



علی هاشمی

۱- اگر $x^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\right) - \left(\sqrt[3]{5^2\sqrt{5}}\right)^{\frac{3}{2}}$ باشد، x کدام است؟

۲- اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۳- اگر قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادله $ax\left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$ برابر ۲ باشد، آنگاه a کدام می‌تواند باشد؟

۴- معادله $x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2$ چند جواب دارد؟

۵- خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه امام متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری این مسیر را از شمال به جنوب با سرعت ثابت V کیلومتر بر ساعت و بدون توقف طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال از سرعت قطار $10 \frac{km}{h}$ کم شود، زمان بازگشت

نیم‌ساعت طولانی‌تر از زمان رفت می‌شود. سرعت برگشت قطار کدام است؟ $\left(\frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \text{سرعت}\right)$



۶- معادله $x = \frac{4}{x+2} + \frac{4}{x-2}$ چند جواب حقیقی دارد؟

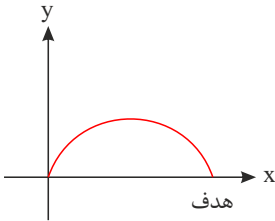
۷- جواب‌های معادله $\sqrt{2x+5} - 2x = 5$ چگونه است؟

۸- معادله $x + 2 = \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} + \sqrt{x + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}}$ چند جواب دارد؟

۹- اگر جواب‌های معادله $\frac{a}{x^2 + 2x - 3} + \frac{a}{2x - 2} = \frac{x - 1}{x^2 + x - 6}$ برابر ۳ و β باشد، آن‌گاه $\beta^2 + \beta$ کدام است؟



۱۰- توپی را همانند شکل، به سمت هدفی پرتاب می‌کنیم. معادله حرکت توپ به شکل یک تابع درجه دو با ضابطه $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$ است که x مسافت افقی طی شده (برحسب متر) و y ارتفاع توپ از سطح زمین (برحسب متر) می‌باشد. بیشترین ارتفاعی که توپ از سطح زمین دارد، چند متر است؟



۱۱- معادله $2\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^3+x-10} = 0$ چند ریشه دارد؟

۱۲- یک آشپز به همراه شاگردش غذایی را در ۷۲ دقیقه آماده می‌کند. اگر شاگرد بخواهد به تنهایی آن غذا را آماده کند، یک ساعت بیشتر از مدت زمانی طول می‌کشد که آشپز بخواهد آن را به تنهایی آماده کند. شاگرد آشپز آن غذا را به تنهایی در چند ساعت آماده می‌کند؟

۱۳- جواب معادله گویای $\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = ax^{-1}$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

۱۴- اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{5-m}{2x} + \frac{m-3}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4}$ باشد، آن‌گاه جواب دیگر کدام است؟



۱۵- اگر $x = 1$ یک جواب معادله‌ی $\frac{x-a}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{2a}{x^2-4}$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱۶- معادله‌ی $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = 4x\left(1 - \frac{x-2}{x+2}\right)$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱۷- معادله‌ی $\frac{1}{x^2-3x-2} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x^2-3x}$ دارای چند جواب است؟

۱۸- معادله‌ی $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2+x-2}$ چند ریشه دارد؟

۱۹- به ازای چه مقدار از k ، معادله‌ی $\frac{1}{x+2} + \frac{6}{k} = \frac{3x}{x-2}$ دارای جواب $x = 1$ است؟



۲۰- مجموعه جواب معادله $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$ کدام است؟

۲۱- اگر k جواب معادله $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$ باشد، جواب معادله $\sqrt{x+k} = k$ کدام است؟

۲۲- مجموعه جواب معادله $\sqrt{169-x^2} = x - 17$ کدام است؟

۲۳- اگر $x = 2$ جواب معادله $\frac{(x^2+1)^2}{(x+k)^2} = \frac{3x+1}{(k+2)^2} + 2$ باشد، مقدار k کدام است؟

۲۴- عدد ۲ ریشه کدام یک از معادلات زیر است؟

۲۵- معادله $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$ دارای چند ریشه حقیقی است؟



۲۶- چند عدد صحیح وجود دارد که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد؟

۲۷- اگر $x = a$ یک جواب معادله $\frac{a-1}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-a}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی مقادیر a چند عضو دارد؟

۲۸- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2+5x}{x^2-4}$ کدام است؟

۲۹- بزرگترین ریشه‌ی معادله $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \frac{5}{2x-1} + 5$ کدام است؟

۳۰- به ازای کدام مقدار k ، مجموع ریشه‌های معادله $\frac{k}{x} + \frac{x}{x-3} = 2$ برابر ۷ است؟





پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ هر یک از پرانتزها را جداگانه ساده می‌کنیم.

