علی هاشمی

۱ - نقطهٔ $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

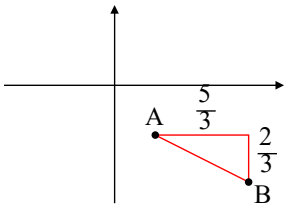
۲ - معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$ ، $y=۲x$ و $x=۱$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

۳ - دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

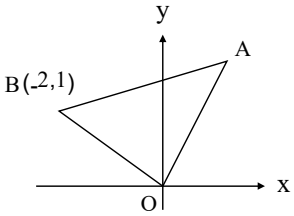
۴ - یک خط از دسته خطوط به معادلهٔ $(k+۱)y+۲kx-k+۱=۰$ بر خط گذرنده بر دو نقطهٔ $(۲,-۱)$ و $(۸,۳)$ عمود است، معادلهٔ آن خط کدام است؟

۵ - در مثلث با رئوس $A(۳,۲)$ ، $B(-۲,۱)$ و $C(-۱,۶)$، شیب ارتفاع CH کدام است؟

۶ - در شکل زیر شیب خطی که از دو نقطهٔ B, A می‌گذرد کدام است؟



۷ - نقطه‌ی A در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات و روی خط $y = ۲x$ قرار دارد. اگر مثلث OAB در رأس O متساوی‌الساقین باشد، عرض نقطه‌ی A چقدر است؟



۸ - نقاط $A(۲,۳)$، $B(-۱,۰)$ و $C(۱,-۲)$، سه رأس مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن کدام است؟

۹ - دو خط به معادله‌ی $my - x = -۷$ و $m^۳x + y = ۲$ بر دو ضلع مربع منطبق‌اند. در این صورت برای m چند جواب وجود دارد؟

۱۰ - اگر نقاط $A(۳,۴)$ و $B(-۱,۶)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، اندازهٔ مساحت مربع کدام است؟

۱۱ - قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۳,۲)$ نسبت به خط $y = x - ۳$ کدام است؟

۱۲ - معادلهٔ خطی که از محل برخورد دو خط $y = ۳x + ۱$ و $۲x + ۳y = ۱۴$ می‌گذرد و با نیم‌ساز ربع دوم و چهارم موازی است، کدام است؟

۱۳ - اگر $A(-۴,-۱)$ و $B(-۲,-۳)$ دو رأس غیرمجاور یک مربع باشند که مرکز آن روی خط $my + (m-۲)x = ۱$ قرار داشته باشد، مساحت مربع چند برابر m است؟

۱۴ - مجموع مقادیر m، به‌طوری که به‌ازای آن‌ها دو خط $mx + (m+۱)y = ۳$ و $(m^۲ - ۱)x + m(m+۲)y = ۴$ برهم عمود باشند، کدام است؟

۱۵ - به‌ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y + ۲x = ۰$ ، $۲y + ax + ۵ = ۰$ ، $y + ۳x = a$ همگی از یک نقطه می‌گذرند؟

۱۶ - عمودمنصف پاره‌خط AB که $A(-۲,۱)$ و $B(۲,۷)$ است، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱۷ - دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی $A(۱,۷)$ و $C(-۴,۱۹)$ هستند. در صورتی که زاویهٔ بین دو قطر مستطیل ۳۰° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱۸ - دو نقطه‌ی $A(-۴,۷)$ و $B(۱,۵)$ دو سر قطری از دایره هستند. معادله‌ی قطری از دایره که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟

۱۹ - اگر نقاط $A(۰,۱)$، $B(۱,۴)$ و $C(۳,۰)$ رئوس مثلث ABC باشند، با مشخص کردن طول اضلاع، نوع این مثلث کدام است؟

۲۰ - ضلع یک مثلث به مساحت ۶ بر خط به معادلهٔ $۲y+x=۳$ واقع و یک رأس آن نقطهٔ $(-۱,۰)$ است. اگر ضلع دیگر این مثلث بر محور xها منطبق باشد، طول میانهٔ وارد بر این ضلع چه‌قدر است؟

