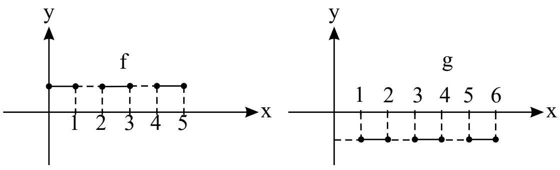
علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

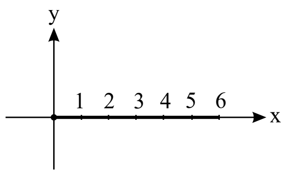
۱ - اگر $f(x)=x+۲$ و $g(x)=x-۲$، حاصل $\dfrac{(f+g)(x)}{(f-g)(x)}$ کدام است؟

① ۱ ② $\dfrac{x}{۴}$ ③ $\dfrac{x}{۲}$ ④ $\dfrac{۲x}{x+۴}$

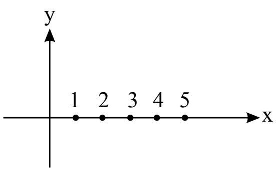
۲ - با توجه به نمودار دو تابع f و g در شکل زیر، نمودار تابع $f+g$ کدام است؟



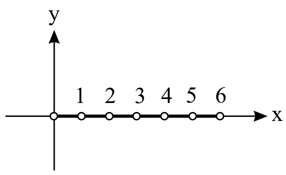
①



②

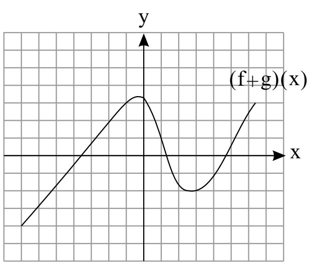


③



④ تابع $f+g$ وجود ندارد.

۳ - اگر f و g دو تابع باشند و نمودار تابع $(f+g)(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، حاصل $f(۳)+g(۳)$ کدام است؟



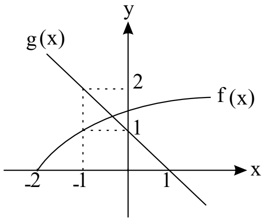
① -۱

② -۲

③ صفر

④ -۴

۴- اگر نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت روبه‌رو باشد. $(f \times g)(-1)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) -1
۴) -2

۵- اگر $f(x)=\begin{cases} |2x^2-1|-\frac{1}{2} & , \quad x<1 \\ [\sqrt{x^2-1}]-2 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(0)+f(2)$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

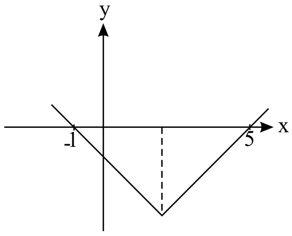
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۶- اگر $f(x)=|[5x]|-[|3x|]$ باشد، مقدار $f(\frac{-1}{2})$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۷- نموار تابع $y=-|x-4|+1$ محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند، مجموع طول‌های این دو نقطه کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۸



۸ - نمودار تابع مقابل مربوط به تابع $y=|x+a|-b$ است. در این صورت $a\cdot b$ کدام است؟

(۱) ۹

(۲) -۶

(۳) ۶

(۴) -۹

۹ - اگر $f(x)=۲x^{۲}-۱$، $(f\times f)(۲)$ حاصل کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۷ (۴) ۴۹

۱۰ - اگر تابع $f=\{(۲,۵),(۳,۰),(۴,۱),(-۱,۱)\}$ و تابع $\frac{f}{g}=\{(۳,۰),(۴,\frac{۱}{۵})\}$ باشد، تابع g کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند باشد؟

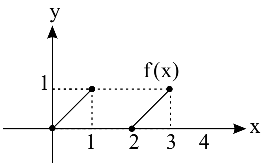
(۱) $g=\{(۱,۱),(۳,۲),(۵,۵),(-۱,۰)\}$

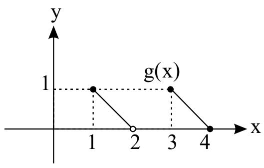
(۲) $g=\{(۲,۱),(۳,۱),(۱,-۱),(۴,۵)\}$

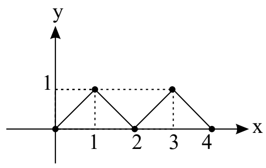
(۳) $g=\{(-۱,۰),(۳,۳),(۱,۲),(۴,۵)\}$

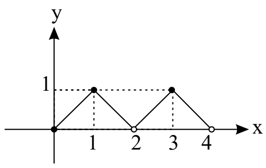
(۴) $g=\{(-۲,۲),(۳,-۳),(۴,۱),(۱,۰)\}$

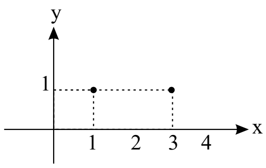
۱۱- اگر نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر باشند، نمودار $(f+g)(x)$ کدام است؟

