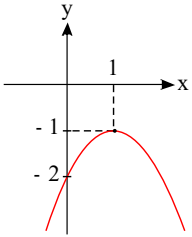
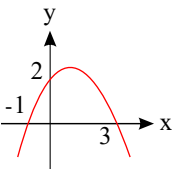


علی هاشمی

۱- ضابطه سهمی مربوط به شکل زیر کدام است؟

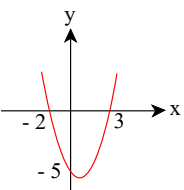


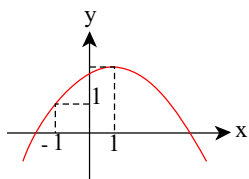
۲- اگر $x = k$ جواب معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$ باشد، مجموع جواب‌های معادله $2x^2 - 15kx - 1 = 0$ کدام است؟



۳- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل بوده و مختصات رأس سهمی $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ است. $\alpha\beta$ کدام است؟

۴- شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟





۵- در سهمی شکل مقابل به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، اگر $a - b = -3$ آنگاه $f(1)$ کدام است؟

۶- در معادله درجه‌ی دوم $x^2 + (k+1)x + k + 4 = 0$ ، اگر حاصل ضرب ریشه‌ها ۲ برابر مجموع ریشه‌ها باشد، آنگاه تابع $f(x) = kx^2 - 4x + 1$ چگونه است؟

۷- اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^{-2} + \beta\alpha^{-2}$ کدام است؟

۸- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل $A = \left(\alpha + \frac{2}{\beta}\right)^2 + \left(\beta + \frac{2}{\alpha}\right)^2$ کدام است؟

۹- ریشه‌های حقیقی معادله $ax^2 + 5x + a^2 = 6$ معکوس یکدیگرند. اختلاف این دو ریشه کدام است؟

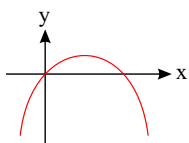


۱۰- تابع درجه‌ی دوم f ، محور طول‌ها را در ۳ و ۲- و محور عرض‌ها را در ۱ قطع می‌کند. مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱۱- معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن ۳ برابر معکوس ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد، کدام است؟

۱۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \alpha^3 + \beta^2 + \beta^3$ کدام است؟

۱۳- کدام گزینه می‌تواند ضابطه‌ی تابع زیر باشد؟



۱۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^3 + \beta\alpha^3$ کدام است؟

۱۵- به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = x^2 - (m - 1)x + 4$ در بالای محور x ‌ها قرار می‌گیرد؟



۱۶- محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (-2) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور x ‌ها ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱۷- بیشترین مقدار y در عبارت $y + x^2 = 3x - 2$ کدام است؟

۱۸- اگر نمودار f با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 3x + 2m - 5$ خط $y = 1$ را دقیقاً در یک نقطه قطع کند، مقدار m کدام است؟

۱۹- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور x ‌ها را در نقاطی به طول‌های صفر و ۲ قطع می‌کند. اگر عرض ماکسیمم این تابع برابر ۳ باشد a کدام است؟

۲۰- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 - 2x - 8$ را حداقل چند واحد به سمت راست منتقل کنیم تا هر دو نقطه‌ی تلاقی آن با محور طول‌ها، در x ‌های نامنفی باشد؟



۲۱- منحنی نمودار تابع $y = 2x^2 + bx + 6$ بر قسمت مثبت محور x ها، مماس است. مقدار b کدام است؟

۲۲- حاصل جمع دو عدد برابر ۲۰ است. ماکسیمم حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟

۲۳- محور تقارن نمودار تابع $y = (x - 1)(x - 3) - x$ کدام خط است؟

۲۴- معادله‌ی سهمی که محور طول‌ها را در ۵ و ۲- و محور عرض‌ها را در ۱- قطع کند کدام است؟

۲۵- معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن دو برابر معکوس ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ است، کدام است؟

۲۶- به ازای کدام مقادیر m ، هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (m - 1)x^2 + m + 2mx$ در زیر محور x ها قرار دارد؟



۲۷- به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - mx + m = 0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

۲۸- به ازای کدام مقدار m ، مجموع معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - x - m = 0$ برابر ۴ است؟

۲۹- به ازای کدام مقدار m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - m - x = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

۳۰- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 7x - 5 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌ها کدام است؟

۳۱- ریشه‌های کدام معادله از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟



۳۲- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + (m-1)x = 1$ برابر $\frac{13}{4}$ است؟