۲۱ - فاصله‌ی نقطه‌ی $(۱,۲)$ از خط $۲x+y=۶$ چند برابر فاصله‌ی این خط از خط $۲y=۱-۴x$ است؟

۲۲ - به ازای کدام مقدار k، سه خط به معادلات $۲x + y = ۵$ ، $x - ۲y = ۱$ و $x + y = k$ در یک نقطه متقاطع‌اند؟

۲۳ - دو نقطه روی خط $y = ۲x + ۱$ قرار دارند که از نیمساز ربع اول و سوم به فاصله‌ی $۴\sqrt{۲}$ هستند. طول این نقاط کدام است؟

۲۴ - اگر نقاط $A(۲,۵)$ ، $B(-۱,۲)$ و $C(۵,۱)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، معادله‌ی ضلع DC کدام است؟

۲۵ - نقاط $A(۱,۹)$ و $B(۱۱,-۱)$ مفروض‌اند. اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد، معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AM کدام است؟

۲۶ - در مثلثی معادله‌ی دو ضلع AB و AC به ترتیب $y + x = ۲$ و $۴x + ۳y = ۸$ است. مجموع مختصات راس A کدام است؟

۲۷ - دو نقطه بر خط $2x - y = 1$ قرار دارند که از خط $4x + 3y = 1$ به فاصله‌ی ۲ هستند. مجموع عرض این نقاط کدام است؟

۲۸ - مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات $y + x = 2$ و $2y - x = 4$ وضلع دیگر آن بر محور x قرار دارد کدام است؟

۲۹ - معادلهٔ خطی که به موازات نیمساز ناحیهٔ اول و سوم بوده و نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ قطع می‌کند کدام است؟

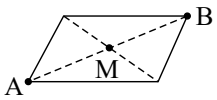
۳۰ - مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوطی به معادلات $y = x + 3$ و $x = 4$ و محور yها و نیمساز ناحیهٔ اول برابر کدام است؟

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

مختصات نقطهٔ A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطهٔ A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطهٔ B به دست آید.

$$\begin{matrix}۳\\-۲\end{matrix}\begin{cases}۲y-۳x=۱۱\\۳y+۴x=۸\end{cases}\rightarrow -۱۷x=۱۷\Rightarrow x=-۱\ ,\ y=۴\Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۱\\۴\end{matrix}\right.$$

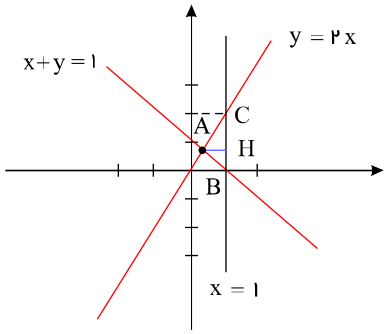


می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳\quad ,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵$$

۲ - گزینه ۱ سه خط داده‌شده را رسم می‌کنیم.

$$y=۲x\rightarrow\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.\ ,\ \left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.\quad \text{و}\quad x+y=۱\rightarrow\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.\ ,\ \left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.\rightarrow$$



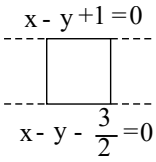
کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH است که معادله‌اش $y=\frac{۲}{۳}$ است، زیرا اگر با دو خط $x+y=۱$ و $y=۲x$ تشکیل دهیم، داریم:

$$\begin{cases}x+y=۱\\y=۲x\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=\frac{۲}{۳}$$

یعنی مختصات نقطهٔ A به‌صورت $A\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۳}\\\frac{۲}{۳}\end{matrix}\right.$ است، پس معادلهٔ ارتفاع AH به‌صورت $y=\frac{۲}{۳}$ است.

۳ - گزینه ۳

شیب هر دو خط یک است یعنی این دو خط موازی‌اند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصلهٔ بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.



(در محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادلهٔ خط باید یکسان باشند.)

$$\text{ضلع مربع}=d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱-(-\frac{۳}{۲})|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

$$S_{\text{مربع}}=(\text{ضلع})^۲=(\frac{۵}{۲\sqrt{۲}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطهٔ $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

۴ - گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۸\\۳\end{matrix}\right.$ را به دست می‌آوریم.