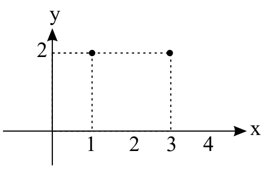




① 

② 

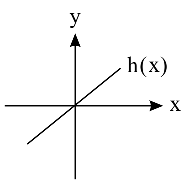
③ 

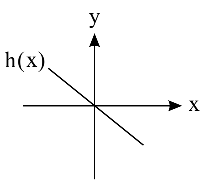
④ 

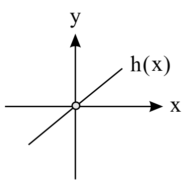
۱۲- اگر $f_1(x)=\sqrt{2x-1}+2$ و $f_2(x)=\frac{|-x|}{x+2}$ باشند، $f_3=f_1\times f_2$ و $f_4=f_3-f_2$، در این صورت حاصل $f_5=\frac{f_3}{f_4}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

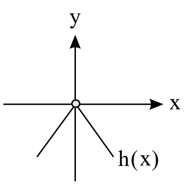
① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$

۱۳- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=sign(x)$ در این صورت نمودار تابع $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

① 

② 

③ 

④ 

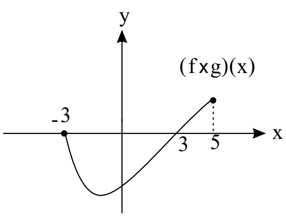
۱۴- اگر $f(x)=|۲x|$ و $g(x)=\begin{cases} x & , \quad x>۰ \\ ۰ & , \quad x=۰ \\ -x & , \quad x<۰ \end{cases}$ باشد، ضابطهٔ تابع $(g-f)(x)$ کدام می‌باشد؟

① $(g-f)(x)=|x|$ ② $(g-f)(x)=-|x|$ ③ $(g-f)(x)=x$ ④ $(g-f)(x)=-x$

۱۵- در تابع قدر مطلق $f(x)=|ax+b|$، اگر ضابطهٔ یکی از خط‌ها $y=-۳x+۲$ باشد، ضابطهٔ دیگری کدام است؟

① $y=۳x+۲$ ② $y=۳x-۲$ ③ $y=-۳x-۲$ ④ $y=۲x-۳$

۱۶- اگر f و g دو تابع باشند و نمودار $(f\times g)(x)$ به‌صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ کدام محدوده می‌تواند باشد؟



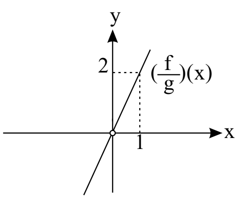
① $-۵\leq x\leq ۷$

② $۳\leq x\leq ۵$

③ $-۳\leq x\leq ۳$

④ $-۵\leq x\leq ۳$

۱۷- اگر $f(x)=x^۲$ و نمودار تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به‌صورت مقابل باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ کدام است؟



① $\frac{۲}{x}$ ② $۲x$

③ $\frac{x}{۲}$ ④ x

۱۸- با توجه به رابطهٔ زیر که در آن تابع $y=|۲x-۶|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای نوشته‌ایم، $a+b$ کدام است؟

$$y=|۲x-۶|=\begin{cases} ax-۶ & x\geq b \\ -(ax-۶) & x<b \end{cases}$$

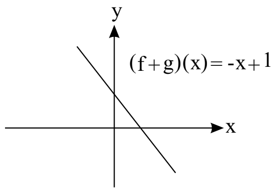
① ۵ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

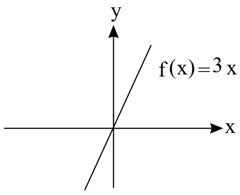
۱۹- اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=|۲x-۶|$، حاصل $(f+g)(x)$ با دامنهٔ $x<۳$ کدام است؟

① $۴x-۵$ ② $x+۵$ ③ -۵ ④ ۷

۲۰- اگر نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $(f+g)(x)$ به‌صورت مقابل باشند، $g(۵)$ کدام است؟

① -۱۴
② -۴
③ -۱۹
④ -۹

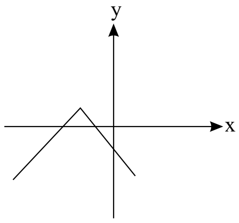




۲۱- اگر نمودار تابع $f(x)$ را سه واحد به راست ببریم، به نمودار $y=|x|$ می‌رسیم. ضابطهٔ تابع $f(x)$ کدام است؟

