow 9a - 3b + c = 0 \quad (2)$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a \xrightarrow{(1), (2)} 3a + c = 0$$

$$(-1, -2) \Rightarrow a - b + c = -2 \rightarrow a - 2a + c = -2 \rightarrow -a + c = -2$$

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a - c = 2 \end{cases} \Rightarrow 4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}, c = -\frac{3}{2}, b = 1$$



صفرهای تابع $x = 1$ و $x = -2$ است.

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

روش دوم: چون $x = 1$ و $x = -3$ ریشه‌های تابع هستند داریم:

$$P(x) = a(x+3)(x-1) \rightarrow (-1, -2) \Rightarrow -2 = a \times 2 \times (-2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x-1) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

- 18

$$h(t) = -16t^2 + 144t \rightarrow t = -\frac{b}{2a} = -\frac{144}{2(-16)} = 4,5$$

$$h_{\max} = -16(4,5)^2 + 144 \times 4,5 = -324 + 648 = 324$$

زمانی که موشک به زمین برخورد می‌کند $h = 0$ است. پس داریم:

$$h(t) = 0 \rightarrow -16t^2 + 144t = 0 \Rightarrow -16t(t-9) = 0$$

$t = 0$ زمان پرتاب و $t = 9$ زمان برخورد به زمین

19 - اگر عرض کاشی را x در نظر بگیریم، طول آن $4x + 1$ است.

$$52,8m^2 \times 10^4 = 528000cm^2 \Rightarrow \text{مساحت یک کاشی} = \frac{528000}{2000} = 264$$

$$\text{کاشی } S = x(4x+1) = 264 \rightarrow 4x^2 + x - 264 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times 4 \times (-264) = 4225 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 65}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{66}{8} \text{ غ قی} \\ x = 8 \rightarrow \text{طول} = 4 \times 8 + 1 = 33 \end{cases}$$

$$x = 8 \rightarrow \text{طول} = 4 \times 8 + 1 = 33$$

- 20

$$\frac{1}{x-2} = t \rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 1, t = -3$$

$$t = 1 \rightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \rightarrow x-2 = 1 \rightarrow x = 3$$

$$t = -3 \rightarrow \frac{1}{x-2} = -3 \rightarrow x-2 = \frac{-1}{3} \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

- 21

$$L + W = \frac{1}{2} \times 144 = 72 \rightarrow W = 72 - L$$

$$\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L} \Rightarrow \frac{L}{72-L} = \frac{72}{L} \Rightarrow L^2 = 72^2 - 72L$$

$$\Rightarrow L^2 + 72L - 72^2 = 0 \rightarrow \Delta = 72^2 + 4 \times 72^2 = 5 \times 72^2$$

$$L = \frac{-72 \pm 72\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{L > 0} L = \frac{-72 + 72\sqrt{5}}{2} = 36\sqrt{5} - 36$$

$$W = 72 - L = 72 - 36\sqrt{5} + 36 = 108 - 36\sqrt{5}$$

- 22

$$\frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{P^2 + 4 - 2P}{P(2-P)} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2P^2 + 8 - 4P = -6P + 3P^2 \rightarrow P^2 - 2P - 8 = 0$$

$\Rightarrow (P-4)(P+2) = 0 \rightarrow P = 4, P = -2 \rightarrow$ هر دو قابل قبول

- 23

$$\text{تعداد اسباب بازی} = x \rightarrow \text{قیمت اسباب بازی قبل از تخفیف} = \frac{120}{x}$$

$$\text{قیمت اسباب بازی بعد از تخفیف} = x - 1 \rightarrow \text{تعداد اسباب بازی} = \frac{120}{x-1}$$



$$\frac{120}{x-1} - \frac{120}{x} = 4 \Rightarrow 120 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = 4 \Rightarrow \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{4}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{30} \Rightarrow x^2-x-30=0 \Rightarrow (x-6)(x+5)=0 \Rightarrow x=6$$

قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف ۶ هزار تومان بوده است.

