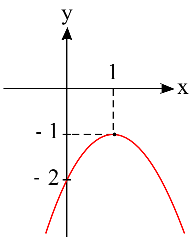
علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - ریشه‌های کدام معادله از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ یک واحد کمتر است؟

۲ - ضابطهٔ سهمی مربوط به شکل زیر کدام است؟

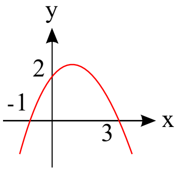


۳ - به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲ + (m - ۱)x = ۱$ برابر $\frac{۱۳}{۴}$ است؟

۴ - اگر $x = k$ جواب معادلهٔ $\frac{x}{x+۲} = \frac{x+۱}{x^۲-۴} - \frac{x}{x-۲}$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۱۵kx - ۱ = ۰$ کدام است؟

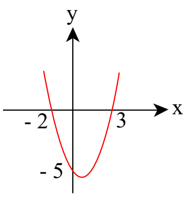
۵ - جواب‌های کدام معادله، معکوس ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ۵x - ۴ = ۰$ ، است؟

۶ - نمودار تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ به صورت مقابل بوده و مختصات رأس سهمی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ است. $\alpha\beta$ کدام است؟



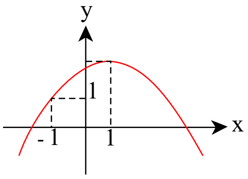
۷ - در صورتی که منحنی تابع $y=2x^{2}+ax+a-\frac{3}{2}$ ، محور xها را در طرفین محور yها قطع کند، آنگاه حدود تغییرات a چگونه است؟

۸ - شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم به معادله‌ی $y=ax^{2}+bx+c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۹ - اگر ریشه‌های معادله‌ی $4x^{2}+8x+m-1=0$ نصف ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}+4x-1=0$ باشند، m کدام است؟

۱۰ - در سهمی شکل مقابل به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، اگر $a - b = -3$ آنگاه $f(1)$ کدام است؟



۱۱ - در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + (k+1)x + k + 4 = 0$، اگر حاصل‌ضرب ریشه‌ها ۲ برابر مجموع ریشه‌ها باشد، آن‌گاه تابع $f(x) = kx^2 - 4x + 1$ چگونه است؟

۱۲ - اگر β, α ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^{-2} + \beta\alpha^{-2}$ کدام است؟

۱۳ - اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل $A = (\alpha + \frac{2}{\beta})^2 + (\beta + \frac{2}{\alpha})^2$ کدام است؟

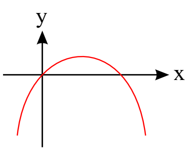
۱۴ - ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $ax^2 + 5x + a^2 = 6$ معکوس یکدیگرند. اختلاف این دو ریشه کدام است؟

۱۵ - تابع درجه‌ی دوم f، محور طول‌ها را در ۳ و ۲− و محور عرض‌ها را در ۱ قطع می‌کند. مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱۶ - معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن ۳ برابر معکوس ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد، کدام است؟

۱۷ - اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \alpha^3 + \beta^2 + \beta^3$ کدام است؟

۱۸ - کدام گزینه می‌تواند ضابطه‌ی تابع زیر باشد؟



۱۹ - اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^3 + \beta\alpha^3$ کدام است؟

۲۰ - به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = x^2 - (m-1)x + 4$ در بالای محور xها قرار می‌گیرد؟

۲۱- محور تقارن سهمی $y = x^{۲} + ۴x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (۲-) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور xها ایجاد می‌کند، کدام است؟

۲۲- بیشترین مقدار y در عبارت $y + x^{۲} = ۳x - ۲$ کدام است؟

۲۳- اگر نمودار f با ضابطه‌ی $f(x) = x^{۲} - ۳x + ۲m - ۵$ خط $y = ۱$ را دقیقاً در یک نقطه قطع کند، مقدار m کدام است؟

۲۴- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$، محور xها را در نقاطی به طول‌های صفر و ۲ قطع می‌کند. اگر عرض ماکسیمم این تابع برابر ۳ باشد a کدام است؟

۲۵- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^{۲} - ۲x - ۸$ را حداقل چند واحد به سمت راست منتقل کنیم تا هر دو نقطه‌ی تلاقی آن با محور طول‌ها، در x های نامنفی باشد؟