۳۳- جواب‌های کدام معادله، معکوس ریشه‌های معادله $3x^2 - 5x - 4 = 0$ است؟

۳۴- در صورتی که منحنی تابع $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2}$ ، محور x ها را در طرفین محور y ها قطع کند، آنگاه حدود تغییرات a چگونه است؟

۳۵- اگر ریشه‌های معادله $x^2 + 8x + m - 1 = 0$ نصف ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ باشند، کدام m است؟



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

در معادله $f(x)$ صدق می‌کند.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow f(0) = -2 \rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = -2 \rightarrow \boxed{c = -2}$$

$$x_S \text{ رأس سهمی} = -\frac{b}{2a} \rightarrow 1 = -\frac{b}{2a} \rightarrow b = -2a \quad (1)$$

در معادله $f(x)$ صدق می‌کند.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow f(1) = -1 \rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = -1 \rightarrow a + b - 2 = -1 \rightarrow a + b = 1 \quad (2)$$

$$\begin{matrix} (2), (1) \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} b = -2a \\ a + b = 1 \end{cases} \rightarrow a - 2a = 1 \rightarrow -a = 1 \rightarrow \boxed{a = -1}, \boxed{b = 2}$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 2x - 2$$

۲ - گزینه ۳

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} = \frac{x}{x+2}$$

دو طرف معادله را در $(x+2)(x-2)$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\rightarrow x(x+2) - (x+1) = x(x-2) \rightarrow x^2 + 2x - x - 1 = x^2 - 2x \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\text{معادله: } 2x^2 - 15\left(\frac{1}{3}\right)x - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 - 5x - 1 = 0 \rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} : S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$$

۳ - گزینه ۳

چون تابع درجه‌ی دوم محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۳ و ۱- قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $f(x) = k(x+1)(x-3)$ نوشت.

سه‌می از نقطه‌ی $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ می‌گذرد پس این نقطه در معادله‌ی سه‌می صدق می‌کند.

صدق

$$\begin{matrix} \circ \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \rightarrow 0 = k(1)(-3) \rightarrow k = -\frac{2}{3} \rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}(x+1)(x-3)$$

طول رأس سهمی حتماً وسط ۱- و ۳ قرار دارد پس حتماً طول رأس سهمی برابر یک می‌باشد.

صدق در معادله‌ی سه‌می

$$x_A = 1 \rightarrow y = -\frac{2}{3}(2)(-2) = \frac{8}{3} \rightarrow A \begin{cases} 1 : \alpha \\ \frac{8}{3} : \beta \end{cases} \rightarrow \alpha\beta = \frac{8}{3}$$

۴ - گزینه ۲ چون تابع درجه‌ی دوم محور طول‌ها را در $x = 3$ و $x = -2$ قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y = a(x+2)(x-3)$ نشان داد و چون این تابع از نقطه‌ی $\left(-\frac{5}{6}, 0\right)$ می‌گذرد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{matrix} \circ \\ -\frac{5}{6} \end{matrix} \rightarrow -\frac{5}{6} = a(2)(-3) \Rightarrow -\frac{5}{6} = -6a \Rightarrow a = \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{5}{6}(x+2)(x-3) = \frac{5}{6}(x^2 - x - 6) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 5$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{6}, b = -\frac{5}{6}, c = -5 \rightarrow a + b + c = -5$$

۵ - گزینه ۴ نقطه‌ی $\left(1, -1\right)$ روی تابع قرار دارد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

صدق

$$\begin{matrix} \circ \\ 1 \end{matrix} \rightarrow 1 = a - b + c \Rightarrow 1 = -3 + c \Rightarrow c = 4$$

$$\text{طول رأس سهمی} = 1 \rightarrow \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow 2a + b = 0 \xrightarrow{a-b=-3} a = -1, b = 2$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4 \Rightarrow f(1) = -1 + 2 + 4 = 5$$



$$x'x'' = 2(x' + x'') \rightarrow \frac{c}{a} = 2\left(-\frac{b}{a}\right) \rightarrow c = -2b \rightarrow k + 4 = -2k - 2$$

$$\rightarrow 3k = -6 \rightarrow k = -2 \rightarrow f(x) = -2x^2 - 4x + 1$$

چون ضریب درجه‌ی دوم، منفی است تابع دارای Max است و Max تابع همان عرض نقطه‌ی S است.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(1) - 16}{4(-2)} = \frac{-24}{-8} = 3$$

۷ - گزینه ۲

دقت کنید که $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$ و $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 7$ می‌باشند.

$$\alpha\beta^{-2} + \beta\alpha^{-2} = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{343 - 3(-1)(7)}{(-1)^2} = 343 + 21 = 364$$