① $f(x)=|x-۳|$ ② $f(x)=|x+۳|$ ③ $f(x)=|x|-۳$ ④ $f(x)=|x|+۳$

۲۲ - کدام گزینه می‌تواند ضابطهٔ نمودار تابع مقابل باشد؟



(۱) $y = |x + ۲| - ۱$

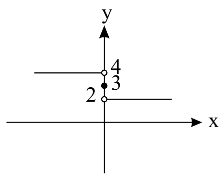
(۲) $y = |x - ۲| - ۱$

(۳) $y = -|x - ۲| - ۱$

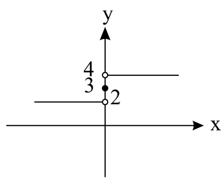
(۴) $y = -|x + ۲| + ۱$

۲۳ - اگر $\begin{cases} f : R \to R \\ f(x) = ۳ \end{cases}$ و تابع $g(x)$ تابع علامت $(sign(x))$ باشد، نمودار $(f - g)(x)$ کدام است؟

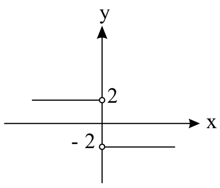
(۱)



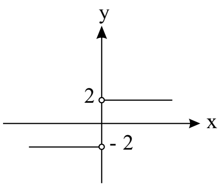
(۲)



(۳)



(۴)



۲۴ - اگر $f = \{(۳, -۱), (۲, a)\}$، $g = \{(۲, -۱), (۴, a + ۱)\}$ و $(f + g)(b) = ۳$، آن‌گاه $a + b$ کدام است؟

(۱) ۱　　(۲) ۶　　(۳) ۵　　(۴) ۴

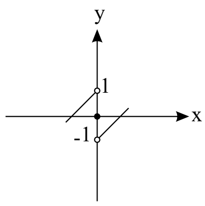
۲۵ - اگر $f = \{(-۱, ۰), (۲, ۵), (۰, -۴)\}$ و $g = \{(۰, -۱), (۲, -۵), (۱, ۳)\}$ در این صورت تابع $f + g$ کدام است؟

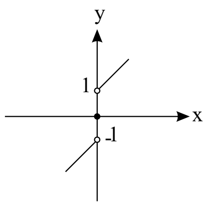
(۱) $\{(۰, -۵), (۲, ۰)\}$　　(۲) $\{(-۵, ۲)\}$　　(۳) $\{(۲, -۵)\}$　　(۴) $\{(-۵, ۰), (۰, ۲)\}$

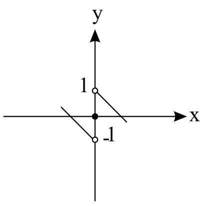
۲۶- برای دو تابع f و g که $f=\{(۲,۰),(-۱,۱),(۱,۲),(۰,۲)\}$ و $g=\{(-۱,۵),(۱,۰),(۲,-۲),(۰,۲)\}$ برد تابع $\frac{g}{f}$ کدام گزینه است؟

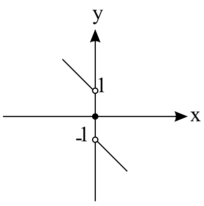
① $\{۰,۱,۵\}$ ② $\{۱,۵\}$ ③ $\{۰,۵\}$ ④ $\{-۱,۱,۵\}$

۲۷- اگر $f(x)=-x$ و $g(x)=sign(x)$ باشند، نمودار تابع $f+g$ کدام گزینه خواهد بود؟

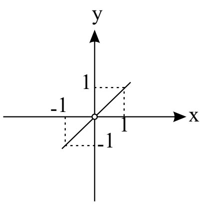
①


②


③


④


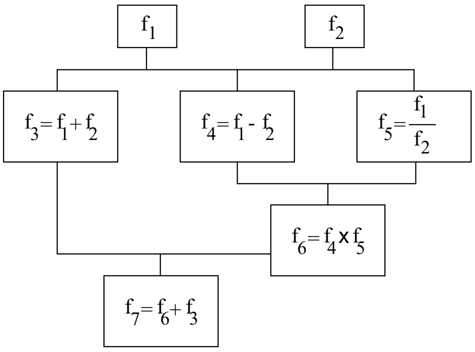
۲۸- اگر $f(x)=۲x^۲$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ کدام است؟



① $g(x)=x$ ② $g(x)=۲x$

③ $g(x)=\frac{x}{۲}$ ④ $g(x)=|x|$

۲۹- اگر $f_۱(x)=|x|$ و $f_۲(x)=[x]$ باشد، در درخت زیر به‌ازای $x=-\frac{۱}{۲}$ مقدار $f_۷(x)$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



۱) $-\frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) صفر

۳۰- اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ، مقدار $\frac{(f+g)(۴)}{(f-g)(۹)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۴}$ ۲) $\frac{۷}{۱۷}$ ۳) -۱ ۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ نکته: عمل‌های جمع و تفریق دو تابع به صورت زیر است:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad ; \quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad ; \quad D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

مطابق نکته با توجه به اینکه دامنه دو تابع f و g، اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است داریم:

$$\frac{(f+g)(x)}{(f-g)(x)}=\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}=\frac{x+۲+x-۲}{x+۲-(x-۲)}=\frac{۲x}{۴}=\frac{x}{۲}$$

۲ - گزینه ۲ با توجه به نمودار دو تابع در می‌یابیم که دامنهٔ دو تابع f و g فقط در نقاطی به طول اعداد طبیعی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ با یکدیگر اشتراک دارند که به ازای این نقاط طول مقدار f برابر یک و مقدار تابع g برابر -۱ است که حاصل جمع آن‌ها صفر خواهد شد. پس نمودار گزینهٔ (۲) پاسخ صحیح است.