۲۶ - منحنی نمودار تابع $y = ۲x^{۲} + bx + ۶$ بر قسمت مثبت محور xها، مماس است. مقدار b کدام است؟

۲۷ - حاصل جمع دو عدد برابر ۲۰ است. ماکسیمم حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟

۲۸ - محور تقارن نمودار تابع $y = (x-۱)(x-۳) - x$ کدام خط است؟

۲۹ - معادله‌ی سهمی که محور طول‌ها را در ۵ و ۲− و محور عرض‌ها را در ۱− قطع کند کدام است؟

۳۰ - معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن دو برابر معکوس ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲} - ۳x + ۱ = ۰$ است، کدام است؟

۳۱ - به ازای کدام مقادیر m، هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (m-۱)x^{۲} + m + ۲mx$ در زیر محور xها قرار دارد؟

۳۲ - به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - mx + m = 0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

۳۳ - به ازای کدام مقدار m، مجموع معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - x - m = 0$ برابر ۴ است؟

۳۴ - به ازای کدام مقدار m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - m - x = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

۳۵ - در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 7x - 5 = 0$ مجموعات مربعات ریشه‌ها کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی را می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله داده شده باشد و سپس معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌هایش یک واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی نوشته شده باشد. برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله‌ی داده شده‌ای باشد باید b را در k و c را در k^2 ضرب کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$2x^2-5x+1=0 \xrightarrow[c \text{ در } 2^2]{b \text{ در } 2} 2x^2-10x+4=0 \xrightarrow{x\to x+1} 2(x+1)^2-10(x+1)+4=0$$

$$\to 2x^2+4x+2-10x-10+4=0 \to 2x^2-6x-4=0 \to x^2-3x-2=0$$

۲ - گزینه ۳

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{در معادله } f(x) \text{ صدق می‌کند.}} f(0)=-2 \to a(0)^2+b(0)+c=-2 \to \boxed{c=-2}$$

رأس سهمی $x_S=-\frac{b}{2a} \to 1=-\frac{b}{2a} \to b=-2a \quad (1)$

$$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{در معادله } f(x) \text{ صدق می‌کند.}} f(1)=-1 \to a(1)^2+b(1)+c=-1 \to a+b-2=-1 \to a+b=1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \begin{cases} b=-2a \\ a+b=1 \end{cases} \to a-2a=1 \to -a=1 \to \boxed{a=-1}, \boxed{b=2}$$

$$\to f(x)=-x^2+2x-2$$

۳ - گزینه ۳ معادله را به صورت $2x^2+(m-1)x-1=0$ مرتب می‌کنیم.

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{1-m}{2} \quad , \quad x'x''=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$$

$$x'^2+x''^2=\frac{13}{4} \to (x'+x'')^2-2x'x''=\frac{13}{4} \to \frac{(1-m)^2}{4}+1=\frac{13}{4}$$

$$\to \frac{(1-m)^2}{4}=\frac{9}{4} \to (1-m)^2=9 \to \begin{cases} 1-m=3 \to m=-2 \\ 1-m=-3 \to m=4 \end{cases}$$

چون $\frac{c}{a}$ منفی است دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم همواره مثبت است و هر دو جواب قابل قبول هستند.

۴ - گزینه ۳

$$\frac{x}{x-2}-\frac{x+1}{(x+2)(x-2)}=\frac{x}{x+2}$$

دو طرف معادله را در $(x+2)(x-2)$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\to x(x+2)-(x+1)=x(x-2) \to x^2+2x-x-1=x^2-2x \to 3x=1 \to x=\frac{1}{3} \to k=\frac{1}{3}$$

معادله: $2x^2-15(\frac{1}{3})x-1=0 \to 2x^2-5x-1=0 \to$ مجموع جواب‌ها : $S=-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$

۵ - گزینه ۴ کافی است جای a و c را عوض کنیم.

$$3x^2-5x-4=0 \to -4x^2-5x+3=0 \to 4x^2+5x-3=0$$

ریشه‌های دو معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ و $cx^2+bx+a=0$ معکوس یکدیگرند.

۶ - گزینه ۳

چون تابع درجه‌ی دوم محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۳ و ۱− قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $f(x)=k(x+1)(x-3)$ نوشت.