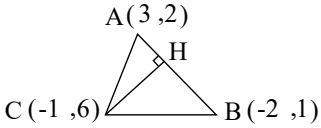
$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-۱-۳}{۲-۸}=\frac{-۴}{-۶}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{عمود}}m_{\text{دسته خط}}=-\frac{۳}{۲}$$

$$m_{\text{دسته خط}}=-\frac{۲k}{k+۱}=-\frac{۳}{۲}\to ۴k=۳k+۳\to k=۳$$

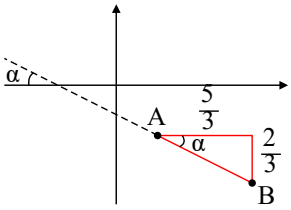
$$k=۳\xrightarrow[\text{معادله دسته خطوط}]{}۴y+۶x-۲=۰\xrightarrow{\div ۲}۲y+۳x=۱$$

۵ - گزینه ۴ ارتفاع CH از راس C بر ضلع AB عمود می‌شود. بنابراین شیب آن عکس و قرینه‌ی شیب AB است.

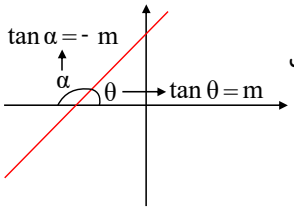
$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۲-۱}{۳-(-۲)}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow m_{CH}=\frac{-۱}{m_{AB}}=-۵$$



۶ - گزینه ۳



شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.



$$\text{پس}:\ \tan\alpha=-m=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۲}{۵}\to m=-\frac{۲}{۵}$$

۷ - گزینه ۲ نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲}$$

چون A روی خط $y=۲x$ است، پس مختصات آن به‌صورت $A(a,۲a)$ می‌باشد.

از طرفی طبق فرض مثلث OAB در رأس O متساوی‌الساقین است، پس $OB=OA$.

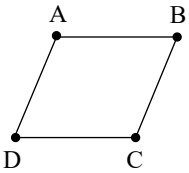
$$\begin{cases}OA=\sqrt{a^۲+(۲a)^۲}=\sqrt{۵a^۲}\\ OB=\sqrt{(-۲)^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}\end{cases}\xrightarrow{OA=OB}\sqrt{۵a^۲}=\sqrt{۵}\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow \boxed{a=\pm ۱}$$

چون A در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات قرار دارد، پس فقط $a=۱$ قابل قبول است، بنابراین:

$$A(۱,۲)\to y_A=۲a=۲\times ۱=۲$$

۸ - گزینه ۲ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ بین مختصات چهار رأس رابطه زیر را برقرار است.

$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$



کافیست مختصات رئوس مطرح شده را جایگذاری نماییم.

$$۲+۱=x_D+(-۱)\Rightarrow x_D=۴$$

$$\Rightarrow D(۴,۱)$$

$$۳+(-۲)=y_D+۰\Rightarrow y_D=۱$$

۹ - گزینه ۴ این دو خط ممکن دو ضلع موازی یا هر ضلع عمود بر هم باشند، لذا باید هر دو حالت را بررسی نماییم.

حالت اول: دو ضلع موازی باشند، در این حالت شیب دو خط برابر است. خطوط را به حالت استاندارد می‌نویسیم:

$$my-x=-۷\to y=\frac{۱}{m}x-\frac{۷}{m}\to m_۱=\frac{۱}{m}$$

$$m^۳x+y=۲\to y=-m^۳x+۲\to m_۲=-m^۳$$

شرط موازی بودن $\frac{۱}{m}=-m^۳\to m^۴=-۱$ غیر ممکن

پس دو ضلع موازی نیستند.