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}\sqrt[3]{5}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{5 \times 5^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{5^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(5^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \underbrace{|\sqrt{5}-1|}_{+} = \sqrt{5}-1$$

$$\sqrt{5} - (\sqrt{5}-1) = x\sqrt{5} \rightarrow 1 = x\sqrt{5} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۲ - گزینه ۴

$$x = 4 \Rightarrow 4 + a = \sqrt{20 - 16} \Rightarrow a = -2$$

۴ = x ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x - 2 = \sqrt{5x - x^2} \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{9}{2} \xrightarrow{x_1=4} 4 + x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

۱/۲ در معادله صدق نمی‌کند ($x - 2 = \sqrt{5x - x^2}$) پس به عنوان ریشه محسوب نمی‌شود.

۳ - گزینه ۱ در طرف چپ و راست مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = ax \left(\frac{x+1 - (x-1)}{x+1} \right) \Rightarrow \frac{-4x}{(x+1)(x-1)} = ax \left(\frac{2}{x+1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2ax}{x+1} + \frac{4x}{(x+1)(x-1)} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x+1} \left(a + \frac{2}{x-1} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ a + \frac{2}{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x-1} = -a \Rightarrow \frac{2}{-a} = x-1 \Rightarrow x = 1 - \frac{2}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{قدر مطلق تفاضل جواب‌ها} = \left| 1 - \frac{2}{a} - 0 \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{2}{a} = 2 \rightarrow \frac{2}{a} = -1 \rightarrow a = -2 \\ 1 - \frac{2}{a} = -2 \rightarrow \frac{2}{a} = 3 \rightarrow a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

۴ - گزینه ۱

$$x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2 \rightarrow \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2$$

(هرگاه مجموع دو عدد که عکس یکدیگر می‌باشند برابر ۲ باشد حتماً آن دو عدد، یک می‌باشند).

$$\frac{x^2+1}{x} = 1 \rightarrow x^2+1 = x \rightarrow x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta = b^2-4ac = 1-4 = -3 < 0 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد.}$$

۵ - گزینه ۲ ابتدا باید پارامترهای موجود را به یکدیگر مرتبط کرده و یک معادله بنویسیم.

$$V = \text{سرعت مسیر رفت} , \ell = 60 \text{ km} = \text{طول مسیر}$$

حال با توجه به صورت سوال داریم:

$$t = \frac{60}{V} \quad (1)$$

$$t' = \frac{60}{V-10} \quad (2)$$

$$t' = t + 0.5 \xrightarrow{(1),(2)} \frac{60}{V-10} = \frac{60}{V} + \frac{1}{2}$$

با فرض ۱۰ و ۰ ≠ V طرفین را در ۲V(V-10) ضرب می‌نمایم:

$$\times 2V(V-10) \rightarrow 120V = 120(V-10) + V(V-10)$$

$$\rightarrow 120V = 120V - 1200 + V^2 - 10V$$



$$\rightarrow V^2 - 10V - 1200 = 0 \rightarrow (V - 40)(V + 30) = 0$$

$$\begin{cases} V = 40 \rightarrow V' = V - 10 = 40 - 10 = 30 \text{ km/h} \rightarrow V' = 30 \text{ km/h} \\ V = -30 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۶ - گزینه ۴

$$\frac{4}{x+2} + \frac{4}{x-2} = x \Rightarrow \frac{4(x-2) + 4(x+2)}{(x+2)(x-2)} = x \Rightarrow \frac{8x}{x^2-4} = x$$

$$\frac{8x}{x^2-4} - x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{8}{x^2-4} - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{x^2-4} = 1 \Rightarrow x^2 - 4 = 8 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

هیچ کدام از این جواب‌ها ریشهٔ معادله نیستند، پس هر سه قابل قبول هستند.

۷ - گزینه ۲

$$\sqrt{2x+5} = 5 + 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x+5 = 4x^2 + 20x + 25 \rightarrow 4x^2 + 18x + 20 = 0$$

$$\rightarrow 2x^2 + 9x + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 81 - 80 = 1 \rightarrow x = \frac{-9 \pm 1}{4} = -2, -\frac{5}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا در معادله‌ی اصلی (اولیه) صدق می‌کنند.