- ۲۴

میزان کار در یک ساعت = $\frac{1}{x}$ زمان ماشین A به تنهایی

میزان کار در یک ساعت = $\frac{1}{x+15}$ زمان ماشین B به تنهایی

میزان کار در یک ساعت = $\frac{1}{18}$ زمان هر دو ماشین با هم

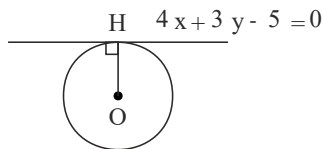
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2x+15}{x(x+15)} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow x^2 + 15x = 36x + 270 \Rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$\Rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \quad x=30, x=-9 \text{ غ ق ق}$$

۴۵ زمان ماشین B به تنهایی \rightarrow ۳۰ زمان ماشین A به تنهایی

- ۲۵



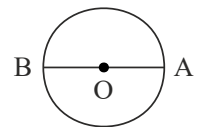
فاصله‌ی مرکز دایره تا خط همان شعاع دایره است.

$$R = OH = \frac{|4(-1) + 3 \times 2 - 5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-4+6-5|}{5} = \frac{3}{5}$$

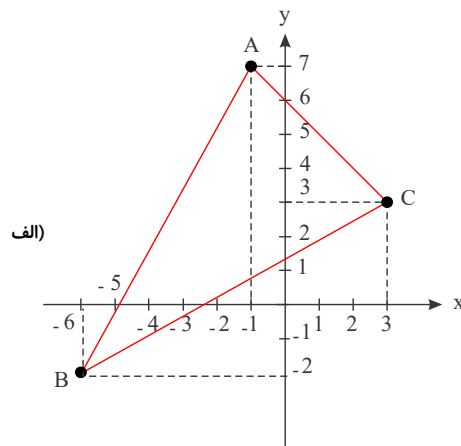
۲۶ - وسط AB مرکز دایره است.

$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{-8+6}{2} \right) = (4, -1)$$

$$R = OA = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$



- ۲۷



ب) $AB = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$

$AC = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$

$AB = BC \Rightarrow$ مثلث متساوی الساقین

وسط BC $M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$, $m_{BC} = \frac{3-(-2)}{3-(-6)} = \frac{5}{9}$

شیب عمود منصف $m = -\frac{9}{5} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5} \left(x + \frac{3}{2} \right) \Rightarrow y = -\frac{9}{5}x - \frac{22}{10} \rightarrow BC$ عمود منصف

معادله‌ی خط BC $y + 2 = \frac{5}{9}(x + 6) \Rightarrow 5x - 9y + 12 = 0 \rightarrow$

فاصله‌ی A تا ضلع BC $AH = \frac{|5(-1) - 9 \times 7 + 12|}{\sqrt{25+81}} = \frac{56}{\sqrt{106}}$

- ۲۸



الف) $OS = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow x^2 + 64 = 100 \Rightarrow x^2 = 36$

$\Rightarrow x = \pm 6 \Rightarrow$ نقطه S در ناحیه اول $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow S = (6, 8)$

ب) $P = (-10, 0), Q = (10, 0) \Rightarrow m_{PS} = \frac{y_S - y_P}{x_S - x_P} = \frac{8 - 0}{6 - (-10)} = \frac{1}{2}$

$m_{SQ} = \frac{y_Q - y_S}{x_Q - x_S} = \frac{0 - 8}{10 - 6} = \frac{-8}{4} = -2$

پ) $m_{PS} \cdot m_{SQ} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1 \Rightarrow PS \perp SQ \Rightarrow \widehat{PSQ} = 90^\circ$

- ۲۹

$ax + 4y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{|a + 8 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow |a + 7| = 2\sqrt{a^2 + 16}$

$\Rightarrow a^2 + 14a + 49 = 4a^2 + 64 \Rightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0$

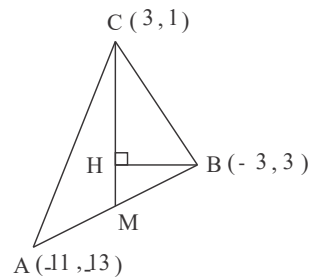
$\Delta = 196 - 4 \times 3 \times 15 = 16 \rightarrow a = \frac{14 \pm 4}{6} \Rightarrow a = 3, \frac{5}{3}$