سهمی از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ می‌گذرد پس این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 2=k(1)(-3) \to k=-\frac{2}{3} \to f(x)=-\frac{2}{3}(x+1)(x-3)$$

طول رأس سهمی حتماً وسط -۱ و ۳ قرار دارد پس حتماً طول رأس سهمی برابر یک می‌باشد.

$$x_A=۱\xrightarrow{\text{صدق در معادله‌ی سهمی}} y=-\frac{۲}{۳}(۲)(-۲)=\frac{۸}{۳}\to A\left|\begin{matrix}۱:\alpha\\ \frac{۸}{۳}:\beta\end{matrix}\right.\to\alpha\beta=\frac{۸}{۳}$$

۷ - گزینه ۳ باید معادله‌ی $۲x^۲+ax+a-\frac{۳}{۲}=۰$، دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد تا نمودار تابع $y=۲x^۲+ax+a-\frac{۳}{۲}$، محور xها را در طرفین محور yها قطع کند. برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد، لازم و کافی است که $\frac{c}{a}<۰$، پس:

$$\frac{a-\frac{۳}{۲}}{۲}<۰\Rightarrow a-\frac{۳}{۲}<۰\Rightarrow a<\frac{۳}{۲}$$

۸ - گزینه ۲ چون تابع درجه‌ی دوم محور طول‌ها را در $x=۳$ و $x=-۲$ قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y=a(x+۲)(x-۳)$ نشان داد و چون این تابع از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۰\\-۵\end{matrix}\right.$ می‌گذرد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۰\\-۵\end{matrix}\right.\to-۵=a(۲)(-۳)\Rightarrow-۵=-۶a\Rightarrow a=\frac{۵}{۶}$$
$$y=\frac{۵}{۶}(x+۲)(x-۳)=\frac{۵}{۶}(x^۲-x-۶)=\frac{۵}{۶}x^۲-\frac{۵}{۶}x-۵$$
$$\Rightarrow a=\frac{۵}{۶}\,,\ b=-\frac{۵}{۶}\,,\ c=-۵\to a+b+c=-۵$$

۹ - گزینه ۱ معادله‌ی $x^۲+۴x-۱=۰$ مفروض است، می‌خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسیم که ریشه‌هایش نصف ریشه‌های این معادله باشند. اگر y ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه ی معادله‌ی قدیم باشد داریم:

$$y=\frac{x}{۲}\to x=۲y\xrightarrow{\text{معادله}}(۲y)^۲+۴(۲y)-۱=۰\to۴y^۲+۸y-۱=۰\to۴x^۲+۸x-۱=۰$$

که اگر این معادله را با $۴x^۲+۸x+m-۱=۰$ مقایسه کنیم داریم:

$$m-۱=-۱\to m=۰$$

۱۰ - گزینه ۴ نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}-۱\\۱\end{matrix}\right.$ روی تابع قرار دارد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}-۱\\۱\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}۱=a-b+c\Rightarrow۱=-۳+c\Rightarrow c=۴$$
$$\text{طول رأس سهمی}=۱\to\frac{-b}{۲a}=۱\Rightarrow۲a+b=۰\xrightarrow{a-b=-۳}a=-۱\,,\ b=۲$$
$$f(x)=-x^۲+۲x+۴\Rightarrow f(۱)=-۱+۲+۴=۵$$

۱۱ - گزینه ۱

$$x'x''=۲(x'+x'')\to\frac{c}{a}=۲(-\frac{b}{a})\to c=-۲b\to k+۴=-۲k-۲$$
$$\to۳k=-۶\to k=-۲\to f(x)=-۲x^۲-۴x+۱$$

چون ضریب درجه‌ی دوم، منفی است تابع دارای Max است و Max تابع همان عرض نقطه‌ی S است.

$$\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(-۲)(۱)-۱۶}{۴(-۲)}=\frac{-۲۴}{-۸}=۳$$

۱۲ - گزینه ۲

دقت کنید که $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۷$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$ می‌باشند.

$$\alpha\beta^{-۲}+\beta\alpha^{-۲}=\frac{\alpha}{\beta^۲}+\frac{\beta}{\alpha^۲}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۲}$$
$$=\frac{۳۴۳-۳(-۱)(۷)}{(-۱)^۲}=۳۴۳+۲۱=۳۶۴$$