حالت دوم: دو خط بر هم عمود باشد که حاصلضرب با شیب‌ها ۱− خواهد بود.

$$\frac{۱}{m} \times -(m^۳) = -۱ \xrightarrow{\text{با فرض } m\neq ۰} m^۳ = m \to m^۳ - m = ۰$$

$$m(m^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow m = \pm ۱$$

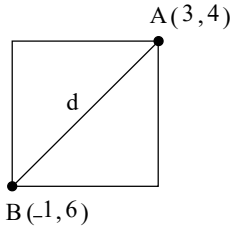
اگر $m = ۰$ در این صورت نیز دو خط عمود بر هم می‌باشد، بنابراین $m = ۰$ نیز جواب می‌باشد پس معادله ۳ جواب دارد.

۱۰ - گزینه ۲ مربع یک لوزی هم محسوب می‌شود که قطرهای برابر دارد لذا می‌توان از رابطهٔ مساحت لوزی استفاده کرد. قدم اول محاسبهٔ طول پاره‌خط AB یا همان قطر مربع می‌باشد.

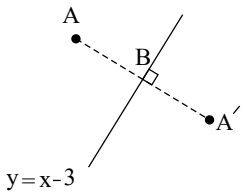
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$

قطر مربع $d = |AB| = \sqrt{(۳+۱)^۲ + (۴-۶)^۲} = \sqrt{۲۰}$

مساحت $S = \frac{d^۲}{۲} = \frac{(\sqrt{۲۰})^۲}{۲} = ۱۰$



۱۱ - گزینه ۲



معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(۳,۲)$ می‌گذرد و بر خط $y = x - ۳$ عمود است را می‌نویسیم، دو خط عمود بر هم شیب های قرینه و معکوس هم دارند پس:

$$m' = ۱ \to m = -۱$$

$$y - ۲ = -۱(x - ۳) \Rightarrow y - ۲ = -x + ۳ \Rightarrow y = -x + ۵$$

برای به‌دست آوردن مختصات نقطه‌ی B، محل برخورد دو خط را به‌دست می‌آوریم (حل دستگاه):

$$\begin{cases} y = -x + ۵ \\ y = x - ۳ \end{cases} \Rightarrow x - ۳ = -x + ۵ \Rightarrow ۲x = ۸ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow y = ۴ - ۳ = ۱ \Rightarrow B(۴,۱)$$

نقطه‌ی B وسط A و A' قرار دارد. مختصات وسط پاره خط با رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

وسط پاره خط B $\begin{vmatrix} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{۲} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{۲} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۴ = \frac{۳ + x_{A'}}{۲} \Rightarrow x_{A'} = ۵ \\ ۱ = \frac{۲ + y_{A'}}{۲} \Rightarrow y_{A'} = ۰ \end{cases} \Rightarrow A'(۵,۰)$

۱۲ - گزینه ۱ ابتدا نقطهٔ برخورد دو خط $y = ۳x + ۱$ و $۲x + ۳y = ۱۴$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۱۴ \\ y = ۳x + ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} ۲x + ۳(۳x + ۱) = ۱۴ \to ۱۱x + ۳ = ۱۴$$

$$\to ۱۱x = ۱۱ \to \boxed{x = ۱} \quad , \quad y = ۳(۱) + ۱ \to \boxed{y = ۴} \to \boxed{A(۱,۴)}$$

خطی که با نیم‌ساز ربع دوم و چهارم $(y = -x)$ موازی است پس شیب آن برابر است با: $\boxed{m = -۱}$

$$y - y_A = m(x - x_A) \to y - ۴ = -۱(x - ۱) \to y - ۴ = -x + ۱$$

$$y = -x + ۵ \to \boxed{y + x - ۵ = ۰}$$

۱۳ - گزینه ۲ چون $A(-۴,-۱)$ و $B(-۲,-۳)$ دو رأس غیرمجاور یک مربع هستند پس طول پاره‌خط AB برابر قطر مربع است و مرکز مربع (نقطهٔ M و وسط قطرها) روی خط $my + (m-۲)x = ۱$ قرار دارد.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(-۴+۲)^۲ + (-۱+۳)^۲} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸}$$

$$\longrightarrow AB = ۲\sqrt{۲} \longrightarrow \text{قطر مربع } d = ۲\sqrt{۲} \longrightarrow S = \frac{d^۲}{۲} = \frac{(\sqrt{۸})^۲}{۲} = \frac{۸}{۲} \longrightarrow S = ۴$$

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{-۴-۲}{۲} = -۳ \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{-۱-۳}{۲} = -۲ \end{cases} \to M(-۳,-۲) \xrightarrow{my+(m-۲)x=۱} -۲m - ۳m + ۶ = ۱ \to m = ۱$$

پس $\frac{S}{m} = ۴$ است.