۸ - گزینه ۱ شرط اولیهٔ جواب آن است که زیر رادیکال‌ها بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$-x^2 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4x^2 - 25x + 100 \leq 0$$

$$\rightarrow x^2(x-4) - 25(x-4) \leq 0 \rightarrow (x-4)(x^2-25) \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -5 & 4 & 5 & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & \leq 0 & - & + & - & + \end{array} \Rightarrow x \leq -5 \text{ یا } 4 \leq x \leq 5 \quad (I)$$

$$-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0 \rightarrow (x-4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 2 & 4 & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & \leq 0 & + & - & + \end{array} \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \quad (II)$$

تنها اشتراک بین I, II عدد $x = 4$ است که در معادله هم صدق می‌کند (امتحان کنید)، پس معادله فقط یک جواب دارد.

۹ - گزینه ۱ $x = 3$ جواب معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند.

$$x = 3 \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{a}{9+6-3} + \frac{a}{6-2} = \frac{3-1}{9+3-6} \rightarrow \frac{a}{12} + \frac{a}{4} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 12} a + 3a = 4 \rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 1$$

حال، $a = 1$ را در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$a = 1 \rightarrow \frac{1}{(x+3)(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)} = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} \xrightarrow{\times 2(x+3)(x-1)(x-2)} 2x-4 + (x+3)(x-2) = 2(x-1)^2$$

$$\rightarrow 2x-4 + x^2-2x+3x-6 = 2x^2-4x+2 \rightarrow x^2-7x+12 = 0 \rightarrow (x-4)(x-3) = 0 \rightarrow x = 3, x = 4$$

بنابراین $\beta = 4$ است پس $\beta^2 + \beta = 16 + 4 = 20$ است.

۱۰ - گزینه ۱ با توجه به ضابطهٔ مطرح شده، تصویر یک سهمی رسم شده است.

بیشترین ارتفاع سهمی در رأس اتفاق می‌افتد که مختصات رأس سهمی به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$S \text{ رأس} \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2(-\frac{1}{40})} = 20 \\ y_S = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(20) = \frac{-1}{40}(20)^2 + 20 = -10 + 20 = 10 \end{cases}$$

پس ارتفاع max توپ ۱۰ متر می‌باشد.

۱۱ - گزینه ۱ قبل از حل معادله باید توجه داشت که مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر خواهد شد که هر دو صفر باشند. در این معادله دو رادیکال فرجه زوج داریم که هر دو نامنفی هستند لذا

هر دو باید صفر باشند.

$$2\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2+x-10} = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{4-x^2} = 0 \rightarrow \sqrt{4-x^2} = 0 \rightarrow 4-x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \\ \sqrt{x^2+x-10} = 0 \end{cases}$$

نیاز به حل معادله دوم نمی‌باشد و با جایگذاری دو مقدار $x = 2$ و $x = -2$ می‌بینیم که فقط $x = 2$ ریشهٔ معادله است و معادله یک ریشه دارد.

۱۲ - گزینه ۳ برای حل سوال باید میزان کار انجام شده توسط هر کدام را در واحد زمان محاسبه کرد. فرض کنید آشپز در x ساعت کار را انجام می‌دهد پس شاگرد او در $x + 1$ ساعت این کار را

انجام خواهد داد.

از طرفی هر دو با هم در ۷۲ دقیقه یعنی $\frac{6}{5}$ ساعت این کار را انجام می‌دهند



$$\text{میزان کار انجام شده در یک ساعت} \rightarrow \text{آشپز } x \text{ ساعت} = \frac{1}{x}$$

$$\text{میزان کار انجام شده در یک ساعت} \rightarrow \text{شاگرد } x + 1 \text{ ساعت} = \frac{1}{x + 1}$$

$$\text{میزان کار انجام شده در یک ساعت} \rightarrow \text{باهم } \frac{6}{5} \text{ ساعت} = \frac{5}{6}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6} \xrightarrow{\times 6x(x+1)} 6(x+1) + 6x = 5x(x+1)$$

$$6x + 6 + 6x = 5x^2 + 5x \rightarrow 5x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(5)(-6) = 49 + 120 = 169$$

$$\rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{2(5)} = \frac{7 \pm 13}{10} \begin{cases} x_1 = \frac{7+13}{10} = 2 \\ x_2 = \frac{7-13}{10} = -\frac{6}{10} \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

پس شاگرد آشپز در $2 + 1 = 3$ ساعت غذا را درست می‌نماید.