۱۳ - گزینه ۴

می‌دانیم $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۱}=۲$ و $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۵$ است.

$$A=(\alpha+\frac{۲}{\beta})^۲+(\beta+\frac{۲}{\alpha})^۲=(\frac{\alpha\beta+۲}{\beta})^۲+(\frac{\alpha\beta+۲}{\alpha})^۲$$
$$\Rightarrow A=(\frac{۲+۲}{\beta})^۲+(\frac{۲+۲}{\alpha})^۲=\frac{۱۶}{\beta^۲}+\frac{۱۶}{\alpha^۲}=\frac{۱۶(\alpha^۲+\beta^۲)}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{۱۶((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{۱۶(۲۵-۴)}{۴}=۸۴$$

۱۴ - گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دوم را به صورت $ax^۲+۵x+a^۲-۶=۰$ می‌نویسیم (ریشه‌های معادله‌ی داده شده را α,β در نظر می‌گیریم)

$$\text{فرض مسأله}:\alpha=\frac{۱}{\beta}\to\alpha\beta=۱\to\frac{c}{a}=۱\to\frac{a^۲-۶}{a}=۱\to a^۲-a-۶=۰$$

$$\Rightarrow (a-۳)(a+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۳ \xrightarrow{\text{معادله}} ۳x^۲+۵x+۳=۰ \Rightarrow \Delta<۰ \ : \ \text{غ ق ق} \\ a=-۲ \xrightarrow{\text{معادله}} -۲x^۲+۵x-۲=۰ \Rightarrow \Delta>۰ \ : \ \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\text{تفاضل ریشه‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{۲۵-۱۶}}{|-۲|}=\frac{۳}{۲}$$

۱۵ - گزینه ۳ ضابطه‌ی یک تابع درجه‌ی دوم که محور xها را در نقاط $x_۱$ و $x_۲$ قطع می‌کند را می‌توان به صورت $f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ نشان داد. پس ضابطه‌ی این تابع را می‌توان به صورت $f(x)=a(x-۳)(x+۲)$ نشان داد و چون تابع، محور عرض را در نقطه‌ای به عرض یک قطع می‌کند پس نقطه‌ی $|^{۰}_{۱}$ در تابع صدق می‌کند.

$$|^{۰}_{۱} \xrightarrow{\text{صدق}} ۱=a(-۳)(۲) \to a=-\frac{۱}{۶}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم به این صورت است.

$$f(x)=-\frac{۱}{۶}(x-۳)(x+۲) \to f(۱)=-\frac{۱}{۶}(-۲)(۳)=۱$$

۱۶ - گزینه ۱ روش اول: توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^۲+bx+a=۰$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bkx+ck^۲=۰$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می باشند.

$$x^۲-۳x+۱=۰ \xrightarrow[\text{(جای } c,a \text{ عوض شود)}]{\text{معکوس}} x^۲-۳x+۱=۰ \xrightarrow{\text{برابر (ط) ۳ (b) ۳ضرب شود}} x^۲-۹x+۹=۰$$

روش دوم: اگر Y را ریشه‌ی جدید بنامیم داریم: $Y=\frac{۳}{x}$ که از آن $x=\frac{۳}{Y}$ حاصل می‌شود.

$$\xrightarrow{\text{معادله}} (\frac{۳}{Y})^۲-۳(\frac{۳}{Y})+۱=۰ \to \frac{۹}{Y^۲}-\frac{۹}{Y}+۱=۰ \xrightarrow{\times Y^۲} \to ۹-۹Y+Y^۲=۰ \to Y^۲-۹Y+۹=۰$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۲\ ,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

$$\underbrace{\alpha^۲+\beta^۲}+\underbrace{\alpha^۳+\beta^۳}=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۴+۲+۸+۶=۲۰$$

۱۸ - گزینه ۲ چون شکل دارای Max است پس ضریب $x^۲$ باید منفی باشد بنابراین گزینه‌های اول و سوم حذف می‌شوند و چون طول رأس سهمی مثبت است باید $\frac{-b}{۲a}$ مثبت باشد بنابراین گزینه‌ی چهارم نیز حذف می‌شود.