۱۴ - گزینه ۳

$$d_۱ : mx + (m+۱)y = ۳ \to m_۱ = -\frac{m}{m+۱}$$

$$d_۲ : (m^۲ - ۱)x + m(m+۲)y = ۴ \to m_۲ = -\frac{m^۲ - ۱}{m(m+۲)}$$

$$\cdot \text{ دو خط بر هم عمود } \to m_۱ \cdot m_۲ = -۱ \to \frac{-m}{m+۱} \times \frac{-(m^۲-۱)}{m(m+۲)} = -۱$$

$$\to \frac{m}{(m+۱)} \cdot \frac{(m+۱)(m-۱)}{m(m+۲)} = -۱ \xrightarrow{m \neq ۰,-۱,-۲} \frac{m-۱}{m+۲} = -۱$$

$$m - ۱ = -m - ۲ \to ۲m = -۱ \to \boxed{m = -\frac{۱}{۲}}$$

$$m = ۰ \to \begin{cases} d_۱ : y = ۳ \\ d_۲ : x = -۴ \end{cases} \cdot \text{ دو خط بر هم عمودند} \to \boxed{m = ۰}$$

$$m = -۱ \to \begin{cases} d_۱ : x = -۳ \\ d_۲ : y = -۴ \end{cases} \cdot \text{ دو خط بر هم عمودند} \to \boxed{m = -۱}$$

$$m = -۲ \to \begin{cases} d_۱ : -۲x - y = ۳ \\ d_۲ : ۳x = ۴ \end{cases} \cdot \text{ دو خط بر هم عمود نیستند}$$

$$m \text{ مجموع مقادیر } = -\frac{۱}{۲} + ۰ + (-۱) = -\frac{۳}{۲}$$

۱۵ - گزینه ۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادلهٔ خط سوم صدق کند.

$$- \begin{cases} y + ۲x = ۰ \\ y + ۳x = a \end{cases} \Rightarrow x = a \ , \ y = -۲a$$

$$A \left| \begin{matrix} a \\ -۲a \end{matrix} \right. \xrightarrow[۲y+ax+۵=۰]{\text{صدق در خط سوم}} -۴a + a^۲ + ۵ = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۵ = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶ - ۲۰ = -۴ < ۰ \to \text{ ریشهٔ حقیقی ندارد} \to \text{ این سه خط هیچگاه متقارب نیستند.}$$

۱۶ - گزینه ۲ ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را به‌دست آورده و سپس معادلهٔ خط d (عمودمنصف AB) را می‌نویسیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{-۲ + ۲}{۲} = ۰ \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۱ + ۷}{۲} = ۴$$

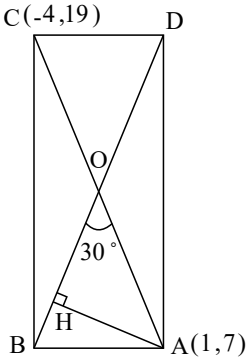
$$\to \boxed{M(۰,۴)} \quad , \quad m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۷ - ۱}{۲ - (-۲)} = \frac{۶}{۴} \to m_{AB} = \frac{۳}{۲}$$

$$\to m_d = \frac{-۱}{m_{AB}} = \frac{-۱}{\frac{۳}{۲}} \to \boxed{m_d = -\frac{۲}{۳}}$$

$$d : y - y_M = m_d(x - x_M) \to y - ۴ = -\frac{۲}{۳}(x - ۰)$$

$$\to \boxed{y = -\frac{۲}{۳}x + ۴} \xrightarrow[y=۰]{\text{محل تلاقی با محور } x \text{ ها}} ۰ = -\frac{۲}{۳}x + ۴ \to \frac{۲}{۳}x = ۴ \to \boxed{x = ۶}$$