۸ - گزینه ۴

می‌دانیم $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$ و $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5$ است.

$$A = \left(\alpha + \frac{2}{\beta}\right)^2 + \left(\beta + \frac{2}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\beta + 2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\beta + 2}{\alpha}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{2+2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2+2}{\alpha}\right)^2 = \frac{16}{\beta^2} + \frac{16}{\alpha^2} = \frac{16(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha\beta)^2} = \frac{16((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^2} = \frac{16(25 - 4)}{4} = 84$$

۹ - گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دوم را به صورت $ax^2 + 5x + a^2 - 6 = 0$ می‌نویسیم (ریشه‌های معادله‌ی داده شده را α, β در نظر می‌گیریم)

مسئله فرض $\alpha = \frac{1}{\beta} \rightarrow \alpha\beta = 1 \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{a^2 - 6}{a} = 1 \rightarrow a^2 - a - 6 = 0$

$$\Rightarrow (a - 3)(a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \\ a = -2 \xrightarrow{\text{معادله}} -2x^2 + 5x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \end{cases}$$

تفاضل ریشه‌ها $= \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{25 - 16}}{|-2|} = \frac{3}{2}$

۱۰ - گزینه ۳ ضابطه‌ی یک تابع درجه‌ی دوم که محور x ها را در نقاط x_1 و x_2 قطع می‌کند را می‌توان به صورت $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ نشان داد. پس ضابطه‌ی این تابع را می‌توان به صورت $f(x) = a(x - 3)(x + 2)$ نشان داد و چون تابع، محور عرض را در نقطه‌ای به عرض یک قطع می‌کند پس نقطه‌ی $|_1^0$ در تابع صدق می‌کند.

صدق $|_1^0 \rightarrow 1 = a(-3)(2) \rightarrow a = -\frac{1}{6}$

بنابراین ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم به این صورت است.

$$f(x) = -\frac{1}{6}(x - 3)(x + 2) \rightarrow f(1) = -\frac{1}{6}(-2)(3) = 1$$

۱۱ - گزینه ۱ روش اول: توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^2 + bx + a = 0$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bckx + ck^2 = 0$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشند.

$x^2 - 3x + 1 = 0$ $\xrightarrow{\text{برابر (فر } 3 \text{ در } 3 \text{ ضرب شود)}} x^2 - 3x + 1 = 0$ $\xrightarrow{\text{معکوس (جای } c, a \text{ عوض شود)}} x^2 - 3x + 1 = 0$

روش دوم: اگر Y را ریشه‌ی جدید بنامیم داریم: $Y = \frac{3}{x}$ که از آن $x = \frac{3}{Y}$ حاصل می‌شود.

$$\xrightarrow{\text{مغزله}} \left(\frac{3}{Y}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{Y}\right) + 1 = 0 \rightarrow \frac{9}{Y^2} - \frac{9}{Y} + 1 = 0 \xrightarrow{\times Y^2} 9 - 9Y + Y^2 = 0 \rightarrow Y^2 - 9Y + 9 = 0$$

۱۲ - گزینه ۲

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4 + 2 + 8 + 6 = 20$$

۱۳ - گزینه ۲ چون شکل دارای Max است پس ضریب x^2 باید منفی باشد بنابراین گزینه‌های اول و سوم حذف می‌شوند و چون طول رأس سهمی مثبت است باید $\frac{-b}{2a}$ مثبت باشد بنابراین

گزینه‌ی چهارم نیز حذف می‌شود.

۱۴ - گزینه ۱

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$



$$\alpha\beta^3 + \beta\alpha^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha\beta((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = -1(4 - 2(-1)) = -6$$

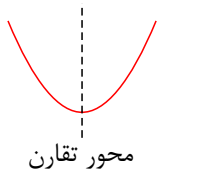
۱۵ - گزینه ۱ شرط آنکه تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد آن است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد. بنابراین:

I): $a > 0 \rightarrow 1 > 0$ همواره برقرار است

II): $\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow (-2)^2 - 4(1)(m-1) < 0 \rightarrow (m-1)^2 < 16$

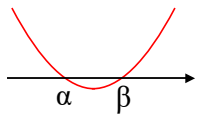
$\rightarrow -4 < m-1 < 4 \rightarrow -3 < m < 5$

۱۶ - گزینه ۳



مطابق شکل مقابل محور تقارن یک سهمی، سهمی را در نقطه‌ی رأس سهمی قطع می‌کند. از آنجا که $x = -\frac{b}{2a} = -2$ از آنجا که $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است و سهمی را در نقطه‌ی $y = -2$ قطع کرده، بنابراین نقطه‌ی $(-2, -2)$ روی منحنی است، در نتیجه در تابع صدق می‌کند.