(۳- الف)

$M = \frac{A+B}{2} = (-7, -5)$

$m_{CM} = \frac{-5 - 1}{-7 - 3} = \frac{3}{5}$

$y - 1 = \frac{3}{5}(x - 3) \Rightarrow 5y - 5 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 5y - 4 = 0$

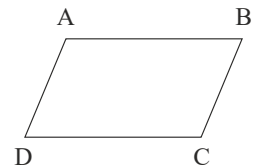


$BH = \frac{|3(-3) - 5 \times 3 - 4|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{|-9 - 15 - 4|}{\sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{34}}$

$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow -11 + 3 = -3 + x_D$

$\Rightarrow x_D = -5$

(ج)



$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow -13 + 1 = 3 + y_D \Rightarrow y_D = -15$

$D = (-5, -15)$

- ۳۱

$y = 2x \Rightarrow M(x, 2x) \Rightarrow OM + MA = 5$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{5x^2} + \sqrt{(x-2)^2 + [2(x-2)]^2} = 5$

$\Rightarrow |x|\sqrt{5} + \sqrt{(x-2)^2 + 4(x-2)^2} = 5 \Rightarrow |x|\sqrt{5} + \sqrt{5(x-2)^2} = 5$

$\Rightarrow |x|\sqrt{5} + |x-2|\sqrt{5} = 5 \Rightarrow \sqrt{5}(|x| + |x-2|) = 5$

$\Rightarrow |x| + |x-2| = \sqrt{5}$

$x < 0 \rightarrow -x - x + 2 = \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow M\left(\frac{2 - \sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right)$

$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow x - x + 2 = \sqrt{5} \rightarrow 2 = \sqrt{5}$ غلط



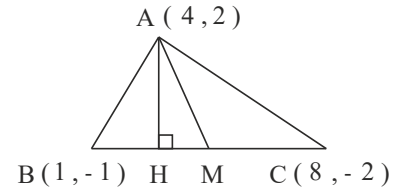
$$x > 2 \rightarrow x + x - 2 = \sqrt{5} \rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow M\left(\frac{2 + \sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{5}\right)$$

- ۳۲

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$m_{BC} = \frac{-1+2}{1-8} = -\frac{1}{7} \Rightarrow y+1 = -\frac{1}{7}(x-1)$$

$$\Rightarrow 7y+7 = -x+1 \Rightarrow x+7y = -6 \rightarrow BC \text{ معادله}$$



$$m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = 7 \rightarrow y-2 = 7(x-4) \Rightarrow y-2 = 7x-28 \Rightarrow 7x-y = 26$$

$$\begin{cases} x+7y = -6 \\ 7x-y = 26 \end{cases} \xrightarrow{\times(-7)} \begin{cases} -7x-49y = 42 \\ 7x-y = 26 \end{cases} \Rightarrow -50y = 68 \Rightarrow y = -\frac{68}{50} = -1,36$$

$$x = -6 - 7y = -6 - 7(-1,36) = -6 + 9,52 \Rightarrow x = 3,52 \Rightarrow M(3,52, -1,36)$$

$$MH = \sqrt{\left(3,52 - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(-1,36 + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{0,9604 + 0,0196} = \sqrt{0,98}$$

(۳۳ - الف)

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \quad P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

(ب) یکی از ریشه‌ها m و دیگری $2m$ می‌باشد و داریم:

$$S = m + 2m = 3m, \quad P = m \times 2m = 2m^2$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 3mx + 2m^2 = 0$$

به ازای هر عدد حقیقی m یک معادله به دست می‌آید، پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

- ۳۴

$$\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1} \xrightarrow{\times x(x+1)} 6(x+1) = 2x(x+1) + x(x-3)$$

$$6x+6 = 2x^2+2x+x^2-3x \Rightarrow 3x^2-7x-6 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \times 3 \times (-6) = 49 + 72 = 121 \Rightarrow x = \frac{7 \pm 11}{6} \Rightarrow x = 3, \quad x = -\frac{2}{3}$$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