۱۷ - گزینه ۱ ابتدا طول قطر AC را به‌دست می‌آوریم:



$$\to AC = \sqrt{(x_A - x_C)^۲ + (y_A - y_C)^۲} = \sqrt{(۱ - (-۴))^۲ + (۷ - ۱۹)^۲} = \sqrt{۲۵ + ۱۴۴} = \sqrt{۱۶۹} \to AC = ۱۳$$

و چون در مستطیل قطرها هم‌دیگر را نصف می‌کنند داریم:

$$OA = OC = OB = OD = \frac{۱۳}{۲}$$

قطرهای مستطیل، مستطیل را به چهار مثلث هم مساحت تقسیم می‌کنند پس داریم:

$$S_{ABCD} = ۴S_{OAB} \rightarrow S_{ABCD} = ۴(\frac{۱}{۲} \times OA \times OB \times \sin ۳۰^\circ) = ۴(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱۳}{۲} \times \frac{۱۳}{۲} \times \frac{۱}{۲}) = \frac{۱۶۹}{۴}$$

توجه کنید مساحت هر مثلث را می‌توان از نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها به‌دست آورد.

۱۸ - گزینه ۱ ابتدا با استفاده از مختصات دو سر قطر، مختصات مرکز دایره را محاسبه می‌کنیم. مرکز دایره وسط قطر قرار دارد پس:

$$O' \left| \begin{array}{l} x_O = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{-۴ + ۱}{۲} = -\frac{۳}{۲} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۷ + ۵}{۲} = ۶ \end{array} \right. \Rightarrow O' \left| \begin{array}{l} -\frac{۳}{۲} \\ ۶ \end{array} \right.$$

حال باید معادله خطی را بنویسیم که از نقاط $O' \left| \begin{array}{l} -\frac{۳}{۲} \\ ۶ \end{array} \right.$ و مبدأ مختصات $O \left| \begin{array}{l} ۰ \\ ۰ \end{array} \right.$ عبور می‌نماید. ابتدا شیب را محاسبه می‌نماییم.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۶ - ۰}{-\frac{۳}{۲} - ۰} = -۴ \Rightarrow y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۰ = -۴(x - ۰)$$

$$\Rightarrow y = -۴x \Rightarrow \boxed{y + ۴x = ۰}$$

۱۹ - گزینه ۱ نکته: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ (طول پاره‌خط AB) برابر است با:

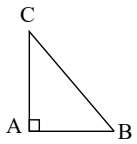
$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

نکته (عکس قضیه‌ی فیثاغورس): اگر در مثلثی، مربع یک ضلع برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

$$AB = \sqrt{(۱ - ۰)^۲ + (۴ - ۱)^۲} = \sqrt{۱۰}$$

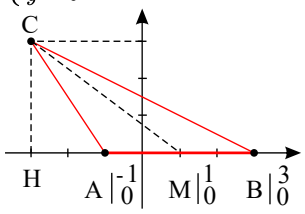
$$AC = \sqrt{(۳ - ۰)^۲ + (۰ - ۱)^۲} = \sqrt{۱۰}\ ,\ BC = \sqrt{(۳ - ۱)^۲ + (۰ - ۴)^۲} = \sqrt{۲۰}$$

بنابراین $AB = AC$ و $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$. پس مثلث ABC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



۲۰ - گزینه ۴ اگر خط به معادلهٔ $۲y + x = ۳$ را با محور xها تلاقی دهیم، مختصات رأس دیگر مثلث به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} ۲y + x = ۳ \\ y = ۰ \end{cases} \rightarrow x = ۳$$



بنابراین نقاط $A \left| \begin{array}{l} -۱ \\ ۰ \end{array} \right.$ و $B \left| \begin{array}{l} ۳ \\ ۰ \end{array} \right.$ دو رأس این مثلث هستند.