$-2 = (-2)^2 + 4(-2) + k \Rightarrow k = 2$



پس معادله‌ی تابع به صورت $y = x^2 + 4x + 2$ است. همچنین با توجه به شکل مقابل، طول پاره‌خطی که منحنی روی محور x ایجاد می‌کند برابر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های تابع است. یعنی:

$$\text{طول پاره‌خط} = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16 - 4(2)}}{|1|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

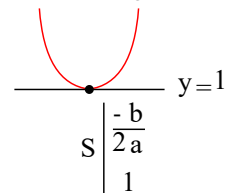
۱۷ - گزینه ۳ تابع داده شده به صورت $y = -x^2 + 3x - 2$ می‌باشد و بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، عرض رأس سهمی (نقطه S) می‌باشد.

$$y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-2) - 3^2}{4(-1)} = \frac{8 - 9}{-4} = \frac{1}{4}$$

۱۸ - گزینه ۱

با توجه به این که خط $y = 1$ (خطی افقی) نمودار سهمی را در تنها در یک نقطه قطع می‌کند، می‌توان دریافت عرض رأس سهمی برابر ۱ است (به شکل زیر دقت کنید).

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = 1 \rightarrow \frac{4m - 20 - 9}{4} = 1 \rightarrow 4m = 33 \rightarrow m = \frac{33}{4}$$



۱۹ - گزینه ۲ چون طول نقاط برخورد تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با محور x ها، $x_1 = 0$ و $x_2 = 2$ است، لذا ضابطه‌ی این تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - 0)(x - 2)$$

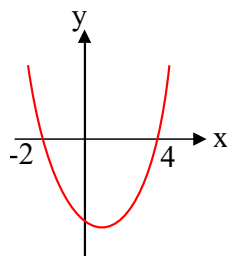
حال چون عرض نقطه‌ی ماکسیمم تابع f برابر ۳ است و از طرفی طول آن وسط $x_1 = 0$ و $x_2 = 2$ می‌باشد، لذا نقطه‌ی ماکسیمم به مختصات $(1, 3)$ خواهد بود. پس داریم:

$$\text{مصدق در تابع} \quad \text{Max}(1, 3) \in f \rightarrow 3 = a(1 - 0)(1 - 2) \Rightarrow a = -3$$

۲۰ - گزینه ۲

$$y = x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نقاط تلاقی این منحنی با محور طولها، $x = -2$ و $x = 4$ است. برای اینکه نقاط تلاقی در x های نامنفی باشد، باید نمودار را حداقل ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم.

۲۱ - گزینه ۱ معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است و مقدار این ریشه (طول نقطه‌ی تماس) برابر $x = -\frac{b}{2a}$ است.

معادله‌ی $y = 0$ باید ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشد:

$$2x^2 + bx + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} b^2 - 4(2)(6) = 0 \Rightarrow b^2 = 48 \Rightarrow b = \pm 4\sqrt{3}$$

باید $\frac{-b}{2a} > 0$ باشد یعنی $\frac{-b}{4} > 0$ پس $b = -4\sqrt{3}$.



دو عدد مورد نظر را x و y می نامیم پس $x + y = 20$ و ما بیشترین مقدار xy را می خواهیم:

$$x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x \rightarrow xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x$$

با توجه به این که $xy = -x^2 + 20x$ ، پس کافی است بیشترین مقدار عبارت $f(x) = -x^2 + 20x$ را بیابیم که برابر است با:

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{0 - 400}{-4} = 100$$

۲۳ - گزینه ۲ این تابع به شکل $y = x^2 - 4x + 3 - x = x^2 - 5x + 3$ در می آید و معادله‌ی محور تقارن آن $x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2}$ است.

۲۴ - گزینه ۱ با توجه به صورت مسئله، اگر به y صفر دهیم باید دو جواب $x = -2$ ، $x = 5$ به دست آید و اگر به x صفر دهیم y باید (-1) شود که این شرایط فقط در گزینه‌ی اول صدق می کند.

۲۵ - گزینه ۲ روش اول: ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی مینویسیم که ریشه‌های معکوس معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده باشد سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده باشد.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \xrightarrow[\text{جای } c, a \text{ عوض}]{\text{معکوس}} x^2 - 3x + 1 = 0 \xrightarrow[\text{۲ در } b]{\text{دو برابر}} x^2 - 6x + 4 = 0$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + b'kx + c'k^2 = 0$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می باشند.