- ۳۵

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4x = 3x+4 \Rightarrow x = 4$$

حال $x = 4$ در معادله اولیه امتحان می‌کنیم.

$$x = 4 \Rightarrow 2\sqrt{4} = \sqrt{12+4} \Rightarrow 2 \times 2 = \sqrt{16} \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow x = 4 \text{ قابل قبول}$$

- ۳۶

$$\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \xrightarrow{\times(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} 5(\sqrt{x}-2) = 2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}+2)$$

$$5\sqrt{x}-10 = 2(x-4) - \sqrt{x}-2 \Rightarrow 2x-8-\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}+10 = 0$$

$$2x-6\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 9x \Rightarrow x(x-9) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 9$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} = 2 - \frac{1}{-2} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} \checkmark \Rightarrow x = 0 \text{ قابل قبول}$$

$$x = 9 \Rightarrow \frac{5}{5} = 2 - \frac{1}{3-2} \Rightarrow 1 = 2 - 1 \checkmark \Rightarrow x = 9 \text{ قابل قبول}$$

- ۳۷

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 4 - \sqrt{x+3}$$



۲ توان $\Rightarrow 3x + 1 = 16 + x + 3 - 8\sqrt{x+3} \Rightarrow 8\sqrt{x+3} = -2x + 18$

$\Rightarrow 4\sqrt{x+3} = 9 - x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 16(x+3) = 81 - 18x + x^2$

$\Rightarrow x^2 - 18x + 81 - 16x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 34x + 33 = 0$

جمع ضرایب = 0 $\Rightarrow x = 1$, $x = \frac{c}{a} = 33$

$x = 1 \xrightarrow{\text{امتحان در معادله}} \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \Rightarrow 2 + 2 = 4 \Rightarrow x = 1$ قابل قبول

$x = 33 \xrightarrow{\text{امتحان در معادله}} \sqrt{36} + \sqrt{100} = 4 \Rightarrow 6 + 10 = 4$ غلط $\Rightarrow x = 33$ غیر قابل قبول

۳۸ - اگر نقطه‌های مورد نظر را x در نظر بگیریم، داریم:

$|x - (-1)| + |x - 3| = 6 \Rightarrow |x + 1| + |x - 3| = 6$

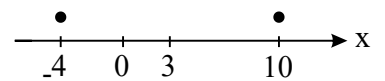
$x < -1 \Rightarrow -x - 1 - x + 3 = 6 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$ قابل قبول

$-1 \leq x < 3 \Rightarrow x + 1 - x + 3 = 6 \Rightarrow 4 = 6$ غلط

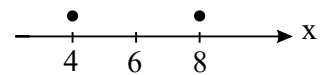
$x \geq 3 \Rightarrow x + 1 + x - 3 = 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$ قابل قبول

$|x - 3| = 7 \Rightarrow x - 3 = \pm 7 \Rightarrow x = 10, x = -4$

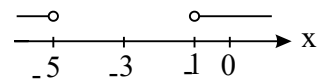
۳۹ - الف) فاصله بین x و ۳ برابر با $|x - 3|$ می‌باشد پس:



ب)



پ)

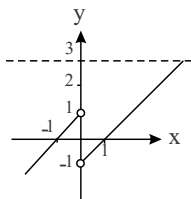


$2|x - 6| = 4 \Rightarrow |x - 6| = 2 \Rightarrow x - 6 = \pm 2 \Rightarrow x = 8, x = 4$

$|x - (-3)| > 2 \Rightarrow |x + 3| > 2 \Rightarrow x + 3 < -2$ یا $x + 3 > 2 \Rightarrow x < -5$ یا $x > -1$

- ۴۰

الف) $y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - \frac{x}{-x} & x < 0 \\ x - \frac{x}{x} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$

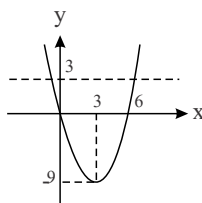


خط $y = 3$ نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند، پس معادله $y = 3$ یک ریشه مثبت دارد.