۱۳ - گزینه ۲ ابتدا توان منفی را وارون می‌نماییم تا به توان مثبت تبدیل شود.

$$\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = ax^{-1} \rightarrow \frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$$

با فرض a و $x \neq 0$ طرفین را در $x(a-x)$ ضرب می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\times (a-x)} x^2 - (a-x)^2 &= a(a-x) \rightarrow x^2 - (a^2 - 2ax + x^2) = a^2 - ax \\ \rightarrow 2ax - 2a^2 &= 0 \rightarrow a(2x - 2a) = 0 \begin{cases} a \neq 0 \\ 2x - 2a = 0 \rightarrow x = \frac{2a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

۱۴ - گزینه ۱ $x = 2$ در معادله صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \frac{5-m}{4} + \frac{m-3}{2 \times 6} &= \frac{2}{4+6-4} \Rightarrow \frac{5-m}{4} + \frac{m-3}{12} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \frac{15-3m+m-3}{12} &= \frac{1}{3} \Rightarrow 12-2m=4 \Rightarrow 2m=8 \Rightarrow m=4 \end{aligned}$$

توجه کنید که $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$ با جایگذاری $m=4$ در معادله، آن را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} + \frac{1}{x(x+4)} &= \frac{x}{(x+4)(x-1)} \Rightarrow \frac{x+4+2}{2x(x+4)} = \frac{x}{(x+4)(x-1)} \\ \rightarrow (x+6)(x-1) &= 2x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x-2) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases} \end{aligned}$$

۱۵ - گزینه ۱ $x = 1$ ریشه‌ی معادله است پس در معادله صدق می‌کند.

$$\frac{1-a}{1+2} + \frac{1}{1-2} = \frac{2a}{1-4} \rightarrow \frac{1-a}{3} - 1 = \frac{-2a \times 3}{3} \rightarrow 1-a-3 = -2a \rightarrow a=2$$

$$a=2 \rightarrow \frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{4}{(x+2)(x-2)} \xrightarrow{\times (x+2)(x-2)} (x-2)^2 + x(x+2) = 4$$

$$\rightarrow x^2 + 4 - 4x + x^2 + 2x = 4 \rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow 2x(x-1) = 0 \rightarrow x=0, x=1$$

بنابراین جواب دیگر معادله $x=0$ است.

۱۶ - گزینه ۳

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = 4x \left(1 - \frac{x-2}{x+2}\right) \rightarrow \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = 4x \left(\frac{x+2-x+2}{x+2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = 4x \left(\frac{4}{x+2}\right) \rightarrow \frac{x^2 + 4 + 4x - (x^2 + 4 - 4x)}{(x+2)(x-2)} = \frac{16x}{x+2} \rightarrow \frac{8x}{x-2} = 16x$$

$$\rightarrow \frac{8x}{x-2} - 16x = 0 \rightarrow x \left(\frac{8}{x-2} - 16\right) = 0$$



$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{8}{x-2} = 16 \rightarrow 16x - 32 = 8 \rightarrow 16x = 40 \rightarrow x = \frac{40}{16} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند زیرا مخرج هیچ کسری را صفر نمی کنند.

۱۷ - گزینه ۱ $x^2 - 3x$ را برابر A در نظر می گیریم.

$$\frac{1}{A-2} + \frac{1}{A+2} = \frac{1}{A} \xrightarrow{\times A(A+2)(A-2)} A(A+2) + A(A-2) = (A+2)(A-2)$$

$$\rightarrow A^2 + 2A + A^2 - 2A = A^2 - 4 \rightarrow A^2 = -4$$

ریشه‌ی حقیقی ندارد: $A^2 = -4$

بنابراین معادله‌ی داده شده دارای جواب نمی باشد.

۱۸ - گزینه ۱

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2+x-2} \rightarrow \frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x^2}{(x+2)(x-1)}$$

$$\xrightarrow{\times (x+2)(x-1)} (x+2)(x+1) + 2x(x-1) = 3x^2 \rightarrow x^2 + x + 2x + 2 + 2x^2 - 2x = 3x^2$$

$$\rightarrow 3x^2 + x + 2 = 3x^2 \rightarrow x = -2$$

این جواب غیرقابل قبول می باشد زیرا مخرج کسر را صفر می کند.