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{CH \times AB}{۲} \rightarrow ۶ = \frac{CH \times ۴}{۲} \rightarrow CH = ۳$$

اندازهٔ پاره‌خط CH برابر ۳ می‌باشد، بنابراین عرض رأس C برابر ۳ است.

$$\begin{cases} ۲y + x = ۳ \\ y = ۳ \end{cases} \rightarrow x = -۳ \rightarrow C \left| \begin{array}{l} -۳ \\ ۳ \end{array} \right.$$

$$CM = \sqrt{(-۳ - ۱)^۲ + (۳ - ۰)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۲۱ - گزینه ۴ ۱): فاصله‌ی نقطه‌ی $A(\alpha, \beta)$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = ۰$، برابر است با:

$$AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

۲): فاصله‌ی دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$، برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

با استفاده از شماره‌ی (۱) داریم:

فاصله‌ی نقطه‌ی $(۱,۲)$ از خط $۲x+y-۶=۰$ $= \frac{|۲(۱)+۲-۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$

حال با استفاده از شماره‌ی (۲)، داریم:

$$۲y = ۱-۴x \Rightarrow ۴x+۲y-۱=۰ \Rightarrow ۲x+y-\frac{۱}{۲}=۰ \;,\; ۲x+y-۶=۰$$

فاصله‌ی دو خط موازی $= \frac{|-\frac{۱}{۲}+۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}} = \frac{\frac{۱۱}{۲}}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۱}{۲\sqrt{۵}}$

نسبت این دو مقدار، برابر $\frac{۴}{۱۱} = \frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{۱۱}{۲\sqrt{۵}}}$ است.

۲۲ - گزینه ۴

ابتدا با دو خط، تشکیل دستگاه داده و محل تلاقی آن‌ها را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} x-۲y=۱ \\ ۲x+y=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۲y=۱ \\ ۴x+۲y=۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۵x=۱۱ \Rightarrow x=\frac{۱۱}{۵} \;,\; y=\frac{۳}{۵}$$

باید محل تلاقی دو خط اول در معادله‌ی خط سوم صدق کند.

$$k = x+y = \frac{۱۱}{۵}+\frac{۳}{۵} = \frac{۱۴}{۵} = ۲٫۸$$

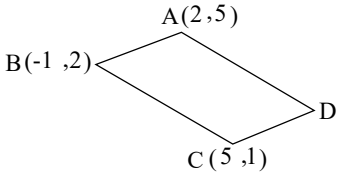
۲۳ - گزینه ۲ نقطه‌ی دلخواه $A(\alpha, ۲\alpha+۱)$ را روی خط $y=۲x+۱$ درنظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را از نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y=x$ بدست می‌آوریم.

فاصله ی نقطه‌ی A از خط $x-y=۰$ $= \frac{|\alpha-۲\alpha-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} \overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=} ۴\sqrt{۲} \rightarrow |-\alpha-۱| = ۸$

$$\Rightarrow |\alpha+۱| = ۸ \Rightarrow \alpha+۱ = \pm ۸ \Rightarrow \alpha = -۹ \text{ یا } ۷$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ ازخط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

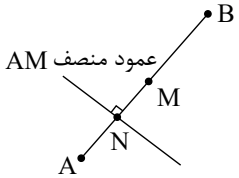
۲۴ - گزینه ۱ ضلع DC از نقطه‌ی C می‌گذرد و با خط AB موازی است، پس:



$$m_{AB} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} = \frac{۵-۲}{۲-(-۱)} = ۱ = m_{DC}$$

معادله‌ی ضلع DC: $\xrightarrow[m=۱]{C(۵,۱)} y-۱ = ۱(x-۵) \Rightarrow y = x-۴$

۲۵ - گزینه ۱ نقطه‌ی M وسط AB و نقطه‌ی N وسط AM است، پس می‌توان نوشت:



وسط پاره خط AB $M(\frac{۱+۱۱}{۲}, \frac{-۱+۹}{۲}) \Rightarrow M(۶,۴)$

وسط پاره خط AM $N(\frac{۶+۱}{۲}, \frac{۴+۹}{۲}) \Rightarrow N(\frac{۷}{۲}, \frac{۱۳}{۲})$