۳ - گزینه ۲ نکته: عمل جمع دو تابع به صورت زیر است:

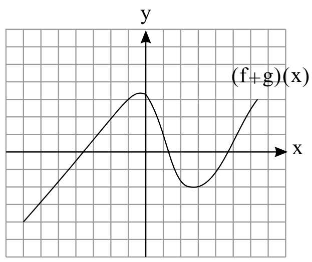
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad ; \quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

مطابق نکته داریم:

$$f(۳)+g(۳)=(f+g)(۳)$$

با توجه به نمودار، به ازای $x=۳$ مقدار تابع برابر -۲ است. بنابراین:

$$f(۳)+g(۳)=-۲$$

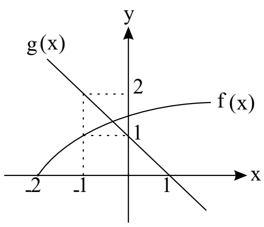


۴ - گزینه ۲ نکته: عمل ضرب دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x) \quad ; \quad D_{f\times g}=D_f\cap D_g$$

با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} f(-۱)=۱ \\ g(-۱)=۲ \end{cases} \Rightarrow (f\times g)(-۱)=f(-۱)\times g(-۱)=۱\times ۲=۲$$



۵ - گزینه ۲ چون $۱<۰$ است، پس برای محاسبهٔ $f(۰)$ از ضابطهٔ بالایی استفاده می‌کنیم.

$$f(۰)=|۲(۰)^۲-۱|-\frac{۱}{۲}=|۰-۱|-\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

و برای محاسبهٔ $f(۲)$ از ضابطهٔ پایینی استفاده می‌کنیم.

$$f(۲)=[\sqrt{۲^۲-۱}]-۲=[\sqrt{۴-۱}]-۲=[\sqrt{۳}]-۲=[۱/۷]-۲=۱-۲=-۱$$

$$f(۰)+f(۲)=\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲}$$

۶ - گزینه ۴ با جایگذاری مقدار x در تابع داریم:

$$f(x)=|[۵x]|-[|۳x|]\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}}$$

$$f(-\frac{۱}{۲})=|[۵\times(-\frac{۱}{۲})]|-[|۳\times-\frac{۱}{۲}|]=|[-\frac{۵}{۲}]|-[|-\frac{۳}{۲}|]$$

$$\xrightarrow[-\frac{۳}{۲}<۰\Rightarrow|-\frac{۳}{۲}|=\frac{۳}{۲}]{-۳<-\frac{۵}{۲}<-۲\Rightarrow[-\frac{۵}{۲}]=-۳} f(-\frac{۱}{۲})=|-۳|-[\frac{۳}{۲}]$$

$$\xrightarrow[۱<\frac{۳}{۲}<۲\Rightarrow[\frac{۳}{۲}]=۱]{-۳<۰\Rightarrow|-۳|=۳} f(-\frac{۱}{۲})=۳-۱=۲$$

۷ ـ گزینه ۴

$$y=-|x-۴|+۱ \Rightarrow y=\begin{cases}-(x-۴)+۱ & , \quad x-۴\geq ۰\\ -(-(x-۴))+۱ & , \quad x-۴<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\begin{cases}-x+۵ & , \quad x\geq ۴\\ x-۳ & , \quad x<۴\end{cases} \Rightarrow y=۰ \Rightarrow \begin{cases}-x+۵=۰ & , \quad x\geq ۴\\ x-۳=۰ & , \quad x<۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۵ & , \quad x\geq ۴\\ x=۳ & , \quad x<۴\end{cases}$$

تابع در دو نقطه به طول‌های $x=۳$ و $x=۵$ محور طول‌ها را قطع می‌کند.