$x - \frac{x}{|x|} = 3 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \text{ غیر قابل قبول} \\ x > 0 \Rightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \text{ جواب} \end{cases}$

ب) $y = x^2 - 6x \rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$

رأس $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$
رأس $y = 9 - 18 = -9$

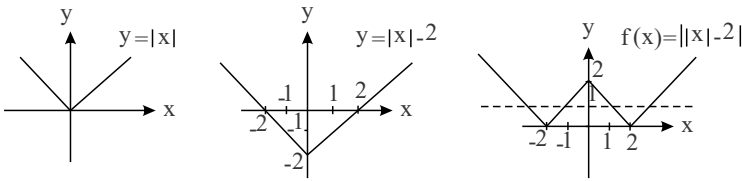


معادله $y = 3$ دارای یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت است.

$y = 3 \rightarrow x^2 - 6x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0$

$\Delta = 36 + 12 = 48 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2}$

- ۴۱



خط $y = 1$ نمودار تابع f را در ۴ نقطه قطع می‌کند پس معادله $f(x) = 1$ دارای ۴ ریشه است، دو ریشه مثبت و دو ریشه منفی.

$$f(x) = 1 \Rightarrow ||x| - 2| = 1 \Rightarrow |x| - 2 = \pm 1 \Rightarrow |x| = 3, |x| = 1$$

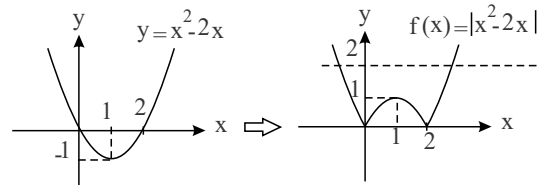
$$|x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3, \quad |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

- ۴۲

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$\text{رأس } y = 1 - 2 = -1$$



چون خط $y = 2$ نمودار تابع f را در ۲ نقطه قطع می‌کند، معادله $|x^2 - 2x| = 2$ دارای ۲ ریشه است، یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد.

$$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = \pm 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2x = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

۴۳ - الف) نقاط A و B محل برخورد سهمی $y = x^2 - 8x - 20$ با محور x ها است یعنی باید معادله $y = 0$ را حل کنیم.

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 10) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 10$$

$$\Rightarrow A = (-2, 0), B = (10, 0)$$

(ب)

$$AB = \sqrt{(-2 - 10)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

(پ) بیشترین ضخامت عدسی همان عرض نقطه رأس سهمی است.

$$y = x^2 - 8x - 20 \Rightarrow \text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4 \Rightarrow y = 16 - 32 - 20 = -36$$

$$\text{بیشترین ضخامت عدسی} = |-36| = 36 \text{ mm}$$

۴۴ - نقطه دلخواهی روی خط $ax + by + c = 0$ در نظر گرفته و فاصله آن را تا خط $ax + by + c' = 0$ به دست می‌آوریم.

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$$

$$A = (0, -\frac{c}{b}) \Rightarrow \text{فاصله } A \text{ تا خط} = \frac{|0 + b(-\frac{c}{b}) + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- ۴۵

الف

$$\frac{2-x}{|x-3|} = 1$$

$$x < 3 \Rightarrow \frac{2-x}{-(x-3)} = 1 \Rightarrow 2-x = -x+3 \Rightarrow 2=3 \text{ غلط} \Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

$$x > 3 \Rightarrow \frac{2-x}{x-3} = 1 \Rightarrow x-3 = 2-x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ غیر قابل قبول}$$

چون $x = \frac{5}{2}$ در شرط $x > 3$ صدق نمی‌کند پس غیر قابل قبول است.