عمود منصف $=$ $m_{AB} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} = \frac{۹+۱}{۱-۱۱} = -۱ \Rightarrow m = ۱$

معادله‌ی عمود منصف AM: $\xrightarrow[m=۱]{(\frac{۷}{۲},\frac{۱۳}{۲})} y-\frac{۱۳}{۲} = ۱(x-\frac{۷}{۲}) \Rightarrow y = x+۳$

۲۶ - گزینه ۴ رأس A محل برخورد دو ضلع AB و AC است پس کافی است با معادلات داده شده تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه‌ی A بدست آید.

$$-۳\begin{cases} y+x=۲ \\ ۳y+۴x=۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳y-۳x=-۶ \\ ۳y+۴x=۸ \end{cases} \rightarrow x=۲ \;,\; y=۰$$

$\Rightarrow A(۲,۰) \Rightarrow$ مجموع مختصات رأس $A = ۲$

۲۷ - گزینه ۳ نقطه‌ی $(\alpha, ۲\alpha-۱)$ را برروی خط $۲x-y=۱$ $(y=۲x-۱)$ درنظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را از خط $۴x+۳y-۱=۰$ به دست می‌آوریم و مساوی ۲ قرار می دهیم پس داریم:

$$\frac{|۴\alpha+۳(۲\alpha-۱)-۱|}{\sqrt{۱۶+۹}} = ۲ \rightarrow \frac{|۱۰\alpha-۴|}{۵} = ۲ \rightarrow |۱۰\alpha-۴| = ۱۰$$

$$۱۰\alpha-۴ = ۱۰ \rightarrow \alpha = ۱٫۴ \rightarrow (۱٫۴ \;,\; ۱٫۸) \;,\; ۱۰\alpha-۴ = -۱۰ \rightarrow \alpha = -۰٫۶ \rightarrow (-۰٫۶ \;,\; -۲٫۲)$$

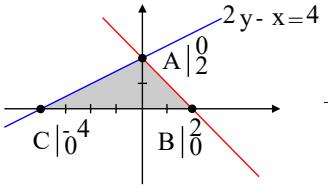
بنابراین مجموع عرض‌ها برابر $-۰٫۴$ می‌باشد.

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ ازخط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

۲۸ - گزینه ۲ ابتدا محل برخورد این خطوط را با محورهای مختصات پیدا می‌کنیم.

$$y+x=۲\rightarrow\begin{cases}x=۰\rightarrow y=۲\\y=۰\rightarrow x=۲\end{cases}\ ,\ ۲y-x=۴\rightarrow\begin{cases}x=۰\rightarrow y=۲\\y=۰\rightarrow x=-۴\end{cases}$$

سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را بدست می‌آوریم.

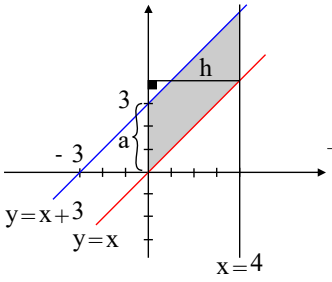


$$\rightarrow S=\frac{۶\times ۲}{۲}=۶$$

۲۹ - گزینه ۴ معادلهٔ خط نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $y=x$ است که شیب آن یک است و چون خط باید با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یک است. چون این خط، نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $(y=-x)$ را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ قطع می‌کند پس عرض آن $y=-۲$ است.

$$A\Big|_{-۲}^{۲}\ ,m=۱\rightarrow y-(-۲)=۱(x-۲)\rightarrow y+۲=x-۲\rightarrow y-x=-۴$$

۳۰ - گزینه ۲ بهترین روش برای حل این تست رسم شکل است.



$$\rightarrow S=a\times h=۳\times ۴=۱۲$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۳	۱۱ - ۲	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۴
۲ - ۱	۷ - ۲	۱۲ - ۱	۱۷ - ۱	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۲	۱۸ - ۱	۲۳ - ۲	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۱	۲۹ - ۴
۵ - ۴	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