۱۹ - گزینه ۲ ریشه‌های یک معادله در معادله صدق می کند، لذا کفایت $x = 1$ را در معادله قرار دهیم.

$$\frac{1}{x+2} + \frac{6}{k} = \frac{3x}{x-2} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{3} + \frac{6}{k} = -3 \xrightarrow{\times 3k} k + 18 = -9k$$

$$\rightarrow -10k = 18 \rightarrow k = -\frac{18}{10} = -1.8$$

۲۰ - گزینه ۳ می توان معادله را از حالت کسری خارج کرد، لذا معادله را در k مخرج ضرب می کنیم.

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \xrightarrow{\times (x-3)(x+4)} 2x(x+4) + (x+1)(x-3) = (x-1)(x+4)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 8x + x^2 - 2x - 3 = x^2 + 3x - 4 \rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\rightarrow (2x+1)(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

یا

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 1}{4} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

۲۱ - گزینه ۱

برای حل ابتدا یکی از رادیکال‌ها را به طرف دوم منتقل می نمایم.

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{2x-5} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x+1 = 1 + 2x-5 + 2\sqrt{2x-5}$$

$$\rightarrow -x+5 = 2\sqrt{2x-5} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x^2 - 10x + 25 = 4(2x-5)$$

$$\rightarrow x^2 - 10x + 25 = 8x - 20 \rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$$

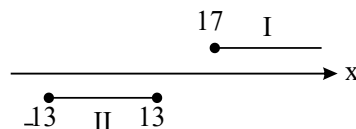
$$(x-3)(x-15) = 0 \quad \begin{cases} x = 3 \rightarrow k = 3 \\ x = 15 \text{ غ ق} \end{cases}$$

حال باید معادله‌ی نهائی را بسازیم و حل کنیم:

$$\sqrt{x+k} = k \xrightarrow{k=3} \sqrt{x+3} = 3 \xrightarrow{(\)^2} x+3 = 9 \rightarrow x = 6$$

۲۲ - گزینه ۴ یکی روش‌های حل معادلات رادیکالی تعیین دامنه تابع می باشد.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{169-x^2} &= x - 17 \quad x - 17 \geq 0 \rightarrow x \geq 17(I) \\ 169 - x^2 &\geq 0 \\ x^2 &\leq 169 \rightarrow |x| \leq 13 \rightarrow -13 \leq x \leq 13(II) \end{aligned} \right\}$$





$$(I) \cap (II) = \emptyset$$

معادله فاقد ریشه است.

۲۳ - گزینه ۳ ابتدا ریشه معادله را در معادله جایگذاری می‌نماییم:

$$\frac{(x^2 + 1)^2}{(x + k)^2} = \frac{3x + 1}{(k + 2)^2} + 2 \xrightarrow{x=2} \frac{(2^2 + 1)^2}{(2 + k)^2} = \frac{3(2) + 1}{(k + 2)^2} + 2 \rightarrow \frac{25}{(2 + k)^2} = \frac{7 + 2(k + 2)^2}{(k + 2)^2}$$

می‌توان عامل را از مخرج دو طرف حذف نمود چون مخالف صفر است:

$$25 = 7 + 2(k + 2)^2 \rightarrow 2(k + 2)^2 = 18 \rightarrow (k + 2)^2 = 9$$

$$\rightarrow |k + 2| = 3 \begin{cases} k + 2 = +3 \rightarrow k = 1 \\ k + 2 = -3 \rightarrow k = -5 \end{cases}$$

۲۴ - گزینه ۳ می‌توان برای حل سوال از مفهوم ریشه استفاده کرد. ریشه یعنی عددی که باعث برقراری تساوی درست می‌شود.

گزینه ۱: $2\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 9 \xrightarrow{x=2} 4 + 1 \neq 9 \quad \times$

گزینه ۲: $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 3 \xrightarrow{x=2} 3 - 1 \neq 3 \quad \times$

گزینه ۳: $\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} = \sqrt{5} \xrightarrow{x=2} \sqrt{5} = \sqrt{5} \quad \checkmark$

گزینه ۴: $\sqrt{5x-1} + x = 6 \xrightarrow{x=2} 3 + 2 \neq 6 \quad \times$

۲۵ - گزینه ۱ روش اول: می‌توان بین طرف اول مخرج مشترک گرفت:

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2} \rightarrow \frac{3(x-3) - 2x}{x(x-3)} = \frac{12}{9-x^2} \rightarrow \frac{x-9}{x(x-3)} = \frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$\rightarrow \frac{x-9}{x(x-3)} = \frac{12}{-(x-3)(x+3)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -(x-9)(x+3) = 12x$$

$$\rightarrow -x^2 + 6x + 27 = 12x \rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\rightarrow (x+9)(x-3) = 0 \begin{cases} x = -9 \\ x = 3 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

روش دوم: معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسر خارج شود.

$$x(3-x)(3+x) \times \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2} \right) \rightarrow 3(9-x^2) + 2x(3+x) = 12x$$

$$\rightarrow 27 - 3x^2 + 6x + 2x^2 - 12x = 0 \rightarrow -x^2 - 6x + 27 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0 \rightarrow (x-3)(x+9) = 0 \begin{cases} x=3 \text{ غیر قابل قبول (ریشه مخرج)} \\ x=-9 \end{cases}$$

۲۶ - گزینه ۲

$$x - \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \rightarrow x - \frac{1}{2}x = \sqrt{x} \rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{x} \rightarrow x = 2\sqrt{x}$$

به توان ۲ می‌رسانیم

$$\rightarrow x^2 = 4x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \checkmark \\ x = 4 \quad \checkmark \end{cases}$$

۲۷ - گزینه ۲

با جایگذاری a در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{a-1}{a+2} + \frac{2}{a} = \frac{4a-4}{a^2-a} \Rightarrow \frac{a^2-a+2a+4}{a(a+2)} = \frac{4a-4}{a(a-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+a+4}{a(a+2)} = \frac{4(a-1)}{a(a-1)} \xrightarrow{a \neq 0, 1} \frac{a^2+a+4}{a+2} = 4$$

$$\xrightarrow{a \neq -2} a^2+a+4 = 4a+8 \Rightarrow a^2-3a-4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 4, -1$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. زیرا مخرج هیچ‌کدام از کسرها را صفر نمی‌کنند.

۲۸ - گزینه ۳ ابتدا با مخرج مشترک گیری، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x+1)(x+2) + (x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+5x}{x^2-4} \Rightarrow \frac{(x^2+3x+2) + (x^2-3x+2)}{x^2-4} = \frac{x^2+5x}{x^2-4}$$

$$\xrightarrow{x \neq \pm 2} 2x^2+4 = x^2+5x \Rightarrow x^2-5x+4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, 4$$

دقت کنید هیچ یک از جوابها مخرج را صفر نمی‌کنند. بنابراین هر دو قابل قبول هستند. پس مجموع ریشه‌ها ۵ است.

۲۹ - گزینه ۳

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \frac{5}{2x-1} + 5 \rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5+10x-5}{2x-1} \rightarrow \frac{x-2}{x+1} = \frac{10x}{2x-1}$$



$$\rightarrow 2x^2 - x - 4x + 2 = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x \rightarrow 2x^2 + 15x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 225 + 64 = 289 \Rightarrow x_1 = \frac{-15 + 17}{16} = \frac{1}{8} \quad x_2 = \frac{-15 - 17}{16} = -2$$

ریشه‌ی بزرگتر، $x = \frac{1}{8}$ است.

۳۰ - گزینه ۱

$$\frac{k}{x} + \frac{x}{x-3} = 2 \Rightarrow \frac{k(x-3) + x^2}{x(x-3)} = 2 \xrightarrow{x \neq 0, 3} kx - 3k + x^2 = 2x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - kx + 3k = 0 \Rightarrow x^2 - (6+k)x + 3k = 0$$

چون مجموع ریشه‌ها برابر ۷ است، بنابراین:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow 7 = -\frac{-(6+k)}{1} \Rightarrow 6+k=7 \Rightarrow k=1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۶ - ۴

۱۱ - ۱

۱۶ - ۳

۲۱ - ۱

۲۶ - ۲

۲ - ۴

۷ - ۲

۱۲ - ۳

۱۷ - ۱

۲۲ - ۴

۲۷ - ۲

۳ - ۱

۸ - ۱

۱۳ - ۲

۱۸ - ۱

۲۳ - ۳

۲۸ - ۳

۴ - ۱

۹ - ۱

۱۴ - ۱

۱۹ - ۲

۲۴ - ۳

۲۹ - ۳

۵ - ۲

۱۰ - ۱

۱۵ - ۱

۲۰ - ۳

۲۵ - ۱

۳۰ - ۱