روش دوم: اگر y ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم قدیم باشد داریم:

$$y = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{y} \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{4}{y^2} - \frac{6}{y} + 1 = 0 \rightarrow 4 - 6y + y^2 = 0 \rightarrow y^2 - 6y + 4 = 0$$

۲۶ - گزینه ۲ شرط آنکه عبارت درجه دوم منفی باشد آن است که $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

$$(m-1)x^2 + 2mx + m < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(m-1)m < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m^2 + 4m < 0 \Rightarrow m < 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m < 0$$

۲۷ - گزینه ۳ باید $\Delta < 0$ باشد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(1)(m) = m^2 - 4m < 0$$

حال عبارت $m^2 - 4m$ را تعیین علامت کرده و نواحی مورد نظر را مشخص می کنیم:

$$\frac{m}{m^2 - 4m < 0} \quad \begin{array}{c|ccc} -\infty & 0 & 4 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 0 < m < 4$$

۲۸ - گزینه ۳

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 1, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m$$

$$\text{مجموع معکوس ریشه ها} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{-m} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 4 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

۲۹ - گزینه ۲ زمانی یک معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف دارد که در آن $\Delta = 0$ باشد.

$$x^2 - x - m = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-m) = 1 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

۳۰ - گزینه ۱

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 7, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -5$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 7^2 - 2(-5) = 49 + 10 = 59$$

۳۱ - گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی را می نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله داده شده باشد و سپس معادله‌ای می نویسیم که ریشه‌هایش یک واحد کمتر از ریشه‌های معادله نوشته شده باشد. برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله داده شده‌ای باشد باید b در k و c در k^2 ضرب کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$2x^2 - 5x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{در } b} 2x^2 - 10x + 4 = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x+1} 2(x+1)^2 - 10(x+1) + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{در } c} 2x^2 + 4x + 2 - 10x - 10 + 4 = 0 \rightarrow 2x^2 - 6x - 4 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$$

۳۲ - گزینه ۳ معادله را به صورت $2x^2 + (m-1)x - 1 = 0$ مرتب می کنیم.



$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{1-m}{2}, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$x'^2 + x''^2 = \frac{13}{4} \rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{13}{4} \rightarrow \frac{(1-m)^2}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

$$\rightarrow \frac{(1-m)^2}{4} = \frac{9}{4} \rightarrow (1-m)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} 1-m=3 \rightarrow m=-2 \\ 1-m=-3 \rightarrow m=4 \end{cases}$$

چون $\frac{c}{a}$ منفی است دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم همواره مثبت است و هر دو جواب قابل قبول هستند.

۳۳ - گزینه ۴ کافی است جای a و c را عوض کنیم.

$$3x^2 - 5x - 4 = 0 \rightarrow -4x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow 4x^2 + 5x - 3 = 0$$

ریشه‌های دو معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ معکوس یکدیگرند.

۳۴ - گزینه ۳ باید معادله‌ی $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد تا نمودار تابع $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2}$ محور x ها را در طرفین محور y ها قطع کند. برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد، لازم و کافی است که $\frac{c}{a} < 0$ ، پس:

$$a - \frac{3}{2} < 0 \Rightarrow a - \frac{3}{2} < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

۳۵ - گزینه ۱ معادله‌ی $x^2 + 4x - 1 = 0$ مفروض است، می‌خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسیم که ریشه‌هایش نصف ریشه‌های این معادله باشند. اگر y ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی قدیم باشد داریم:

$$y = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2y \xrightarrow{\text{معادله}} (2y)^2 + 4(2y) - 1 = 0 \rightarrow 4y^2 + 8y - 1 = 0 \rightarrow 4x^2 + 8x - 1 = 0$$

که اگر این معادله را با $4x^2 + 8x + m - 1 = 0$ مقایسه کنیم داریم:

$$m - 1 = -1 \rightarrow m = 0$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۲ - ۳

۳ - ۳

۴ - ۲

۵ - ۴

۶ - ۱

۷ - ۲

۸ - ۴

۹ - ۱

۱۰ - ۳

۱۱ - ۱

۱۲ - ۲

۱۳ - ۲

۱۴ - ۱

۱۵ - ۱

۱۶ - ۳

۱۷ - ۳

۱۸ - ۱

۱۹ - ۲

۲۰ - ۲

۲۱ - ۱

۲۲ - ۴

۲۳ - ۲

۲۴ - ۱

۲۵ - ۲

۲۶ - ۲

۲۷ - ۳

۲۸ - ۳

۲۹ - ۲

۳۰ - ۱

۳۱ - ۲

۳۲ - ۳

۳۳ - ۴

۳۴ - ۳

۳۵ - ۱