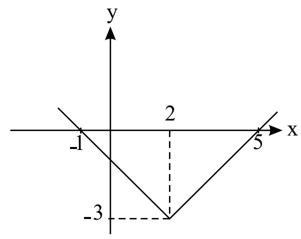
$۳+۵=۸$

۸ ـ گزینه ۲ با توجه به تقارن تابع قدرمطلق، طول نقطهٔ رأس نمودار این تابع برابر است با $۲=\dfrac{-۱+۵}{۲}$ پس تابع به صورت $y=|x-۲|-b$ است از طرفی $(۵,۰)$ در تابع صدق می‌کند:

$۰=|۵-۲|-b \Rightarrow ۰=۳-b \Rightarrow b=۳$

در نتیجه تابع به صورت $y=|x-۲|-۳$ است، پس:

$$a=-۲\ ,\ b=۳ \Rightarrow ab=(-۲)\times ۳=-۶$$



۹ ـ گزینه ۴ نکته: عمل ضرب دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)\ \ ;\ \ D_f\cap D_g$

با توجه به نکته داریم:

$(f\times f)(۲)=f(۲)\times f(۲)\xlongequal{f(۲)=۷} ۷\times ۷=۴۹$

۱۰ ـ گزینه ۳ ابتدا دامنهٔ تابع $\dfrac{f}{g}$ را به‌دست می‌آوریم:

$D_{\frac{f}{g}}=\{۳,۴\}$

۱) در گزینهٔ (۱) عدد ۴ در دامنهٔ تابع g قرار ندارد و لذا نمی‌تواند در دامنهٔ تابع $\dfrac{f}{g}$ قرار گیرد.

۲) در گزینهٔ (۲) عدد ۲ در دامنهٔ تابع g است و باید زوج مرتب $(۲,۵)$ در تابع $\dfrac{f}{g}$ بیاید که نیامده است.

۳) در گزینهٔ (۳) دامنهٔ مشترک دو تابع $\{۳,۴\}$ می‌باشد که هر دو در تابع $\dfrac{f}{g}$ به صورت صحیح محاسبه شده‌اند. دقت کنید اگرچه (-۱) در دامنهٔ f و g مشترک است اما چون $g(-۱)=۰$ است، پس در دامنهٔ $\dfrac{f}{g}$ قرار نمی‌گیرد.

۴) در گزینهٔ (۴) دامنهٔ مشترک دو تابع $\{۳,۴\}$ می‌باشد، ولی مقدار تابع $\dfrac{f}{g}$ برای ۴، مقدار ۱ به‌دست می‌آید و به جای $(۴,\dfrac{۱}{۵})$ باید $(۴,۱)$ قرار گیرد که در نتیجه صحیح نیست.

۱۱ ـ گزینه ۴ نکته: عمل جمع دو تابع به صورت زیر است:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\quad ;\quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$

با توجه به نکته ابتدا اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g را به‌دست می‌آوریم

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{۱,۳\}$

حال مقدار این توابع را در نقاط اشتراک به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم:

$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۱+۱=۲$
$(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۱+۱=۲$

پس تابع $f+g$ به صورت $\{(۱,۲),(۳,۲)\}$ می‌باشد، بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۲ ـ گزینه ۲ ابتدا با توجه به ضابطهٔ تابع‌هایی $f_۱$ و $f_۲$، ضابطهٔ توابع $f_۳$ و $f_۴$ و $f_۵$ را می‌یابیم:

$$f_۳=f_۱\times f_۲=(\sqrt{۲x-۱}+۲)\times(\frac{|-x|}{x+۲})$$

$$\Rightarrow f_۳(۱)=(\sqrt{۲\times ۱-۱}+۲)\times(\frac{|-۱|}{۱+۲})=۳\times\frac{۱}{۳}=۱$$

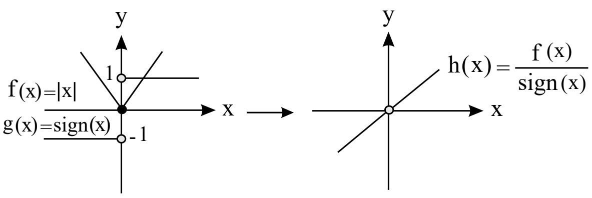
$$f_۴=f_۳-f_۲=(\sqrt{۲x-۱}+۲)\times(\frac{|-x|}{x+۲})-\frac{|-x|}{x+۲}$$

$$\Rightarrow f_۴(۱)=f_۳(۱)-f_۲(۱)=۱-\frac{|-۱|}{۱+۲}=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

پاسخ

$$f_۵ = \frac{f_۳}{f_۴} \Rightarrow f_۵(۱) = \frac{f_۳(۱)}{f_۴(۱)} = \frac{۱}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

۱۳ – گزینه ۳ اگر نمودار تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، داریم:



دقت کنید تابع $h(x) = \dfrac{|x|}{sign(x)}$ به ازای $x = ۰$ تعریف نشده است، زیرا مخرج کسر صفر می‌شود که تعریف نشده است.