ب

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2x + 1 \Rightarrow |x-1| = 2x + 1$$



قابل قبول $x < 1 \Rightarrow -(x-1) = 2x+1 \Rightarrow 2x+1 = -x+1 \Rightarrow x = 0$

غیر قابل قبول $x \geq 1 \Rightarrow x-1 = 2x+1 \Rightarrow x = -2$

- ۴۶

الف

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(-x) & x < 0 \\ x \cdot x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

ب

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \\ -x^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline X-1 & - & - \\ X+1 & - & + \end{array}$$

پ

$$h(x) = \begin{cases} -(x-1) - (x+1) & x < -1 \\ -(x-1) + x + 1 & -1 \leq x < 1 \\ x-1 + x + 1 & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

X	-1	1
X-1	-	-
X+1	-	+

- ۴۷

الف

$$x^2 - 3x^2 - 4 = 0, x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+1) = 0$$

غ ق ق $t = 4, t = -1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2, x^2 = -1$

ب

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - \sqrt{\frac{x^2}{3} - 2} + 6 = 0, \frac{x^2}{3} - 2 = t$$

$$t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-6) = 0 \Rightarrow t = 1, t = 6$$

$$\frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3, \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{6}$$

پ

$$پ) (4 - x^2)^2 - (4 - x^2) - 12 = 0, 4 - x^2 = t \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0$$

$$(t-4)(t+3) = 0 \Rightarrow t = 4, t = -3$$

$$4 - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 4 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7}$$

- ۴۸

الف

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

ب

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x^2 + x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 24 = -23 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

پ

$$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x^2 + 5 = 0, x^2 = t \Rightarrow t^2 + 3t + 5 = 0$$

$$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \Rightarrow h(x) \text{ صفر ندارد.}$$

برای تعیین صفرهای هر تابع، باید معادله $y = 0$ را حل کنیم.



الف

سهمی روبه بالا $a > 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = x^2 + bx + d$

راس $x = -\frac{b}{2a} = -3 \Rightarrow b = 6a = 6 \times 1 = 6 \rightarrow b = 6$

$(-3, 5) \rightarrow 5 = 9 - 3b + c \Rightarrow 5 = 9 - 18 + c \rightarrow c = 14$

$f(x) = x^2 + 6x + 14 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow$ ریشه ندارد

ب

سهمی روبه پایین $a < 0 \rightarrow a = -1 \rightarrow f(x) = -x^2 + bx + c$

راس $x = -\frac{b}{2a} = -2 \rightarrow b = 4a = 4(-1) = -4 \rightarrow b = -4$

$(-2, 2) \rightarrow 2 = -4 - 2b + c \Rightarrow 6 = -2(-4) + c \rightarrow c = -2$

$f(x) = -x^2 - 4x - 2 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow -x^2 - 4x - 2 = 0$

$$\Delta = 16 - 8 = 8 \rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

پ

سهمی روبه بالا $a > 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = x^2 + bx + c$

راس $x = -\frac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = -6a = -6 \rightarrow b = -6$

$(3, -3) \rightarrow 9 - 18 + c = -3 \rightarrow c = 6$

$f(x) = x^2 - 6x + 6 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

$$\Delta = 36 - 24 = 12 \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

ت

سهمی روبه پایین $a < 0 \rightarrow a = -1 \rightarrow f(x) = -x^2 + bx + c$

راس $x = -\frac{b}{2a} = -2 \rightarrow b = 4a = 4(-1) = -4 \rightarrow b = -4$

$(-2, -1) \rightarrow -4 - 2b + c = -1 \rightarrow -4 + 8 + c = -1 \rightarrow c = -5$

$f(x) = -x^2 - 4x - 5 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow$ ریشه ندارد

الف

$$\sqrt{1-x^2} = x \xrightarrow{x>0} 1-x^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{x>0} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ب

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x \xrightarrow{x>0} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) \Rightarrow 1-\sqrt{x} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^2$$

$$\Rightarrow (1-\sqrt{x})((1+\sqrt{x})^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \\ (1+\sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}} = 0 = 1-1$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{0}}{1+\sqrt{0}} = 1 = 1-0$$



پ

جواب ندارد $\frac{5}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{1+x} = -\frac{5}{4}$ $\Rightarrow 5 + x + 4\sqrt{1+x} = x \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (2 + \sqrt{1+x})^2$ راه اول

معادله جواب ندارد \sqrt{x} $\Rightarrow 2 + \sqrt{1+x} > \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{1+x} > \sqrt{x} \Rightarrow 1+x > x \Rightarrow x > 0$ راه دوم