۱۹ - گزینه ۱

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۲\ ,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

$$\alpha\beta^۳+\beta\alpha^۳=\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)=\alpha\beta((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)=-۱(۴-۲(-۱))=-۶$$

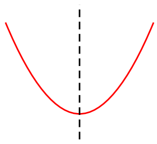
۲۰ - گزینه ۱ شرط آنکه تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد آن است که $a>۰$ و $\Delta<۰$ باشد. بنابراین:

$I): a>۰ \to ۱>۰$ همواره برقرار است

$$II):\ \Delta<۰ \to b^۲-۴ac<۰ \to (-(m-۱))^۲-۱۶<۰ \to (m-۱)^۲<۱۶$$

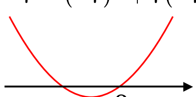
$$\to -۴<m-۱<۴ \to -۳<m<۵$$

۲۱ - گزینه ۳



مطابق شکل مقابل محور تقارن یک سهمی، سهمی را در نقطه‌ی رأس سهمی قطع می‌کند. از آنجا که $x=-\frac{b}{۲a}=-۲$ محور تقارن سهمی است و سهمی را در نقطه‌ای به عرض $y=-۲$ قطع کرده، بنابراین نقطه‌ی $(-۲\ ,\ -۲)$ روی منحنی است، در نتیجه در تابع صدق می‌کند.

$$-۲=(-۲)^۲+۴(-۲)+k \Rightarrow k=۲$$



پس معادله‌ی تابع به صورت $y=x^۲+۴x+۲$ است. همچنین با توجه به شکل مقابل، طول پاره‌خطی که منحنی روی محور xها ایجاد می‌کند برابر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های تابع است. یعنی:

$$\text{طول پاره‌خط}=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۱۶-۴(۲)}}{|۱|}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۲۲ - گزینه ۳ تابع داده شده به صورت $y=-x^۲+۳x-۲$ می‌باشد و بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، عرض رأس سهمی (نقطهٔ S) می‌باشد.

$$y_S=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(-۱)(-۲)-۳^۲}{۴(-۱)}=\frac{۸-۹}{-۴}=\frac{۱}{۴}$$

۲۳ - گزینه ۱

با توجه به این که خط $y=۱$ (خطی افقی) نمودار سهمی را در تنها در یک نقطه قطع می‌کند، می‌توان دریافت عرض رأس سهمی برابر ۱ است (به شکل زیر دقت کنید).

۲۴ - گزینه ۲ چون طول نقاط برخورد تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ با محور xها، $x_{۱}=۰$ و $x_{۲}=۲$ است، لذا ضابطه‌ی این تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x-x_{۱})(x-x_{۲})=a(x-۰)(x-۲)$$

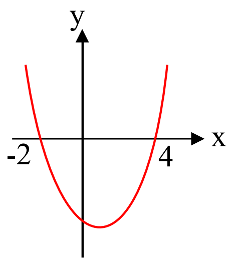
حال چون عرض نقطه‌ی ماکسیمم تابع f برابر ۳ است و از طرفی طول آن وسط $x_{۱}=۰$ و $x_{۲}=۲$ می‌باشد، لذا نقطه‌ی ماکسیمم به مختصات $(۱,۳)$ خواهد بود. پس داریم:

$$Max(۱,۳)\in f\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}۳=a(۱-۰)(۱-۲)\Rightarrow a=-۳$$

۲۵ - گزینه ۲

$$y=x^{۲}-۲x-۸=(x-۴)(x+۲)$$

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نقاط تلاقی این منحنی با محور طول‌ها، $x=-۲$ و $x=۴$ است. برای اینکه نقاط تلاقی در xهای نامنفی باشد، باید نمودار را حداقل ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم.

۲۶ - گزینه ۱ معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ با شرط $\Delta=۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف است و مقدار این ریشه (طول نقطه‌ی تماس) برابر $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

معادله‌ی $y=۰$ باید ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشد:

$$۲x^{۲}+bx+۶=۰\xrightarrow{\Delta=۰}b^{۲}-۴(۲)(۶)=۰\Rightarrow b^{۲}=۴۸\Rightarrow b=\pm۴\sqrt{۳}$$

باید $\frac{-b}{۲a}>۰$ باشد یعنی $\frac{-b}{۴}>۰$ پس $b=-۴\sqrt{۳}$.