۱۴ – گزینه ۲ تابع $f(x) = |۲x|$ را می‌توان به صورت ۳ ضابطه‌ای نوشت و داریم:

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & , \quad x > ۰ \\ ۰ & , \quad x = ۰ \\ -۲x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

حال با توجه به اشتراک دامنهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌توان نوشت:

$$g(x) - f(x) = \begin{cases} x - ۲x & , \quad x > ۰ \\ ۰ - ۰ & , \quad x = ۰ \\ -x + ۲x & , \quad x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} -x & , \quad x > ۰ \\ ۰ & , \quad x = ۰ \\ x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) - f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x > ۰ \\ ۰ & , \quad x = ۰ \\ x & , \quad x < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به تعریف تابع قدر مطلق}} (g - f)(x) = -|x|$$

۱۵ – گزینه ۲

نکته: $|u| = \begin{cases} u & u \geq ۰ \\ -u & u < ۰ \end{cases}$

با توجه به نکته ضابطهٔ تابع $f(x)$ به صورت مقابل است:

$$f(x) = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & ax + b \geq ۰ \\ -(ax + b) & ax + b < ۰ \end{cases}$$

با توجه به مطالب فوق دو خط قرینهٔ یکدیگرند. پس برای به دست آوردن ضابطهٔ خط دیگر، کافی است ضابطهٔ خط داده شده را در یک منفی ضرب کنیم. بنابراین ضابطهٔ خط موردنظر عبارت است از:

$$y = -(-۳x + ۲) = ۳x - ۲$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۶ – گزینه ۱ نکته: عمل ضرب دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad ; \quad D_{f\times g} = D_f \cap D_g$$

با توجه به نکته، دامنهٔ تابع $(f \times g)(x)$، اشتراک دامنهٔ دو تابع f و g است. بنابراین دامنهٔ هر دو تابع f و g باید حتماً D_{f+g} را شامل شود. با توجه به نمودار داده شده، دامنهٔ تابع $f \times g$ محدودهٔ $-۳ \leq x \leq ۵$ است. پاسخ سؤال محدوده‌ای است که شامل این محدوده شود. تنها گزینهٔ ۱ این ویژگی را دارد.

۱۷ – گزینه ۳ نکته: ضابطهٔ یک تابع خطی به صورت $y = ax + b$ است.

نکته: عمل تقسیم دو تابع به‌صورت زیر تعریف می شود:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\}$$

ابتدا ضابطهٔ تابع $(\dfrac{f}{g})(x)$ را با استفاده از نمودار به‌دست می آوریم. از روی نمودار مشخص است که $(\dfrac{f}{g})(x)$ به‌صورت خطی است که از دو نقطهٔ $(۰, ۰)$ و $(۱, ۲)$ عبور می کند. ضابطهٔ این خط را به‌دست می‌آوریم:

خط از $(۰, ۰)$عبور می‌کند: $y = ax + b \Rightarrow ۰ = a \times (۰) + b \Rightarrow b = ۰$.

خط از $(۱, ۲)$ عبور می‌کند: $y = ax + b \Rightarrow ۲ = a \times ۱ + b \xrightarrow{b=۰} a = ۲$.

پس ضابطهٔ تابع $(\dfrac{f}{g})(x)$ به‌صورت $y = ۲x$ است، بنابراین:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = ۲x \Rightarrow g(x) = \frac{f(x)}{۲x} = \frac{x^۲}{۲x} = \frac{x}{۲}$$

۱۸ – گزینه ۱ نکته: تابع قدر مطلق به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq ۰ \\ -u & u < ۰ \end{cases}$$

$$y = |۲x - ۶| = \begin{cases} ۲x - ۶ & ۲x - ۶ \geq ۰ \\ -(۲x - ۶) & ۲x - ۶ < ۰ \end{cases}$$

$$۲x-۶\geq ۰ \Rightarrow ۲x\geq ۶ \Rightarrow x\geq ۳ \qquad (۱)$$
$$۲x-۶< ۰ \Rightarrow ۲x< ۶ \Rightarrow x< ۳ \qquad (۲)$$

پس ضابطهٔ داده‌شده به‌صورت زیر است:

$$y=|۲x-۶|=\begin{cases} ۲x-۶ & x\geq ۳ \\ -(۲x-۶) & x<۳ \end{cases}$$

با مقایسهٔ عبارت صورت سؤال با عبارت بالا داریم:

$$\begin{cases} a=۲ \\ b=۳ \end{cases} \Rightarrow a+b=۲+۳=۵$$

۱۹ - گزینه ۴ نکته: تابع قدرمطلق به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|u|=\begin{cases} u & u\geq ۰ \\ -u & u<۰ \end{cases}$$

با توجه به نکتهٔ بالا، تابع $g(x)=|۲x-۶|$ به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$g(x)=|۲x-۶|=\begin{cases} ۲x-۶ & x\geq ۳ \\ -(۲x-۶) & x<۳ \end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $g(x)$ با دامنهٔ $x<۳$ عبارت است از $g(x)=-(۲x-۶)$، پس در دامنهٔ $x<۳$ تابع $(f+g)(x)$ به‌صورت مقابل است:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۲x+۱-(۲x-۶)=۲x+۱-۲x+۶=۷$$

۲۰ - گزینه ۳ راه‌حل اول:

نکته: عمل جمع دو تابع به‌صورت زیر است:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ;\ D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

مطابق نکته داریم:

$$\begin{cases} (f+g)(x)=-x+۱ \Rightarrow f(x)+g(x)=-x+۱ \\ f(x)=۳x \end{cases} \Rightarrow ۳x+g(x)=-x+۱ \Rightarrow g(x)=-۴x+۱$$

بنابراین:

$$g(۵)=-۲۰+۱=-۱۹$$

راه‌حل دوم:

با توجه به ضابطهٔ دو تابع $f+g$ و f می‌توان نوشت:

$$(f+g)(۵)=-۴ \Rightarrow f(۵)+g(۵)=-۴ \xrightarrow{f(۵)=۱۵} ۱۵+g(۵)=-۴ \Rightarrow g(۵)=-۱۹$$

تذکر: چون دامنهٔ تابع $f+g$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس دامنهٔ تابع g هم $\mathbb{R}$ است، پس مقدار $g(x)$ در $x=۵$ تعریف شده است.

۲۱ - گزینه ۲ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ k واحد روی محور xها منتقل کنیم. اگر $k>۰$، در جهت منفی محور xها و اگر $k<۰$، در جهت مثبت محور xها انتقال می‌دهیم.

اگر نمودار تابع $f(x)$ را سه واحد به راست ببریم، به نمودار $y=|x|$ می‌رسیم. پس اگر نمودار $y=|x|$ را سه واحد به چپ ببریم، به نمودار $f(x)$ می‌رسیم. پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ مطابق نکته عبارت است از: $f(x)=|x+۳|$

۲۲ - گزینه ۴ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ k واحد روی محور yها منتقل کنیم. اگر $k>۰$، به اندازهٔ k واحد به سمت بالا و اگر $k>۰$، نمودار را به اندازهٔ k واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

نکته: برای رسم نمودار $y=-f(x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد روی محور xها منتقل کنیم. اگر $k>۰$، نمودار را به اندازهٔ k واحد به‌سمت چپ و اگر $k<۰$ نمودار را به اندازهٔ k واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.

با توجه به نکات نمودار داده شده نسبت به نمودار $y=|x|$ به اندازهٔ k واحد به‌سمت چپ روی محور xها انتقال یافته است، پس $k>۰$. از طرفی نمودار نسبت به محور xها قرینه شده و نسبت به نمودار $y=|x|$ به اندازهٔ a واحد روی محور yها بالا رفته است، بنابراین فقط گزینهٔ ۴ می‌تواند نمودار این تابع باشد.

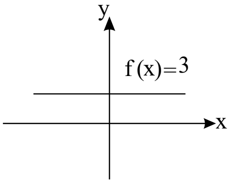
۲۳ - گزینه ۱ نکته: تابع علامت $(sign(x))$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

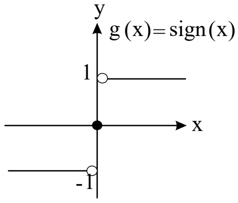
$$sign(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

نکته: عمل تفریق دو تابع به صورت زیر است:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\ ;\ D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

ابتدا نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



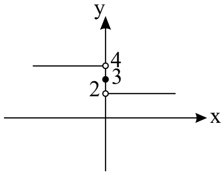


برای $x>۰$, $f(x)=۳$ و $g(x)=۱$، پس: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۳-۱=۲$

برای $x=۰$, $f(x)=۳$ و $g(x)=۰$، پس: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۳-۰=۳$

برای $x<۰$, $f(x)=۳$ و $g(x)=-۱$، پس: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۳-(-۱)=۴$

بنابراین نمودار تابع $(f-g)(x)$ به‌صورت زیر است.



۲۴ – گزینه ۲ نکته: عمل جمع دو تابع به‌صورت زیر است:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ \ ;\ \ D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{cases} f=\{(۳,-۱),(۲,a)\} \\ g=\{(۲,-۱),(۴,a+۱)\} \end{cases} \Rightarrow D_{f+g}=\{۲\}$$

بنابراین تابع $f+g$ فقط برای $x=۲$ قابل تعریف است. با توجه به اینکه $(f+g)(b)=۳$ می‌توان نتیجه گرفت که $b=۲$. اکنون داریم:

$$(f+g)(۲)=۳\Rightarrow f(۲)+g(۲)=۳\Rightarrow a+(-۱)=۳\Rightarrow a=۴$$

بنابراین: $a+b=۴+۲=۶$

۲۵ – گزینه ۱

$$f=\{(-۱,۰),(۲,۵),(۰,-۴)\}\ \Rightarrow\ D_f=\{-۱,۲,۰\}$$

$$g=\{(۰,-۱),(۲,-۵),(۱,۳)\}\ \Rightarrow\ D_g=\{۰,۲,۱\}$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{-۱,۲,۰\}\cap\{۰,۲,۱\}=\{۰,۲\}$$

$$f+g=\{(۰,-۴+(-۱)),(۲,۵+(-۵))\}=\{(۰-۵),(۲,۰)\}$$

۲۶ – گزینه ۱ ابتدا دامنهٔ دو تابع را به‌دست می‌آوریم، سپس دامنهٔ $\frac{g}{f}$ را مشخص می‌کنیم:

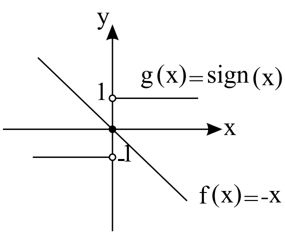
$$D_f=\{۲,-۱,۱,۰\},D_g=\{-۱,۱,۲,۰\}$$

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\}\Rightarrow D_{\frac{g}{f}}=(\{۲,-۱,۱,۰\}\cap\{-۱,۱,۲,۰\})-\{۲\}=\{-۱,۰,۱\}$$

$$\frac{g}{f}=\{(-۱,\frac{۵}{۱}),(۰,\frac{۲}{۲}),(۱,\frac{۰}{۲})\}=\{(-۱,۵),(۰,۱),(۱,۰)\}\Rightarrow R_{\frac{g}{f}}=\{۵,۱,۰\}$$

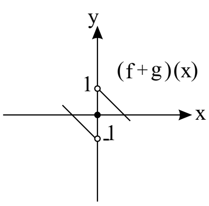
۲۷ – گزینه ۳

برای رسم نمودار تابع $f+g$ با توجه به نمودارهای $f(x)=-x$ و $g(x)=sign(x)$ داریم:



برای رسم نمودار دقت کنید به ازای $x>۰$ در حقیقت یک واحد به عرض نقاط $f(x)=-x$ اضافه می‌شود و به ازای $x=۰$ مقدار $(f+g)(۰)=۰$ است.

به ازای $x<۰$ یک واحد از عرض از نقاط $f(x)=-x$ کاهش می‌یابد.



تابع

۲۸ – گزینه ۲ نمودار تابع $(\frac{f}{g})=x$ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است از طرفی در $x=۰$ تابع تعریف نشده است، پس ضابطهٔ تابع $g(x)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(\frac{f}{g}) = x \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = x \xrightarrow{f(x)=۲x^۲} \frac{۲x^۲}{g(x)} = x \Rightarrow g(x) = ۲x$$

۲۹ - گزینه ۲ ابتدا هریک از ضابطه‌ها را تعیین می‌کنیم، سپس مقدار تابع $f_۷$ را به‌ازای $x = -\frac{۱}{۲}$ می‌یابیم:

$$f_۳(x) = f_۱(x) + f_۲(x) = |x| + [x]$$
$$f_۴(x) = f_۱(x) - f_۲(x) = |x| - [x]$$
$$f_۵(x) = \frac{f_۱(x)}{f_۲(x)} = \frac{|x|}{[x]}$$
$$f_۶(x) = f_۴(x) \times f_۵(x) = (|x| - [x]) \times \frac{|x|}{[x]}$$
$$f_۷(x) = f_۶(x) + f_۳(x) = (|x| - [x]) \times \frac{|x|}{[x]} + |x| + [x]$$

حال مقدار تابع را به‌ازای $x = -\frac{۱}{۲}$ می‌یابیم:

$$f_۷(-\frac{۱}{۲}) = (|-\frac{۱}{۲}| - [\frac{-۱}{۲}]) \times \frac{|-\frac{۱}{۲}|}{[-\frac{۱}{۲}]} + |-\frac{۱}{۲}| + [-\frac{۱}{۲}]$$

$$\Rightarrow f_۷(-\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲} - (-۱)) \times \frac{\frac{۱}{۲}}{(-۱)} + \frac{۱}{۲} - ۱ = \frac{۳}{۲} \times (-\frac{۱}{۲}) - \frac{۱}{۲} = -\frac{۳}{۴} - \frac{۲}{۴} = -\frac{۵}{۴}$$

۳۰ - گزینه ۱ نکته: عمل جمع و تفریق دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad ; \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

با توجه به نکته داریم:

$$\frac{(f+g)(۴)}{(f-g)(۹)} = \frac{f(۴) + g(۴)}{f(۹) - g(۹)} = \frac{۷+۲}{۱۷-۳} = \frac{۹}{۱۴}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۴	۱۱ - ۴	۱۶ - ۱	۲۱ - ۲	۲۶ - ۱
۲ - ۲	۷ - ۴	۱۲ - ۲	۱۷ - ۳	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۲	۱۳ - ۳	۱۸ - ۱	۲۳ - ۱	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۴	۱۴ - ۲	۱۹ - ۴	۲۴ - ۲	۲۹ - ۲
۵ - ۲	۱۰ - ۳	۱۵ - ۲	۲۰ - ۳	۲۵ - ۱	۳۰ - ۱