۲۷ - گزینه ۴

دو عدد مورد نظر را x و y می نامیم پس $x+y=۲۰$ و ما بیشترین مقدار xy را می خواهیم:

$$x+y=۲۰\to y=۲۰-x\to xy=x(۲۰-x)=-x^{۲}+۲۰x$$

با توجه به این‌که $xy=-x^{۲}+۲۰x$، پس کافی است بیش‌ترین مقدار عبارت $f(x)=-x^{۲}+۲۰x$ را بیابیم که برابر است با:

$$\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۰-۴۰۰}{-۴}=۱۰۰$$

۲۸ - گزینه ۲ این تابع به شکل $y=x^{۲}-۴x+۳-x=x^{۲}-۵x+۳$ در می‌آید و معادله‌ی محور تقارن آن $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۵}{۲}$ است.

۲۹ - گزینه ۱ با توجه به صورت مسئله،اگر به y صفر دهیم باید دو جواب $x=-۲\ \ ,\ \ x=۵$ به دست آید و اگر به x، صفر دهیم y باید (-۱) شود که این شرایط فقط در گزینه‌ی اول صدق می‌کند.

۳۰ - گزینه ۲ روش اول: ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده باشد سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده باشد.

$$x^{۲}-۳x+۱=۰\xrightarrow[\text{جای } c,a \text{ عوض}]{\text{معکوس}}x^{۲}-۳x+۱=۰\xrightarrow[\substack{b \text{ در } ۲\\ c \text{ در } ۲^{۲}}]{\text{دو برابر}}x^{۲}-۶x+۴=۰$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^{۲}+bx+a=۰$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^{۲}+bkx+ck^{۲}=۰$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ می باشند.

روش دوم: اگر y ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم قدیم باشد داریم:

$$y=\frac{۲}{x}\to x=\frac{۲}{y}\xrightarrow{\text{معادله}}\frac{۴}{y^{۲}}-\frac{۶}{y}+۱=۰\to ۴-۶y+y^{۲}=۰\to y^{۲}-۶y+۴=۰$$

۳۱ - گزینه ۲ شرط انکه عبارت درجه دوم منفی باشد آن است که $a<۰$ و $\Delta<۰$ باشد.

$$(m-۱)x^{۲}+۲mx+m<۰$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a<۰\Rightarrow m-۱<۰\Rightarrow m<۱\\ \Delta<۰\Rightarrow(۲m)^{۲}-۴(m-۱)m<۰\Rightarrow۴m^{۲}-۴m^{۲}+۴m<۰\Rightarrow m<۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}m<۰$$

۳۲ - گزینه ۳ باید $\Delta<۰$ باشد:

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=m^{۲}-۴(۱)(m)=m^{۲}-۴m<۰$$

حال عبارت $m^{۲}-۴m$ را تعیین علامت کرده و نواحی مورد نظر را مشخص می‌کنیم:

m	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$m^{۲}-۴m<۰$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow ۰<m<۴$

۳۳ - گزینه ۳

$$x_{۱}+x_{۲}=-\frac{b}{a}=۱\ \ ,\ \ x_{۱}x_{۲}=\frac{c}{a}=-m$$

$$\text{مجموع معکوس ریشه ها}=\frac{۱}{x_{۱}}+\frac{۱}{x_{۲}}=\frac{x_{۲}+x_{۱}}{x_{۱}\cdot x_{۲}}=\frac{۱}{-m}\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}۴\Rightarrow m=-\frac{۱}{۴}$$

۳۵ - گزینه ۱

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = ۷ \quad , \quad x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} = -۵$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ = S^۲ - ۲P$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ = (x_۱ + x_۲)^۲ - ۲x_۱ x_۲ = ۷^۲ - ۲(-۵) = ۴۹ + ۱۰ = ۵۹$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۳	۱۱ - ۱	۱۶ - ۱	۲۱ - ۳	۲۶ - ۱	۳۱ - ۲
۲ - ۳	۷ - ۳	۱۲ - ۲	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۴	۳۲ - ۳
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۴	۱۸ - ۲	۲۳ - ۱	۲۸ - ۲	۳۳ - ۳
۴ - ۳	۹ - ۱	۱۴ - ۱	۱۹ - ۱	۲۴ - ۲	۲۹ - ۱	۳۴ - ۲
۵ - ۴	۱۰ - ۴	۱۵ - ۳	۲۰ - ۱	۲۵ - ۲	۳۰ - ۲	۳۵ - ۱